FAZI-MATEMATIKA
- zadaci -

Nebojša Ralević, Ljubo Nedović

14. maj 2016

Sadržaj

1 Fazi skupovi - osnovni pojmovi

1. Dati su fazi-skupovi $A,B,C,D,E,F \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ svojim funkcijama pripadanja:

$$A(x) = \begin{cases} 1-|x| & , \quad x \in [-1,1] \\ 0 & , \quad x \notin [-1,1] \end{cases} = \begin{cases} 1+x & , \quad x \in [-1,0] \\ 1-x & , \quad x \in (0,1] \\ 0 & , \quad x \notin [-1,1] \end{cases},$$

$$B(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & , \quad x \in [-1,1] \\ -x+2 & , \quad x \in (1,2] \\ 0 & , \quad x \notin [-1,2] \end{cases},$$

$$C(x) = \begin{cases} -x^2+4x-3 & , \quad x \in [1,3] \\ 0 & , \quad x \notin [1,3] \end{cases},$$

$$D(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [0,1] \\ 1 & , \quad x \in (1,3] \\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} & , \quad x \in (3,5] \\ 0 & , \quad x \notin [0,5] \end{cases},$$

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x \in \left[-1,-\frac{1}{2}\right] \\ x^2 & , \quad x \in \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \\ 0 & , \quad x \notin \left[-1,\frac{1}{2}\right] \end{cases},$$

$$F(x) = \begin{cases} 0.3 & , \quad x \in (-\infty,1] \\ \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x & , \quad x \in (1,\infty) \end{cases}.$$

   (a) Ispitati da li su dati fazi skupovi dobro definisani, i nacrtati grafike njihovih funkcija pripadnosti.

   (b) Odrediti visinu datih fazi skupova h. Da li su normirani? Odrediti njihova jezgra Ker, nosače supp, nivo-skupove Λ, α-rezove i $\alpha+$-rezove. Ispitati njihovu konveksnost.

   (c) Odrediti fazi komplemente datih fazi skupova.

   (d) Izračunati $\overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $B \cup C$, $B \cap C$, $B \cup F$, $B \cap F$.

2. Nad prostorom $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ su definisani fazi skupovi $A,B \in \mathcal{F}(X)$ svojim funkcijama pripadanja:

$$A : \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0.2 & 0 & 1 & 0.7 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B : \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0.9 & 0 & 0.1 & 0.8 & 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}.$$

   (a) Odrediti visinu datih fazi skupova h. Da li su normirani? Odrediti njihova jezgra Ker, nosače supp, nivo-skupove Λ, α-rezove i $\alpha+$-rezove.

   (b) Odrediti fazi komplemente datih fazi skupova.

   (c) Izračunati $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$.

3. Nad prostorom $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ su definisani fazi skupovi $A,B \in \mathcal{F}(X)$ svojim funkcijama pripadanja sa vrednostima u mreži $L = (\{1,2,3,4,6,12\},|)$, gde je $|$ relacija „deli”:

   $A : \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 2 & 4 & 2 & 1 & 12 & 6 \end{pmatrix}, \quad B : \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 3 & 6 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

   (a) Odrediti visinu datih fazi skupova h. Da li su normirani? Odrediti njihova jezgra Ker, nosače supp, nivo-skupove Λ, α-rezove i $\alpha+$-rezove.

   (b) Odrediti fazi komplemente datih fazi skupova.

   (c) Izračunati $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B}$.

4. Nad skupom tj. prostorom $X = \{a,b,c,d,e,f\}$ su fazi skupovi $A,B \in \mathcal{F}(X)$ definisani svojim funkcijama pripadnosti sa vrednostima u mreži tj. Bulovoj algebri $\mathbf{D}_{30} = \left(D_{30}, NZS, NZD, \frac{30}{\cdot}, 1, 30\right)$, gde je $D_{30} = \{1,2,3,5,6,10,15,30\}$, a standardna relacija poretka Bulove algebre je u ovom slučaju relacija $\cdot|\cdot$ (relacija „deli”):

   $A : \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 6 & 5 & 6 & 1 & 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad B : \begin{pmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 1 & 2 & 30 & 15 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$

   (a) Odrediti jezgra Ker, nosače supp, nivo-skupove Λ, α-rezove i $\alpha+$-rezove fazi-skupova A i B.

   (b) Izračunati fazi komplemente fazi-skupova A i B.

   (c) Izračunati $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \cup \overline{B}$.

