Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 16

Na prethodnom času

- Relacija $\equiv_P$ na skupu $F[t]$
- Faktor skup $F[t]/P$
- Komutativan prsten sa jedinicom $(F[t]/P, +, \cdot)$
- Polje $(F[t]/P, +, \cdot)$, ako je polinom P nesvodljiv nad F
- Sva konačna polja su:
  - $(\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ako je p prost ceo broj - ima p elemenata
  - $(\mathbb{Z}_p[t]/P, +, \cdot)$, ako je polinom P nesvodljiv nad poljem $\mathbb{Z}_p$ - ima p^n elemenata, za $dg(P) = n$

Linearna algebra - kroz istoriju

Linearna algebra

Wikipedia: *Linearna algebra (lat: linealis, pripada liniji), je matematička disciplina koja se bavi vektorima i matricama i uopšte vektorskim prostorom i linearnim transformacijama.*

Linearna algebra se bavi:

- Sistemima linearnih jednačina (srednja škola)
- Vektorima (srednja škola)
- Vektorskim prostorima (apstrakcija)
- Linearanim transformacijama (homomorfizmi)
- Matricama (isto što i linearne transformacije)

Zašto učiti linearnu algebru:

- Primene u mašinskom učenju, u obradi digitalnih slika (slika je matrica), u fizici, u elektronici. I još mnogo primena.

Kako je sve počelo?

- Pre 4000 godina u Vavilonu su rešavali sisteme od dve jednačine sa dve nepoznate, u današnjoj notaciji
$$\begin{array}{rcrcl} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{array}$$
- Oko 200. godine p.n.e. kineski matematičari su objavili knjigu "Devet poglavlja o matematičkoj veštini" u kojoj predstavljaju metod za rešavanje lineranih sitema od $3, 4$ i 5 jednačina i nepoznatih
- Taj metod kineskih matematičara je danas poznat kao **Gausov metod eliminacije**

Sistemi linearnih jednačina i determinante

- U *XVII* veku **Dekart** (latinski Cartesius) u knjizi "Geometrija" uvodi **analitičku geometrju** - spaja geometriju sa algebrom, uvodi (Dekartov) koordinatni sistem
- Jedan od prvih apstraktnih pojmova u rešavanju sistema linearnih jednačina je pojam **determinante** koji u *XVII* veku uvodi japanski matematičar **Takakazu**, a u Evropi ih prvi koristi **Lajbnic** (nezavisno jedan od drugog)
- U *XVIII* veku je **Kramer** pronašao način da rešava kvadratne sisteme isključivo pomoću determinanti
- U to vreme su **Njutin**, pa **Gaus** i drugi koristili **metod eliminacije** promenljivih iz jednačina da bi početni sistem sveli na **trougaoni oblik** odakle se rešenja jednostavno pročitaju - sistem koji se danas uči u osnovnoj školi (koji koriste i računari)

Vektorski prostori, linearne transformacije i matrice - *XIX* vek

- **Grasman** je prvi razmišljao o *n*-**dimenzionalnim vektorskim prostorima**
- **Silvester** je uveo pojam **matrice** (latinski naziv za utrobu ili matericu, mesto gde je nešto nastalo ili se formiralo) - koristio je matrice da generiše determinante
- Preslikavanja između vektorskih prostora su **linearne transformacije**, a matrice su drugačija reprezentacija linearnih transformacija
- **Kejli** je prvi definisao množenje matrica (da predstavlja kompoziciju linearnih transformacija), traženje inverzne matrice, definisao algebru matrica, takođe je formulisao Kejli-Hamiltonovu teoremu

Sistemi linearnih jednačina

Linearne jednačine

Podsećanje: Linearna jednačina sa jednom promenljivom nad proizvoljnim poljem F je oblika $ax = b$. Šta je rešenje?

Linearne jednačine

Podsećanje: Linearna jednačina sa jednom promenljivom nad proizvoljnim poljem F je oblika $ax = b$. Šta je rešenje?

