Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 17

Na prethodnom času

- Šta je linearna algebra
- Sistemi linearnih jednačina:
  - Priroda sistema: određen, neodređen, nerešiv
  - Gausov metod eliminacije
  - Trougaoni oblik
  - Vektori i analitička geometrija u sistemima

Determinante iz srednje škole

Primer determinante: format 2×2

Napomena

Determinanta je vrednost koju dodeljujemo kvadratnom sistemu linearnih jednačina ili kvadratnoj matrici, a koja nam govori neke njihove bitne osobine.

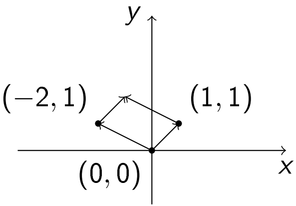
Primer

- *Za linearnu jednačinu $ax = b$ determinanta sistema je a*
- *Za sistem jednačina nad poljem $\mathbb{R}$*

$$\mathcal{S}: \begin{array}{rcrcr} -2x & + & y & = & 0 \\ x & + & y & = & 3 \end{array}$$

Determinanta je

$$\det(S) = \begin{vmatrix} \underline{-2} & 1 \\ 1 & \underline{1} \end{vmatrix} = (\underline{-2}) \cdot \underline{1} - 1 \cdot 1 = -3$$



$|\det(S)| = 3$ - površina paralelograma nad vektorima $(-2, 1)$ i $(1, 1)$

Primer determinante: format 3×3

Za sistem linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$

$$\mathcal{S}: \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

Determinanta sistema je

$$\det(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Primer determinante: format 3×3

Za sistem linearnih jednačina nad poljem $\mathbb{R}$

$$\mathcal{S}: \begin{array}{rcrcrcl} & & y & + & z & = & 2 \\ -x & + & y & & & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

Determinanta sistema je (Sarusovo pravilo - srednja škola)

$$\det(S) = \left| \begin{array}{rrr|rr} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right| = 0 + 0 + 2 - (2 + 0 - 1) = 1$$

$|\det(S)| = 1$ je zapremina paralelopipeda konstruisanog nad vektorima $(0, -1, 2), (1, 1, -2), (1, 0, 1)$ - kasnije ćemo raditi mešoviti proizvod vektora

Determinante generalno: format 3×3

Proizvoljna determinanta formata 3×3 nad poljem $\mathbb{R}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Determinante generalno: format 3×3

Proizvoljna determinanta formata 3×3 nad poljem $\mathbb{R}$ (Sarusovo pravilo)

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Primetimo:

- Svaki sabirak je proizvod 3 elementa - **svi iz različitih vrsta i kolona**. Dalje, u svakom sabirku prvi indeksi su redom 123, a drugi indeksi su 123, 231, 312, 321, 132 i 213 - **sve permutacije** od 123
- Determinanta je jednaka sa $a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$, tj. sa

$$a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Definicija i osobine determinanti

Permutacije, inverzije i parnost

Definicija (Permutacije)

Permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ *je svaka bijekcija* $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$. *Skup svih permutacija skupa* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *označavamo sa* S_n. *Struktura* $(S_n, \circ)$ *je* **grupa permutacija**. *Imamo da je* $|S_n| = n!$.

Primer

Za permutaciju skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ *datu sa* $\sigma = \binom{1234}{3241}$, *pišemo i* $\sigma = 3241$ *ili* $\sigma = [\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \sigma(4)] = [3, 2, 4, 1]$.

Definicija (Inverzija permutacije)

Ako je $i < j$ *i* $\sigma(i) > \sigma(j)$, *tada se par* $(\sigma(i), \sigma(j))$ *naziva inverzija permutacije* σ. *Broj svih inverzija permutacije* σ *označamo sa* $Inv\,\sigma$. *Kažemo da je permutacija parna ako je* $(-1)^{Inv\,\sigma} = 1$, *a neparna ako je* $(-1)^{Inv\,\sigma} = -1$.

Primer

Za permutaciju $\sigma = 3241$ *imamo* $Inv\,\sigma = 4$. *Zato je* $(-1)^{Inv\,\sigma} = 1$, *tj.* σ *je parna.*

Kvadratni sistemi linearnih jednačina, matrice i definicija determinante

Kvadratni sistem linearnih jednačina nad poljem F i njegova matrica reda n dati su ispod. Inače, matrice su pravougaone šeme (tabele) elemenata nekog polja - kasnije ćemo raditi matrice detaljno. Skup svih kvadratnih matrica reda n (nad poljem F) označavamo sa $\mathcal{M}_{nn}$.