2 T-norme i T-konorme

1. Neki primeri fazi-komplemenata:

   (a) „Threshold funkcija”: neka je $t \in [0,1]$ i
   $c(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le t \\ 0 & , \quad x > t \end{cases}.$

   (b) $c(x) = \begin{cases} 1 - x & , \quad x \le 0.3 \\ 0.7 & , \quad 0.3 < x < 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}.$

   (c) $c(x) = 1 - x^2$.

   (d) $c(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi x))$.

   (e) „Sugeno-va” klasa fazi-komplemenata: neka je $\lambda \in (-1, \infty)$ i
   $c_\lambda(x) = \frac{1 - x}{1 + \lambda x}$.

   (f) „Yager-ova” klasa fazi-komplemenata: neka je $\omega \in (0, \infty)$ i
   $c_\omega(x) = (1 + x^\omega)^{\frac{1}{\omega}}$.

(g) Neka je $\lambda \in (-1,\infty)$ i $\omega \in (0,\infty)$, i neka je
$$c_{\lambda,\omega}(x) = \left(\frac{1-x^{\omega}}{1+\lambda x^{\omega}}\right)^{\frac{1}{\omega}}.$$

2. Neki primeri fazi-preseka (T-normi):

   (a) „Standardni presek”:
   $i(x,y) = \min(x,y)$.

   (b) „Algebarski proizvod”:
   $i(x,y) = x \cdot y$.

   (c) „Ograničena razlika”:
   $i(x,y) = \max(0, x+y-1)$.

   (d) „Drastični presek”:
   $$i(x,y) = \begin{cases} x & , \quad y=1 \\ y & , \quad x=1 \\ 0 & , \quad x \neq 1 \wedge y \neq 1 \end{cases}.$$

   (e) $i(x,y) = x+y-x\cdot y$.

   (f) „Schweizer-Sklar”: neka je $p \neq 0$ i
   $i(x,y) = (\max(0, x^p + y^p - 1))^{\frac{1}{p}}$.

   (g) „Yager-ova” klasa: neka je $\omega \in (0,\infty)$ i
   $$i_{\omega}(x,y) = 1 - \min\left(1, \left((1-x)^{\omega} + (1-y)^{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}}\right).$$

   (h) „Frank-ova” klasa fazi-komplemenata: neka je $s>0$, $s \neq 1$, i
   $$i_s(x,y) = \log_s\left(1 + \frac{(s^x-1)(s^y-1)}{s-1}\right).$$

3. Neki primeri fazi-unije (T-konormi):

   (a) „Standardna unija”:
   $u(x,y) = \max(x,y)$.

   (b) „Algebarska suma”:
   $u(x,y) = x+y-x\cdot y$.

   (c) „Ograničena suma”:
   $i(x,y) = \min(1, x+y)$.

   (d) „Drastična unija”:
   $$u(x,y) = \begin{cases} x & , \quad y=0 \\ y & , \quad x=0 \\ 1 & , \quad x \neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}.$$

   (e) „Schweizer-Sklar”: neka je $p \neq 0$ i
   $u(x,y) = 1 - (\max(0, (1-x)^p + (1-y)^p - 1))^{\frac{1}{p}}$.

(f) „Yager-ova" klasa: neka je $\omega \in (0,\infty)$ i
$u_{\omega}(x,y) = \min\left(1,(x^{\omega}+y^{\omega})^{\frac{1}{\omega}}\right)$.

(g) „Frank-ova" klasa: neka je $s>0$, $s \neq 1$, i
$$u_s(x,y) = 1-\log_s\left(1+\frac{\left(s^{(1-x)}-1\right)\left(s^{(1-y)}-1\right)}{s-1}\right).$$

4. Za sledeće funkcije ispitati da li su fazi-komplementi, da li su neprekidne, i da li su involutivne.

   (a) $c(x) = 1-x^2$.

   (b) $c(x) = \sqrt{1-x^2}$ (Yaggerov za $\omega = 2$).

   (c) $c(x) = 1-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

   (d) $c(x) = \frac{1-x}{1+x}$ (Sugenov za $\lambda = 1$).

   (e) „Threshold funkcija": neka je $t_0 \in [0,1]$ i
   $c(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \leq t_0 \\ 0 & , \quad x > t_0 \end{cases}$.