- Ako je $a = 0$ i $b \neq 0$ jednačina nema rešenja.
- Ako je $a = 0$ i $b = 0$ rešenje su svi elementi polja F.
- Ako je $a \neq 0$ rešenje je jedino $x = a^{-1}b$.

Napomena

U osnovnoj i srednjoj školi se uče sistemi linearnih jednačina sa dve i tri promenljive.

Sistem linearnih jednačina sa dve promenljive

Posmatrajmo sistem sa dve promenljive x i y nad poljem $\mathbb{R}$, tj. konjukciju sledećih jednačina

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 0 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}$$

Šta je rešenje?

Sistem linearnih jednačina sa dve promenljive

Posmatrajmo sistem sa dve promenljive x i y nad poljem $\mathbb{R}$, tj. konjukciju sledećih jednačina

$$\begin{array}{rcrcr} -x & + & y & = & 0 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}$$

Šta je rešenje?
Rešenje je sada vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koji zadovoljava **obe** jednačine, ako takav postoji.

Kako naći rešenje, ako postoji?

Sistem linearnih jednačina sa dve promenljive

Posmatrajmo sistem sa dve promenljive x i y nad poljem $\mathbb{R}$, tj. konjukciju sledećih jednačina

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}$$

Šta je rešenje?
Rešenje je sada vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koji zadovoljava **obe** jednačine, ako takav postoji.

Kako naći rešenje, ako postoji?

- **Rešavanjem Gausovim metodom eliminacije**
- Rešavanjem po vrstama (Geometrija u sistemima)
- Rešavanjem po kolonama (Vektori u sistemima)

Gausov metod eliminacije: Primer 1

Ideja: Transformisati sistem eliminacijom promenljivih dok se ne dobije **trougaoni oblik**

$$
\begin{array}{rcrcr}
-x & + & y & = & 0 \\
2x & + & y & = & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

Gausov metod eliminacije: Primer 1

Ideja: Transformisati sistem eliminacijom promenljivih dok se ne dobije **trougaoni oblik**

$$
\begin{array}{rcrcr}
\boxed{-1}x & + & y & = & 0 \\
2x & + & y & = & 3 \\
\hline
\end{array}
$$

- Gornji levi element zovemo **prvi pivot** ako je različit od 0. Koriseći njega, eliminišemo x iz druge jednačine: **na drugu jednačinu dodamo prvu pomnoženu sa** 2

Gausov metod eliminacije: Primer 1

Ideja: Transformisati sistem eliminacijom promenljivih dok se ne dobije **trougaoni oblik**

$$\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ 2x & + & y & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} \boxed{-1}x & + & y & = & 0 \\ & & \boxed{3}y & = & 3 \end{array}$$

- Gornji levi element zovemo **prvi pivot** ako je različit od 0. Koriseći njega, eliminišemo x iz druge jednačine: **na drugu jednačinu dodamo prvu pomnoženu sa** 2

Gausov metod eliminacije: Primer 1

Ideja: Transformisati sistem eliminacijom promenljivih dok se ne dobije **trougaoni oblik**

$$
\begin{array}{rcrcl}
-x & + & y & = & 0 \\
2x & + & y & = & 3 \\
\hline
\boxed{\text{-}1}x & + & y & = & 0 \\
 & & \boxed{3}y & = & 3
\end{array}
$$

- Gornji levi element zovemo **prvi pivot** ako je različit od 0. Koriseći njega, eliminišemo x iz druge jednačine: **na drugu jednačinu dodamo prvu pomnoženu sa** 2
- Kada dobijemo trougaoni oblik rešenje čitamo **zamenom unazad**:
  - Iz druge jednčine imamo $y = 1$
  - Zamenom $y = 1$ u prvu jednačinu dobijamo $x = 1$, tj. rešenje je $(x, y) = (1, 1)$.