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \dots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \dots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Definicija (Determinante)

Determinanta je funkcija koja skup svih kvadratnih matrica $\mathcal{M}_{nn}$ nad poljem F preslikava u polje F, tj. $\det : \mathcal{M}_{nn} \to F$, *koja je za $A = [a_{ij}]_{nn} \in \mathcal{M}_{nn}$ definisana sa*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Transponovana matrica i njena determinanta

Definicija (Transponovana matrica)

Za matricu $A = [a_{ij}]_{nn}$ njoj transponovana matrica je $A^\top = [b_{ij}]_{nn}$, gde je $b_{ij} = a_{ji}$, tj. vrste matrice A jesu kolone matrice $A^\top$.

Primer

Matrica A i njena transponovana matrica $A^\top$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

Teorema

Determinanta kvadratne matrice A i determinanta njoj transponovane matrice su jednake, tj. $\det(A) = \det(A^\top)$.

Posledica

Svaku osobinu determinanti koju pokažemo da važi po vrstama važi i po kolonama.

Zamena mesta vrstama (kolonama)

Teorema

Ako je kvadratna matrica B dobijena zamenom mesta dvema vrstama u matrici A tada je $\det(B) = -\det(A)$. *(Isto važi i ako zamenimo mesta dvema kolonama.)*

Primer

Možemo proveriti da je

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Jednake vrste (kolone). Nula vrsta (kolona)

Teorema

Ako su dve vrste (kolone) u kvadratnoj matrici A jednake, tada je $\det(A) = 0$.

Dokaz

Ako su u matrici A vrste i-ta i j-ta jednake, i ako je matrica B dobijena od matrice A zamnom baš tih vrsta ($B = A$), tada po prethodnoj teoremi imamo $\det(B) = -\det(A)$, *tj.* $2\det(A) = 0$, *odakle je* $\det(A) = 0$ *(ako polje nad kojim posmatramo determinantu nije karakteristike 2). Teorema važi i nad poljima koja su karakteristike 2.*

Teorema

Ako su svi elementi jedne vrste (kolone) kvadratne matrice A jednaki 0, tada je $\det(A) = 0$.

Dokaz

Ako su elementi i-te vrste jednaki 0, tj. $a_{i\sigma(i)} = 0$, *tada je*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0$$

Množenje determinante skalarom

Teorema

Ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A množenjem njene i-te vrste (kolone) skalarom λ, tada je $\det(B) = \lambda\det(A)$.

Dokaz

$$\begin{aligned}\det(B) &= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \dots \lambda a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} \\ &= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \lambda \det(A)\end{aligned}$$

Primer

$$5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 25 & 6 \\ 7 & 40 & 9 \end{vmatrix}$$

Proporcionalne vrste (kolone)

Teorema

Ako su i-ta i j-ta (za $i \neq j$) vrsta (kolona) matrice A proporcionalne, tj. linearno zavisne, tada je $\det(A) = 0$.

Dokaz

Pošto su i-ta i j-ta vrsta proporcionalne imamo $a_{i\sigma(i)} = \lambda a_{j\sigma(j)}$, odakle sledi

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots \lambda a_{j\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\
&= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)} = 0
\end{aligned}$$

gde smo koristili jednu od prethodnih teorema (ako su dve vrste jednake determinanta je jednaka 0*).*

Svođenje na trougaoni oblik (1/4)

Teorema

Ako je kvadratna matrica B dobijena od matrice A tako što se na j-tu vrstu (kolonu) doda i-ta vrsta (kolona) pomnožena skalarom λ, tada je $\det(B) = \det(A)$.