   Za funkciju c pod (b) dokazati da je funkcija $f(x) = 1-x^2$ njen opadajući generator. Za funkciju c pod (d) dokazati da je funkcija $f(x) = \ln(1+x)$ njen rastući generator.

5. Za funkciju $i(x,y) = xy$ dokazati da je T-norma, i ispitati njenu neprekidnost, subidempotentnost i strogu monotonost. Ispitati da li je funkcija $g(x) = e^{-x}$ njen opadajući generator.

6. Za funkciju $u(x,y) = x+z-xy$ dokazati da je T-konorma, i ispitati njenu neprekidnost, superidempotentnost i strogu monotonost. Ispitati da li je funkcija $f(x) = \begin{cases} -\ln(1-x) & , \quad x \in [0,1) \\ \infty & , \quad x = 1 \end{cases}$ njen rastući generator.

7. Dokazati da su fazi-presek (tj. T-norma) $i(x,y) = xy$ i fazi-unija (tj. T-konorma) $u(x,y) = x+z-xy$ dualni u odnosnu na fazi-komplement $c(x) = 1-x$, tj. da je (i,u,c) kompatibilna trojka fazi-operacija.

8. Dokazati da je $(\min,\max,c)$ kompatibilna trojka fazi-operacija za svaki fazi-komplement c.

3 Operatori agregacije

1. Ako su $A_i : \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [0,1]^n \to [0,1]$ operatori agregacije za sve $i \in \{0,1,2,\ldots,k\}$, ispitati da li je sa

$A(a_1,\ldots,a_n) = A_0(A_1(a_1,\ldots,a_n),\ldots,A_k(a_1,\ldots,a_n))$

definisan operator agregacije A.

2. Neka je $f:[0,1]\to[0,1]$ bijektivna funkcija. Ispitati da li je sa

$$A(a_1,\ldots,a_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i)\right)$$

definisan operator agregacije A.

4 Fazi brojevi

Aritmetičke operacije sa intervalima:

- Neka je $\mathbf{0}=[0,0]$ i $\mathbf{1}=[1,1]$.
- $[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]$.
- $[a,b]-[c,d]=[a-c,b-d]$.
- $[a,b]\cdot[c,d]=[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}]$.
- Ako je $0\notin[c,d]$, tada je
  $[a,b]/[c,d]=\left[\min\left\{\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}\right\},\max\left\{\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}\right\}\right]$.

Fazi broj je fazi skup...

Dva pristupa definisanja operacija sa fazi-brojevima:

- Za fazi-brojeve $A:\mathbb{R}\to[0,1]$ i $A:\mathbb{R}\to[0,1]$ i $*\in\{+,-,\cdot,/\}$ definišemo fazi-broj $A*B$ sa

  $$(A*B)(z) = \sup_{x,y:x*y=z}\min\{A(x),B(y)\}.$$

  Na isti način definišemo i operacije $MIN(A,B)$ i $MAX(A,B)$ sa

  $$MIN(A,B)(z) = \sup_{x,y:\min(x,y)=z}\min\{A(x),B(y)\},$$

  $$MAX(A,B)(z) = \sup_{x,y:\max(x,y)=z}\min\{A(x),B(y)\}.$$

- (Preko intervalnih operacija) Za fazi brojeve $A:\mathbb{R}\to[0,1]$ i $B:\mathbb{R}\to[0,1]$, i za aritmetičku operaciju $*\in\{+,-,\cdot,/\}$, do fazi-broja $A*B$ (tj. njegove funkcije pripadanja) dolazimo na sledeći način.

  1. Za alfa-rezove tj. intervale ${}^{\alpha}A$ i ${}^{\alpha}B$, primenom odgovarajuće intervalne operacije $*$ izračunavamo ${}^{\alpha}(A*B)$.

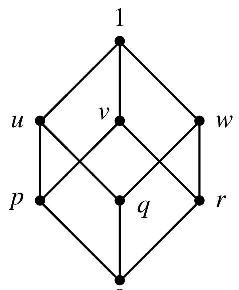
2. Funkciju pripadanja fazi-broja $A*B$ nalazimo na sledeći način, za svako $x\in\mathbb{R}$:
$$(A*B)(x)=\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}{}_{\alpha}(A*B)\right)(x)=\left(\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\alpha\cdot{}^{\alpha}(A*B)\right)(x)$$
$$=\sup_{\alpha\in[0,1]}\left\{\alpha\cdot\chi_{\alpha_{(A*B)}}(x)\right\},$$
gde je χ crisp-karakteristična funkcija.