Gausov metod eliminacije: Primer 1

Ideja: Transformisati sistem eliminacijom promenljivih dok se ne dobije **trougaoni oblik**

$$
\begin{array}{rcrcl}
-x & + & y & = & 0 \\
2x & + & y & = & 3 \\
\hline
\boxed{-1}x & + & y & = & 0 \\
 & & \boxed{3}y & = & 3
\end{array}
$$

- Gornji levi element zovemo **prvi pivot** ako je različit od 0. Koriseći njega, eliminišemo x iz druge jednačine: **na drugu jednačinu dodamo prvu pomnoženu sa** 2
- Kada dobijemo trougaoni oblik rešenje čitamo **zamenom unazad**:
  - Iz druge jednčine imamo $y = 1$
  - Zamenom $y = 1$ u prvu jednačinu dobijamo $x = 1$, tj. rešenje je $(x, y) = (1, 1)$.
- U kvadratićima imamo dva pivota - čiji proizvod ovde daje determinantu kvadratnog sistema (kasnije ćemo raditi determinanate)

Gausov metod eliminacije: Primer 2

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

Gausov metod eliminacije: Primer 2

$$\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{0}x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

- Na poziciji prvog pivota je 0. Zato **zamenimo mesta jednačinama**

Gausov metod eliminacije: Primer 2

$$\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{0}x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

- Na poziciji prvog pivota je 0. Zato **zamenimo mesta jednačinama**

Gausov metod eliminacije: Primer 2

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{0}x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

- Na poziciji prvog pivota je 0. Zato **zamenimo mesta jednačinama**
- Eliminišemo x iz druge jednačine: **na drugu jednačinu dodamo prvu pomnoženu sa** 2

Gausov metod eliminacije: Primer 2

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{0}x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\ & & \boxed{0}y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \\ \hline \end{array}$$

- Na poziciji prvog pivota je 0. Zato **zamenimo mesta jednačinama**
- Eliminišemo x iz druge jednačine: **na drugu jednačinu dodamo prvu pomnoženu sa** 2

Gausov metod eliminacije: Primer 2

$$\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{0}x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcl} \boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\ & & \boxed{0}y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

- Na poziciji prvog pivota je 0. Zato **zamenimo mesta jednačinama**
- Eliminišemo x iz druge jednačine: **na drugu jednačinu dodamo prvu pomnoženu sa** 2
- Na poziciji drugog pivota je 0: **zamenimo mesta promenljivama** y i z

Gausov metod eliminacije: Primer 2

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\boxed{0}x & + & y & + & z & = & 2 \\
-x & + & y & & & = & 0 \\
2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\
2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\
 & & y & + & z & = & 2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\
 & & \boxed{0}y & + & z & = & 3 \\
 & & y & + & z & = & 2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr}
\boxed{\text{-}1}x & & & + & y & = & 0 \\
 & & \boxed{1}z & & & = & 3 \\
 & & z & + & y & = & 2
\end{array}$$

- Na poziciji prvog pivota je 0. Zato **zamenimo mesta jednačinama**
- Eliminišemo x iz druge jednačine: **na drugu jednačinu dodamo prvu pomnoženu sa** 2
- Na poziciji drugog pivota je 0: **zamenimo mesta promenljivama** y i z

Gausov metod eliminacije: Primer 2

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{0}x & + & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{\text{-}1}x & + & y & & & = & 0 \\ & & \boxed{0}y & + & z & = & 3 \\ & & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{\text{-}1}x & & & + & y & = & 0 \\ & & \boxed{1}z & & & = & 3 \\ & & z & + & y & = & 2 \end{array}$$

- Na poziciji prvog pivota je 0. Zato **zamenimo mesta jednačinama**
- Eliminišemo x iz druge jednačine: **na drugu jednačinu dodamo prvu pomnoženu sa** 2
- Na poziciji drugog pivota je 0: **zamenimo mesta promenljivama** y i z
- Eliminišemo z iz treće jednačine: na drugu dodamo prvu jednačinu pomnoženu sa -1 i dobijamo trougaoni oblik

$$\begin{array}{rcrcrcr} \boxed{\text{-}1}x & & & + & y & = & 0 \\ & & \boxed{1}z & & & = & 3 \\ & & & & \boxed{1}y & = & -1 \end{array}$$

