1

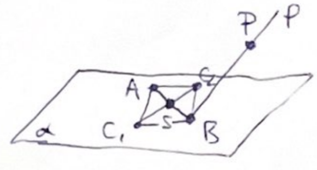
1. Раван α одређена је тачком A и вектором нормале $\vec{n}$, а права p тачком P и вектором правца $\vec{p}$, где је $A \notin p$, $P \notin \alpha$ и $\vec{p} \not\perp \vec{n}$. У зависности од $\vec{r}_A, \vec{r}_P, \vec{n}$ и $\vec{p}$ изразити векторе положаја тачака B и C тако да ABC буде једнакостранични троугао, $B \in \alpha$ и $C \in \alpha$, и $B \in p$.

30

$$B \in \alpha \cap p \Rightarrow \vec{r}_B = \vec{r}_P + \frac{(\vec{r}_A - \vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{n}\cdot\vec{p}}\vec{p} \quad 10$$

$$\vec{r}_S = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2} \quad 5$$

$$\vec{r}_{C_1,C_2} = \vec{r}_S \pm \frac{|AB|\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\vec{AB}\times\vec{n}}{|\vec{AB}\times\vec{n}|} \quad 15$$



2. Нека је V векторски простор генерисан векторима $a=(2,-1,-1)$, $b=(-4,2,2)$, $c=(-1,-1,-1)$ и $d=(7,1,1)$. Одредити све линеарне зависности вектора a,b,c,d, наћи једну базу простора V и $\dim(V)$.

35

$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0 \Leftrightarrow \alpha(2,-1,-1)+\beta(-4,2,2)+\gamma(-1,-1,-1)+\delta(7,1,1)=(0,0,0)$

$$\begin{aligned} 2\alpha-4\beta-\gamma+7\delta&=0 \\ -\alpha+2\beta-\gamma+\delta&=0 \quad /2 \,|(-1) \\ -\alpha+2\beta-\gamma+\delta&=0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\alpha+2\beta-\gamma+\delta&=0 \\ -3\gamma+9\delta&=0 \\ 0&=0 \end{aligned}$$

$\gamma=3\delta$

$\alpha=2\beta-2\delta$

$(2\beta-2\delta)a+\beta b+3\delta c+\delta d=0$

$(2a+b)\beta+(-2a+3c+d)\delta=0$, за све $\beta,\delta\in\mathbb{R}$

за $\beta=1$ и $\gamma=0$: $\boxed{2a+b=0}$ све линеарне

за $\beta=0$ и $\gamma=1$: $\boxed{-2a+3c+d=0}$ зависности 20

$\left.\begin{aligned} b&=-2a \\ 3c&=2a-d \end{aligned}\right\}$ $\{a,d\}$ једна база, $\dim(V)=2$ 10 5

3. Нека је $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ линеарна трансформација задата са $f(1,1)=(0,1)$ и $f(-1,1)=(-1,0)$. a) Израчунај $f(1,0)$ и $f(0,1)$. b) Напиши матрицу M_f у стандардној бази за линеарну трансформацију f, одреди ранг матрице и провери да ли је f бијекција. c) Ако је $A=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$ квадрат, одреди $f(A)$, тј. скуп слика, и израчунај површину $f(A)$.

35

a) $(1,0)=\alpha(1,1)+\beta(-1,1)$

$\alpha-\beta=1$ $\quad \alpha=\frac12, \beta=-\frac12$

$\alpha+\beta=0$

$(0,1)=\alpha(1,1)+\beta(-1,1)$

$\alpha-\beta=0$ $\quad \alpha=\beta=\frac12$

$\alpha+\beta=1$

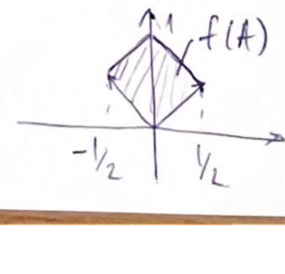
$f(1,0)=f(\frac12(1,1)-\frac12(-1,1))=\frac12 f(1,1)-\frac12 f(-1,1)=(\frac12,\frac12)$

$f(0,1)=f(\frac12(1,1)+\frac12(-1,1))=\frac12 f(1,1)+\frac12 f(-1,1)=(-\frac12,\frac12)$ 20

b) $M_f=\begin{bmatrix} \frac12 & -\frac12 \\ \frac12 & \frac12 \end{bmatrix}$ $\quad \mathrm{rang}(M_f)=2$ 5 $\Rightarrow f$ јесте бијекција 5

c) $f(A)$ је квадрат чије су две странице одређене векторима $(\frac12,\frac12)$ и $(-\frac12,\frac12)$, чија је површина