1. Za fazi-brojeve $A:\mathbb{R}\to[0,1]$ i $B:\mathbb{R}\to[0,1]$ definisane njihovim karakterističnim funkcijama
$$A(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{2} & ,\ x\in(-1,1]\\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & ,\ x\in(1,3)\\ 0 & ,\ x\notin(-1,3)\end{cases},\quad B(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & ,\ x\in(1,3]\\ -\frac{1}{2}x+\frac{5}{2} & ,\ x\in(3,5)\\ 0 & ,\ x\notin(1,5)\end{cases},$$
izračunati $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$ i A/B.

2. Za fazi-brojeve $A:\mathbb{R}\to[0,1]$ i $B:\mathbb{R}\to[0,1]$ definisane njihovim karakterističnim funkcijama
$$A(x)=\begin{cases}x-4 & ,\ x\in(4,5]\\ -x+6 & ,\ x\in(5,6)\\ 0 & ,\ x\notin(4,6)\end{cases},\quad B(x)=\begin{cases}x+3 & ,\ x\in(-3,-2]\\ -x-1 & ,\ x\in(-2,-1)\\ 0 & ,\ x\notin(-3,-1)\end{cases},$$
izračunati $A+B$, $A-B$, $A\cdot B$ i A/B.

5 Fazi relacije

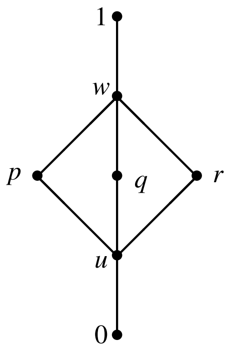
1. Na skupu $L=\{0,p,q,r,u,v,w,1\}$ je, Haseovim dijagramom sa slike, data mreža $\mathcal{L}=(L,\leq)$. Na skupu $X=\{a,b,c,d,e,f\}$ je, Kejlijevom tablicom, data binarna fazi-relacija $\rho:X^2\to L$. Ispitati refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost fazi-relacije ρ, odrediti njene projekcije, i inverznu fazi-relaciju ρ^{-1}.



ρ	a	b	c	d	e	f
a	1	0	0	0	0	0
b	p	1	q	0	0	u
c	0	0	1	0	1	0
d	0	0	0	1	0	w
e	0	r	0	1	1	0
f	0	0	v	0	1	1

2. Na skupu $L = \{0, u, p, q, r, w, 1\}$ je, Haseovim dijagramom sa slike, data mreža $\mathcal{L} = (L, \leq)$. Na skupu $X = \{a, b, c\}$ su, Kejlijevim tablicama, date binarne fazi-relacije $\rho : X^2 \to L$ i $\sigma : X^2 \to L$. Ispitati refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost fazi-relacija ρ i σ, i odrediti standardnu max-min kompoziciju (proizvod) $\rho \circ \sigma$, koja je definisana sa

$$\rho \circ \sigma(x, y) = \bigvee_{z \in X} (\rho(x, z) \wedge \sigma(z, y)).$$



ρ	a	b	c
a	1	0	w
b	u	1	0
c	0	0	1

σ	a	b	c
a	1	0	0
b	u	1	r
c	0	0	1

3. Na skupu $X = \{a, b, c\}$ su, Kejlijevim tablicama, date binarne fazi-relacije $\rho : X^2 \to [0, 1]$ i $\sigma : X^2 \to [0, 1]$. Ispitati refleksivnost, simetričnost, antisimetričnost i tranzitivnost fazi-relacija ρ i σ, odrediti standardne max-min kompozicije (proizvode) $\rho \circ \sigma$ i $\sigma \circ \rho$, napisati inverzne relacije relacija ρ i σ, i napisati njihove prve projekcije.

ρ	a	b	c
a	1	0.2	1
b	0.2	1	0
c	0.3	0	0.5

σ	a	b	c
a	1	0.4	0.9
b	0.4	1	0.7
c	0.9	0.7	1

6 Fazi funkcije i operacije

Dva pristupa definisanja fazi-funkcije:

- (Prvi način) Neka je $(L, \leq)$ mreža. Neka su X i Y proizvoljni skupovi. Funkciju (običnu) $f : X \to Y$ fazifikujemo na sledeći način. $\tilde{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ je fazi funkcija ako za sve fazi skupove $A \in \mathcal{F}(X)$ i $B \in \mathcal{F}(Y)$ sa vrednostima u mreži L, tj. za sve $A : X \to L$ i $B : Y \to L$ važi $A \subset B \circ f$ (gde je $\subseteq$ relacija fazi-podskup), odnosno $\forall x \in X, A(x) \leq B(f(x))$. Ako postoji $f^{-1} : Y \to X$, tada je $\tilde{f}^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ inverzna fazi-funkcija.