Zamenom unazad: $(x, y, z) = (-1, -1, 3)$

Gausov metod eliminacije: Primeri 3 i 4

Primer 3:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ -2x & - & 6y & - & 2z & = & 3 \\ \hline \boxed{1}x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ & & & & 0 & = & 5 \end{array}$$

Dobijeni sistem nema rešenja, pa ni početni nema rešenja - sistem je **nerešiv, nesaglasan, protivrečan, nemoguć, kontradiktoran**

Primer 4:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ -2x & - & 5y & - & z & = & 3 \\ \hline \boxed{1}x & + & 3y & + & z & = & 1 \\ & & \boxed{1}y & + & z & = & 5 \end{array}$$

Na poziciji pivota su brojevi različiti od nule, pa sistem možemo zapisati ovako:

$$\begin{array}{rcrcl} \boxed{1}x & + & 3y & = & 1 - z \\ & & \boxed{1}y & = & 5 - z \end{array}$$

Zamenom unazad dobijamo $y = 5 - z$, $x = -14 + 4z$, tj. imamo skup rešenja $R_S = \{(-14 + 4z, 5 - z, z) \,|\, z \in \mathbb{R}\}$, i kažemo da je sistem **jednostruko neodređen**

Definicija sistema linearnih jednačina nad proizvoljnim poljem

Definicija

Sistem m linearnih jednačina $\mathcal{S}$ *nad poljem* F *za n-torku promenljivih* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n, m \in \mathbb{N}$, *gde su* $a_{ij}, b_i \in F$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, *jeste konjunkcija linearnih jednačina:*

$$\mathcal{S}: \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

- $b_1, \ldots, b_m$ se zovu **slobodni članovi**
- Ako je $b_1 = \ldots = b_m = 0$ sistem je **homogen**
- Ako je $n = m$ sistem je **kvadratni**
- Skup rešenja sistema $\mathcal{S}$ pišemo $R_{\mathcal{S}}$

Gausov metod eliminacije: ekvivalentne transformacije

Definicija (Ekvivalentni sistemi)

Sistemi $\mathcal{S}_1$ *i* $\mathcal{S}_2$ *su ekvivalentni akko imaju isti skup rešenja, odnosno akko* $R_{\mathcal{S}_1} = R_{\mathcal{S}_2}$.

Definicija (Ekvivalentne transformacije)

Ekvivalentne (elementarne) transformacije sistema linearnih jednačina su:

1. *Zamena mesta vrstama;*
2. *Zamena mesta sabircima (tj. promenljivama);*
3. *Dodavanje jednačine pomnožene brojem nekoj drugoj jednačini;*
4. *Množenje jednačine brojem različitim od nule.*

Teorema

Ako je sistem linearnih jednačina $\mathcal{S}_2$ *dobijen od sistema* $\mathcal{S}_1$ *ekvivalentnim transformacijma, tada su sistemi ekvivalentni (ekvivalentnim transformacijama se ne menja skup rešenja linearnog sistema).*

Priroda sistema

Definicija

Sistem linearnih jednačina $\mathcal{S}$ može biti:

- **Rešiv, saglasan, moguć** - *tada je* $R_{\mathcal{S}} \neq \emptyset$
    - **Određen** - *tačno jedno rešenje*
    - **Neodređen** - *više od jednog rešenja*
- **Nerešiv, nesaglasan, protivrečan, nemoguć, kontradiktoran** - *tada je* $R_{\mathcal{S}} = \emptyset$

Napomena

Neodređene sisteme dalje klasifikujemo prema stepenu neodređenosti (jednostruko neodređeni, dvostruko neodređeni, itd.)