Dokaz

$$\det(B) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots (a_{j\sigma(j)} + \lambda a_{i\sigma(i)}) \dots a_{n\sigma(n)} =$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{j\sigma(j)} \dots a_{n\sigma(n)} +$$

$$\lambda \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{i\sigma(i)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det(A) + \lambda \cdot 0$$

Primer

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4-4 & 5-8 & 6-12 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Svođenje na trougaoni oblik (2/4)

Podsećanje: Ekvivalentne transformacije ne menjaju skup rešenja sistema linearnih jednačina.

$$\mathcal{S}: \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

$$\det(S) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- Zamena mesta jednačinama
- Zamena mesta promenljivama
- Dodavanje jednačine prethodno pomnožene sa λ drugoj jednačini

- Zamena mesta vrstama $\det(B) = -\det(A)$
- Zamena mesta kolonama $\det(B) = -\det(A)$
- Dodavanje vrste prethodno pomnožene sa λ drugoj vrsti $\det(B) = \det(A)$

Svođenje na trougaoni oblik (3/4)

Teorema

Determinanta kvadratne **gornje trougaone matrice** *(kod koje su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli) jednaka je proizvodu elemenata sa glavne dijagonale, tj.*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

Dokaz

Jedini sabirak u $\det(A)$ *različit od* 0 *iz prve kolone sadrži* a_{11}, *iz druge* a_{22} *(jer je iz prve vrste već izabran* a_{11}, *a ostali iz druge kolone su* 0*), itd. - primeti* $\sigma(i) = i$.

Napomena

Koristeći Gausov postupak eliminacije svaku determinantu $\det(A)$ *možemo transformisati u determinantu u trougaonom obliku* $\det(B)$, *pri čemu će važiti* $\det(A) = \pm\det(B) = \pm b_{11}b_{22}\dots b_{nn}$.

Svođenje na trougaoni oblik (3/4)

Teorema

Kvadratni sistem linearnih jednačina je određen akko je determinanta sistema različita od 0*.*

Dokaz

Sistem linearnih jednačina $\mathcal{S}$ *se Gausovim postupkom eliminacije može svesti na trougaoni oblik* $\mathcal{S}_1$*, i da pri tome ne koristimo transformaciju množenja jednačine brojem. Važi da je* $\mathcal{S}$ *određen akko su svi koeficijenti na glavnoj dijagonali u sistemu* $\mathcal{S}_1$ *različiti od* 0 *(pivoti). Determinanta sistema* $\det(S)$ *se može istim postupkom svesti na* $\det(S_1)$ *- koja je gornja trougaona, i važi* $\det(S) = \pm\det(S_1) = \pm b_{11} b_{22} \ldots b_{nn}$*, gde su* $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$ *elementi sa glavne dijagonale determinante od* $\mathcal{S}_1$*. Tj. važi* $\det(S) \neq 0$ *akko su svi pivoti različiti od* 0 *akko je sistem* $\mathcal{S}$ *određen.*

Primer

Levo je svođenje sistema na trougaoni oblik, a desno svođenje determinante sistema na trougaoni oblik.

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
 & & y & + & z & = & 2 \\
-x & + & y & & & = & 0 \\
2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\
\hline
-x & + & y & & & = & 0 \\
 & & y & + & z & = & 2 \\
2x & - & 2y & + & z & = & 3 \\
\hline
\boxed{-1}x & & & + & y & = & 0 \\
 & & \boxed{1}y & + & z & = & 2 \\
 & & & + & \boxed{1}z & = & 3
\end{array}
$$

$$
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} =
$$

$$
-\begin{vmatrix} \boxed{-1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = 1
$$

Determinanta homogenog sistema linearnih jednačina

Podsećanje: Homogen sitem linearnih jednačina ne može biti kontradiktoran - uvek ima bar jedno (trivijalno) rešenje $x_1 = \ldots = x_n = 0$.

$$\mathcal{S}: \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \ldots & + & a_{nn}x_n & = & 0 \end{array} \qquad \det(\mathcal{S}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Teorema

Homogeni kvadratni sistem linearnih jednačina je neodređen (ima netrivijalna rešenja) akko je determinanta sistema jednaka nuli.

Dokaz

Iz prethodne teoreme imamo da je $\mathcal{S}$ određen akko je $\det(\mathcal{S}) \neq 0$, odnosno sistem je neodređen ili kontradiktoran akko je $\det(\mathcal{S}) = 0$. Pošto homogen sistem ne može biti kontradiktoran imamo da je neodređen akko je $\det(\mathcal{S}) = 0$.