- (Drugi način - princip ekstenzije) Neka je $(L, \leq)$ mreža. Neka su X i Y proizvoljni skupovi, i neka su $\mathcal{F}(X)$ i $\mathcal{F}(Y)$ familije svih fazi skupova nad X odnosno Y, sa vrednostima u mreži L. Funkciju (običnu) $f : X \to Y$ fazifikujemo na sledeći način. Fazi-funkcije $\tilde{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ i $\tilde{f}^{-1} : \mathcal{F}(Y) \to \mathcal{F}(X)$ su definisane sa

  $$\forall A \in \mathcal{F}(X), \quad \left[\tilde{f}(A)\right](y) = \sup_{x : f(x) = y} A(x),$$

$\forall B \in \mathcal{F}(Y), \quad \left[\tilde{f}^{-1}(B)\right](y) = B(f(x)).$

Neka je $(L, \leq)$ mreža. Fazi funkcija $* : A \times A \to A$ je binarna fazi-operacija nad fazi skupom $A : X \to L$ ako za sve $(x,y) \in A \times A$ važi $(A \times A)(x,y) \leq A(x * y)$, odnosno $A(x) \wedge A(y) \leq A(x * y)$.

1. Neka je $f : X \to Y$, i neka je $\tilde{f} : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y)$ njena fazi-ekstenzija. Dokazati sledeća tvrđenja.
   (a) $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{F}(X), \quad A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \left[\tilde{f}(A_1)\right] \subseteq \left[\tilde{f}(A_2)\right].$
   (b) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{F}(Y), \quad B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow \left[\tilde{f}^{-1}(B_1)\right] \subseteq \left[\tilde{f}^{-1}(B_2)\right].$
2. Neka je I proizvoljan skup indeksa, neka je $f : X \to Y$, i neka su $\mathcal{F}(X)$ i $\mathcal{F}(X)$ familije fazi-skupova sa vrednostima u $[0,1]$. Neka su $\tilde{f}$ i $\tilde{f}^{-1}$ fazi ekstenzije funkcije f, i neka su $\cup$ i $\cap$ standardne max i min fazi-skupovne operacije. Dokazati da je $\left[\tilde{f}^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right)\right] = \left[\bigcup_{i \in I} \tilde{f}^{-1}(B_i)\right].$
3. Na prostoru $X = \{a,b,c,d\}$ je definisan fazi-skup $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0.7 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$ sa vrednostima u $[0,1]$. Ispitati da li je sa

ρ	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	a	d	c
c	c	d	a	b
d	d	c	b	a

definisana fazi-operacija $* : A \times A \to A$.

7 Fazi mere i metrike

1. Neka je X konačan skup, i neka je $Pos : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ „possibility" mera. Dokazati da postoji jedinstvena funkcija $\varphi : X \to [0,1]$ takva da je
   $\forall A \in \mathcal{P}(X), \quad Pos(A) = \max_{x \in A} \varphi(x).$
2. Neka je X konačan skup, i neka za funkciju $m : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ važi $m(\emptyset) = 0$ i $\sum_{A \in \mathcal{P}(X)} m(A) = 1.$
   (a) Ispitati tačnost iskaza
      (a.1) $m(X) = 1,$
      (a.2) $A \subseteq B \;\Rightarrow\; m(A) \leq m(B).$
   (b) Dokazati da je sa
      $$Bel(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B)$$
      definisana „belief" mera $Bel : \mathcal{P}(X) \to [0,1].$

3. Neka je $\mathcal{F}(X)$ familija svih fazi-skupova definisanih nad nekim konačnim skupom $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Dokazati da je preslikavanje $d : \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(X) \to \mathbb{R}$ definisano sa

$$d(A,B) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |A(x_i) - B(x_i)|, \quad A,B \in \mathcal{F}(X)$$

metrika (normirana Hemingova metrika), odnosno da za sve $A,B \in \mathcal{F}(X)$ važi

(1) $d(A,B) \geq 0$,

(2) $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$,

(3) $d(A,B) = d(B,A)$,

(4) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$.