Više od jednog rešenja

Teorema

Ako je F polje, $\mathcal{S}$ sistem sa n promenljivih i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in F^n$ rešenja sistema $\mathcal{S}$ nad poljem F, tada je za svako $\lambda \in F$ rešenje sistema $\mathcal{S}$ i

$$(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_1, \ldots, \lambda\alpha_n + (1-\lambda)\beta_n)$$

Dokaz

Ako je i-ta jednačina sistema $\mathcal{S}$ data sa $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$ i $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$ i $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in F^n$ su rešenja sistema $\mathcal{S}$ tada dobijamo

$a_{i1}\big(\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_1\big) + \cdots + a_{in}\big(\lambda\alpha_n + (1-\lambda)\beta_n\big) =$
$\lambda\big(a_{i1}\alpha_1 + \ldots + a_{in}\alpha_n\big) + (1-\lambda)\big(a_{i1}\beta_1 + \ldots + a_{in}\beta_n\big) = \lambda b_i + (1-\lambda)b_i = b_i$

Posledica

Ako je F beskonačno polje (kao $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$) tada svaki neodređen sistem $\mathcal{S}$ sa n promenljivih ima beskonačno mnogo rešenja, tj. skup $R_{\mathcal{S}} \subseteq F^n$ je beskonačan.

Trougaoni oblik

Teorema

Svaki sistem linearnih jednačina $\mathcal{S}$ nad poljem F

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

može se Gausovim postupkom eliminacije svesti na ekvivalentan sistem u trougaonom obliku

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} c_{1,1}y_1 & + & c_{1,2}y_2 & + & c_{1,3}y_3 & + & \dots & + & c_{1,k}y_k & + & \dots & + & c_{1,n}y_n & = & d_1 \\ & & c_{2,2}y_2 & + & c_{2,3}y_3 & + & \dots & + & c_{2,k}y_k & + & \dots & + & c_{2,n}y_n & = & d_2 \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & c_{k,k}y_k & + & \dots & + & c_{k,n}y_n & = & d_k \\ & & & & & & & & & & & & 0 & = & \lambda_{k+1} \\ & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\ & & & & & & & & & & & & 0 & = & \lambda_m \end{array}$$

Ideja dokaza: Gausov postupak

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

1. Ako je $a_{1,1} \neq 0$ onda je on pivot i pomoću njega eliminišemo promenljivu x_1 iz preostalih jednačina
2. Ako je $a_{1,1} = 0$ tada u prvoj koloni pronađi $a_{i,1} \neq 0$ (ili u prvoj vrsti $a_{1,i} \neq 0$), zameni mesta 1. i i-toj jednačini (ili promenljivama), $a_{i,1}$ (ili $a_{1,i}$) je pivot i eliminišemo x_1 (ili x_i) iz preostalih jednačina
3. Postupak ponavljamo počevši od sledeće jednačine sve do poslednje jednačine ili dok u svim preostalim jednačinama imamo bar jednu promenljivu

Napomena

- *Za početni i sistem u trougaonom obliku imamo* $\{y_1, \dots, y_n\} = \{x_1, \dots, x_n\}$, *tj. promenljive su iste samo im je redosled (možda) promenjen*
- *U trougaonom obliku na poziciji pivota su* $c_{1,1}, \dots, c_{k,k}$ *i svi su različiti od* 0

Analiza trougaonog oblika

$$
\begin{array}{rcl}
c_{1,1}y_1 + c_{1,2}y_2 + c_{1,3}y_3 + \ldots + c_{1,k}y_k + \ldots + c_{1,n}y_n & = & d_1 \\
c_{2,2}y_2 + c_{2,3}y_3 + \ldots + c_{2,k}y_k + \ldots + c_{2,n}y_n & = & d_2 \\
\ddots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & & \vdots \\
c_{k,k}y_k + \ldots + c_{k,n}y_n & = & d_k \\
0 & = & \lambda_{k+1} \\
& \vdots & \\
0 & = & \lambda_m
\end{array}
$$

- Na glavnoj dijagonali imamo $c_{1,1}, \ldots, c_{k,k}$ (nenula) pivote
- Ako je $\lambda_{k+1} \neq 0 \vee \ldots \vee \lambda_m \neq 0$ sistem nema rešenja - kontradiktoran
- Ako je $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_m = 0$- sistem ima rešenja - saglasan, i tada:
  - ako je $k = n$ sistem je određen (Sledeći slajd)
  - ako je $k < n$ sistem je neodređen sa stepenom neodređenosti $n - k$ (Sledeći slajd)