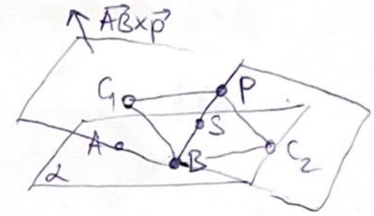
$P=|\det(M_f)|=\frac14+\frac14=\frac12$ 5



(B)

1. 30 Раван α одређена тачком A и вектором нормале $\vec{n}$, а права p тачком P и вектором правца $\vec{p}$, где је $A\notin p$, $P\notin\alpha$ и $\vec{p}\not\perp\vec{n}$. У зависности од $\vec{r}_A, \vec{r}_P, \vec{n}$ и $\vec{p}$ изразити векторе положаја тачака B и C тако да A, B и C буде једнакостранични троугао где $B\in\alpha$ и $B\in p$ и тачка C припада равни одређеној тачкама A, B и P.

$$B\in\alpha\cap p \Rightarrow \vec{r}_B=\vec{r}_P+\frac{(\vec{r}_A-\vec{r}_P)\vec{n}}{\vec{p}\cdot\vec{n}}\vec{p} \quad 10$$



$$\vec{r}_S=\frac{\vec{r}_B+\vec{r}_P}{2} \quad 5$$

$$\vec{r}_{C_1,C_2}=\vec{r}_S\pm\frac{|\vec{BP}|\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(\vec{AB}\times\vec{p})\times\vec{p}}{|(\vec{AB}\times\vec{p})\times\vec{p}|} \quad 15$$

2. Нека је V векторски простор генерисан векторима $a=(1,2,1)$, $b=(-1,1,2)$, $c=(5,4,-1)$ и $d=(-5,-1,4)$. Одредити све линеарне зависности вектора a,b,c,d, ~~ее~~ једну базу простора V и $\dim(V)$.

$\alpha a+\beta b+\gamma c+\delta d=0 \iff \alpha(1,2,1)+\beta(-1,1,2)+\gamma(5,4,-1)+\delta(-5,-1,4)=(0,0,0)$

$\alpha-\beta+5\gamma-5\delta=0 \quad /(-2)/(-1)$
$2\alpha+\beta+4\gamma-\delta=0$
$\alpha+2\beta-\gamma+4\delta=0$

$\alpha-\beta+5\gamma-5\delta=0$
$3\beta-6\gamma+9\delta=0 \quad /(-1)$
$3\beta-6\gamma+9\delta=0$

$\alpha-\beta+5\gamma-5\delta=0$
$3\beta-6\gamma+9\delta=0$
$0=0$

$\beta=2\gamma-3\delta$
$\alpha=\beta-5\gamma+5\delta=-3\gamma+2\delta$
$(-3\gamma+2\delta)a+(2\gamma-3\delta)b+\gamma c+\delta d=0$
$(-3a+2b+c)\gamma+(2a-3b+d)\delta=0$ за све $\gamma,\delta\in\mathbb{R}$.

За $\gamma=1$ и $\delta=0$: $\boxed{-3a+2b+c=0}$
За $\gamma=0$ и $\delta=1$: $\boxed{2a-3b+d=0}$
све линеарне зависности 20

$c=+3a-2b$
$d=-2a+3b$
једна база је $\{a,b\}$ и $\dim(V)=2$ 10 5

3. Нека је $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ линеарна трансформација задата са $f(1,-1)=(0,-1)$ и $f(-1,-1)=(-1,0)$. a) Израчунај $f(1,0)$ и $f(0,1)$. b) Нађи матрицу M_f у стандардној бази за линеарну трансформацију f, одреди ранг матрице M_f и провери да ли је f бијекција. c) Ако је $B=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ квадрат, одреди $f(B)$, тј. скуп слика, и израчунај површину од $f(B)$.

a) $(1,0)=\alpha(1,-1)+\beta(-1,-1)$

$\alpha-\beta=1$
$-\alpha-\beta=0$

$\alpha=\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{1}{2}$

$(0,1)=\alpha(1,-1)+\beta(-1,-1)$

$\alpha-\beta=0$
$-\alpha-\beta=1$

$\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$

$f(1,0) = f\left(\frac{1}{2}(1,-1) - \frac{1}{2}(-1,-1)\right) = \frac{1}{2} f(1,-1) - \frac{1}{2} f(-1,-1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

$f(0,1) = f\left(-\frac{1}{2}(1,-1) - \frac{1}{2}(-1,-1)\right) = -\frac{1}{2} f(1,-1) - \frac{1}{2} f(-1,-1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

20

b) $M_f = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ ранг$(M_f)=2 \Rightarrow f$ је бијекција

5 5

c) $f(B)$ је квадрат чије су две странице одређене векторима $(1/2,-1/2)$ и $(1/2,1/2)$, чија је површина $P=|\det(M_f)| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

5