Razvoj determinante po vrsti ili koloni

Laplasov razvoj determinante

Za determinante reda 3 smo videli da se mogu izračunati preko determinanti reda 2:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Ovo važi za determinante proizvoljnog reda n i razvoj može biti po bilo kojoj vrsti ili koloni. Pri razvoju "poddeterminante" zovemo **minori**, a minor sa odgovarajućim predznakom **kofaktor**.

Definicija (Minor i kofaktor)

Neka je $A = [a_{ij}]_{nn}$ kvadratna matrica. Minor M_{ij} elementa a_{ij} u matrici A je determinanta koja se dobija kada se iz $\det(A)$ izostavi i-ta vrsta i j-ta kolona. Kofaktor elementa a_{ij} u matrici A je $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Primer

Za determinantu datu gore na slajdu, minor elementa a_{11} je dat kao prvi u razvoju i on je jednak kofaktoru jer se a_{11} nalazi na "parnom" mestu $(1 + 1 = 2$ je parno).

Razvoj po prvoj vrsti (koloni)

Lema

Ako je kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$, tada je

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$$

Dokaz

Neka je σ' restrikcija funkcije σ na domenu $\{2, \ldots, n\}$. Primetimo da ako je $\sigma(1) = k$, tada je $Inv\,\sigma = k - 1 + Inv\,\sigma'$ i da je $(-1)^k = (-1)^{k+2}$. Zato imamo

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma(1)=1} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{11}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)} + \ldots + \sum_{\sigma(1)=n} (-1)^{Inv\,\sigma} a_{1n}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= a_{11} \sum_{\sigma(1)=1} (-1)^{0+Inv\,\sigma'} a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)} + \ldots + a_{1n} \sum_{\sigma(1)=n} (-1)^{(n-1)+Inv\,\sigma'} a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)} \\
&= a_{11}(-1)^0 M_{11} + \ldots + a_{1n}(-1)^{(n-1)} M_{1n} = a_{11}A_{11} + \ldots + a_{1n}A_{1n}
\end{aligned}$$

Razvoj po i-toj vrsti (koloni)

Teorema

Ako je kvadratna matrica $A = [a_{ij}]_{nn}$, tada je $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ jednako sa $\det(A)$ za $i = k$, a jednako je 0 za $i \neq k$.

Dokaz

$i = k$: *treba pokazati* $\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$, *što se radi indukcijom po i.*

- *Baza: $i = 1$ pokazano u prethodoj lemi*
- *Hipoteza: Neka je tvrđenje tačno za i*
- *Korak: Za $i + i$: neka je matrica B dobijena od matrice A zamenom i. i $i + 1$. vrste. Tada primenom indukcijske hipoteze na B dobijamo* $\det(A) = -\det(B) = -b_{i1}B_{i1} - b_{i2}B_{i2} - \ldots - b_{in}B_{in} = a_{i+1,1}A_{i+1,1} + a_{i+1,2}A_{i+1,2} + \ldots + a_{i+1,n}A_{i+1,n}$.

$i \neq k$: *Neka je matrica C dobijena od matrice A tako što je k-ta vrsta zamenjena i-tom vrstom. Matrica C ima dve jednake vrste (i-tu i k-tu), pa je* $\det(C) = 0$. *Sa druge strane, razvojem C po k-toj vrsti imamo* $\det(C) = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \ldots + a_{in}A_{kn}$ *(gde je $a_{ij} = a_{kj}$ jer su k-ta i i-ta vrsta u C jednake).*

Primer

Razvojem po trećoj koloni, a zatim po prvoj vrsti dobijamo:

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 7 - 6 = 1
\end{aligned}
$$

Determinanta proizvoda matrica

Kasnije čemo detaljno matrice, množenje matrice i skalara i množenje matrica, i tada ćemo koristiti sledeće dve teoreme.

Teorema (Bine-Koši)

Ako su A i B kvadratne matrice istog reda (i nad istim poljem F) tada je $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Teorema

Ako je A kvadratna matrica reda n nad poljem F i $\lambda \in F$, tada je $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Poslednja teorema je direktna posledica množenja skalara i determinante i množenja skalara i matrice.

Šta smo danas radili

- Determinante reda 2 i 3 iz srednje škole
- Definicija determinante
- Izračunavanje determinante svođenjem na trougaoni oblik
- Kvadratni sistemi linearnih jednačina i njihove determinante
- Izračunavanje determinante razvojem to vrsti ili koloni