Određeni i neodređeni trougaoni sistemi

- Određen (podvučeni su pivoti)

$$\begin{array}{rcl} \underline{c_{1,1}}y_1 + c_{1,2}y_2 + c_{1,3}y_3 + \ldots + c_{1,n}y_n & = & d_1 \\ \underline{c_{2,2}}y_2 + c_{2,3}y_3 + \ldots + c_{2,n}y_n & = & d_2 \\ \ddots \quad \vdots & & \vdots \\ \underline{c_{n,n}}y_n & = & d_n \end{array}$$

  Zamenom unazad dobijamo redom $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_1$

- $n-k$-tostruko neodređen (podvučeni su pivoti)

$$\begin{array}{rcl} \underline{c_{1,1}}y_1 + c_{1,2}y_2 + c_{1,3}y_3 + \ldots + c_{1,k}y_k & = & d_1 - c_{1,k+1}y_{k+1} - \ldots - c_{1,n}y_n \\ \underline{c_{2,2}}y_2 + c_{2,3}y_3 + \ldots + c_{2,k}y_k & = & d_2 - c_{2,k+1}y_{k+1} - \ldots - c_{2,n}y_n \\ \ddots \quad \vdots & & \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \underline{c_{k,k}}y_k & = & d_k - c_{k,k+1}y_{k+1} - \ldots - c_{k,n}y_n \end{array}$$

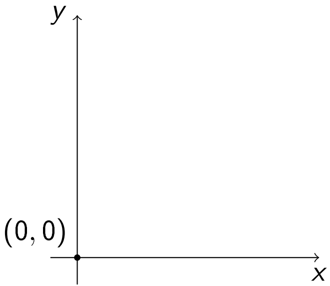
  Iz poslednje jednačine y_k izrazimo preko $y_{k+1}, \ldots, y_n$, pa zamenom unazad i $y_{k-1}, \ldots, y_1$ takođe izrazimo preko promenljivih $y_{k+1}, \ldots, y_n$

Analiza sistema linearnih jednačina

Rešavanje po vrstama: prave i ravni

Sistem jednačina $\begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$ zapravo čine jednačine dve prave $y = 2x$ i $y = -x + 3$ i samo treba da nađemo njihov presek.

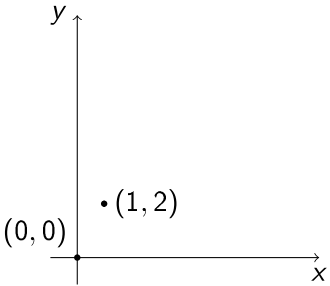
Prava $y = 2x$ prolazi kroz tačke $(0, 0)$ i $(1, 2)$.



Rešavanje po vrstama: prave i ravni

Sistem jednačina $\begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$ zapravo čine jednačine dve prave $y = 2x$ i $y = -x + 3$ i samo treba da nađemo njihov presek.

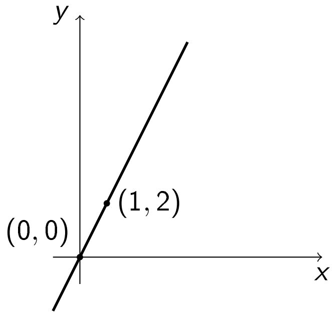
Prava $y = 2x$ prolazi kroz tačke $(0, 0)$ i $(1, 2)$.



Rešavanje po vrstama: prave i ravni

Sistem jednačina $\begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$ zapravo čine jednačine dve prave $y = 2x$ i $y = -x + 3$ i samo treba da nađemo njihov presek.

Prava $y = 2x$ prolazi kroz tačke $(0, 0)$ i $(1, 2)$.



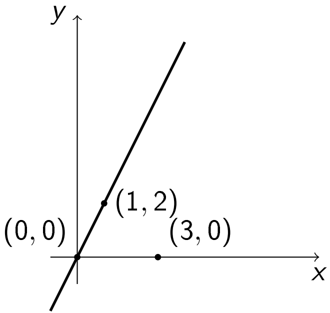
Rešavanje po vrstama: prave i ravni

Sistem jednačina $\begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$ zapravo čine jednačine dve prave $y = 2x$ i $y = -x + 3$ i samo treba da nađemo njihov presek.

Prava $y = 2x$ prolazi kroz tačke $(0, 0)$ i $(1, 2)$.

Prava $y = -x + 3$ prolazi kroz tačke $(3, 0)$ i $(1, 2)$,

pa je rešenje sistema $(x, y) = (1, 2)$.



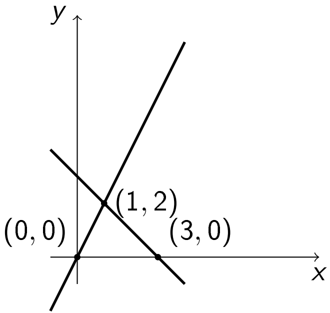
Rešavanje po vrstama: prave i ravni

Sistem jednačina $\begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$ zapravo čine jednačine dve prave $y = 2x$ i $y = -x + 3$ i samo treba da nađemo njihov presek.

Prava $y = 2x$ prolazi kroz tačke $(0,0)$ i $(1,2)$.

Prava $y = -x + 3$ prolazi kroz tačke $(3,0)$ i $(1,2)$,

pa je rešenje sistema $(x,y) = (1,2)$.

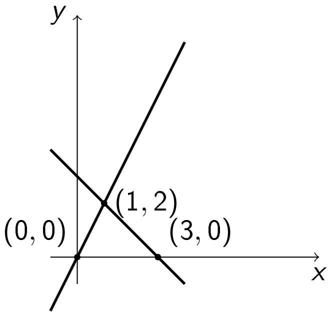


Rešavanje po vrstama: prave i ravni

Sistem jednačina $\begin{array}{rcrcl} -2x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$ zapravo čine jednačine dve prave $y = 2x$ i $y = -x + 3$ i samo treba da nađemo njihov presek.

Prava $y = 2x$ prolazi kroz tačke $(0,0)$ i $(1,2)$.
Prava $y = -x + 3$ prolazi kroz tačke $(3,0)$ i $(1,2)$,
pa je rešenje sistema $(x, y) = (1, 2)$.

- Šta ako se prave određene prvom i drugom jednačinom poklapaju ili su paralelne i različite? (Rešenje je cela prava ili nema rešenja)
- Šta ako su jednačine sa 3 ili više promenljvih? Sa 3 promenljive dobijamo jednačine ravni, ali crtanje postaje dosta teško. Sa 4 ili više ne znamo kako da crtamo. Zato ovaj metod nije praktičan - ali je važno imati ovu geometrijsku sliku!

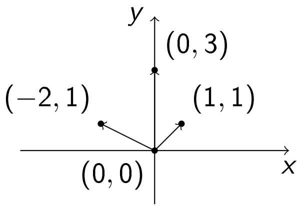


Rešavanje po kolonama: vektori

Za vektor (a, b) pisaćemo i $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Sada sistem jednačina $\begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$ može da se posmatra u obliku

$$x \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tražimo linearnu kombinaciju vektora $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ koja daje vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, ako takva postoji?



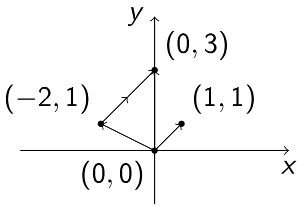
Rešavanje po kolonama: vektori

Za vektor (a, b) pisaćemo i $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$. Sada sistem jednačina $\begin{matrix} -2x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \end{matrix}$ može da se posmatra u obliku

$$x \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Tražimo linearnu kombinaciju vektora $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ koja daje vektor $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, ako takva postoji? Imamo

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$



Pitanje: Šta se sve može dobiti kao linearna kombinacija vektora $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$? Šta ako su vektori paralelni?

Šta smo danas radili

- Šta je linearna algebra
- Sistemi linearnih jednačina:
    - Priroda sistema: određen, neodređen, nerešiv
    - Gausov metod eliminacije
    - Trougaoni oblik
    - Vektori i analitička geometrija u sistemima