Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 21

Na prethodnom času

- Dužina duži i deoba duži
- Jednačina prave
- Jednačina ravni
- Prodor prave kroz ravan
- Normalne i kose projekcije
- Rastojanje tačke od prave i ravni

Vektorski prostori

Vektorski prostori - generalizacija

- Do sad smo pokazali da za slobodne vektore važi
  1. $(V, +)$ je Abelova grupa
  2. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
  3. $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
  4. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$
  5. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
- Međutim, isto važi i ako umesto V posmatramo skup $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^2$ ili skup svih polinoma $\mathbb{R}[t]$. Zato ćemo generalizovati na osnovu ovih struktura da dobijemo opštu strukturu **vektorskih prostora**.
- Ono što nam je ključno za vektorske prostore su operacije **sabiranje vektora** i **množenje vektora i skalara**, a osnovne osobine koje bismo voleli da imamo su ovih 5 navedenih gore.
- Vektore ćemo ovde (zbog kraćeg zapisa) označavati slovima abecede (bez strelica) $a, b, c, \ldots$, a skalare slovima grčkog alfabeta $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Vektorski prostori - definicija

Definicija (Vektorski prostori)

Neka je V neprazan skup, F polje, i operacije $+ : V^2 \to V$ i $\cdot : F \times V \to V$. Kažemo da je $(V, F, +, \cdot)$ vektorski prostor nad poljem F, ako za sve $a, b \in V$ i $\alpha, \beta \in F$, važe aksiome

1. $(V, +)$ *je Abelova grupa*
2. $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
3. $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
4. $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$
5. $1 \cdot a = a$

Napomena

Primeti da u definiciji imamo 4 operacije: sabiranje i množenje skalara (iz polja F), sabiranje vektora i množenje vektora i skalara.

Primeri

1. Skup slobodnih vektora nad poljem realnih brojeva $(V, \mathbb{R}, +, \cdot)$.
2. Uređene n-torke realnih brojeva nad poljem realnih brojeva $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gde su operacije definisane sa

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) + (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_n + \beta_n)$$
$$\lambda \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (\lambda\alpha_1, \ldots, \lambda\alpha_n)$$

3. Skup svih polinoma stepena ne većeg od n nad poljem nad poljem F, tj. $(\mathbb{F}_n[t], F, +, \cdot)$, gde su operacije sabiranje polinoma i množenje skalara i polinoma.
4. Skup svih funkcija nad poljem realnih brojeva $(\{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, gde su za sve funkcije f i g i skalare $\alpha \in \mathbb{R}$ operacije definisane sa

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \;\text{ i }\; (\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$$

5. Mnogi drugi važni vektorski prostori: neprekidnih funkcija, diferencijabilnih funkcija, rešenja homogenih linearnih diferencijalnih jednačina, Hilbertovi, Banahovi, itd.

Još primera

Zaokruži slovo ispred vektorskih prostora:

(a) $(\{\alpha\vec{i} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(b) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(c) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(d) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x = y = z\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(e) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(f) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 1\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(g) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(h) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

Još primera

Zaokruži slovo ispred vektorskih prostora:

(a) $(\{\alpha\vec{i} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(b) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(c) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \,|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(d) $(\{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x = y = z\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(e) $(\{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(f) $(\{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 1\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(g) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(h) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

Još primera

Zaokruži slovo ispred vektorskih prostora:

(a) $(\{\alpha\vec{i} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(b) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(c) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(d) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x = y = z\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(e) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(f) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 1\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(g) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(h) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

Još primera

Zaokruži slovo ispred vektorskih prostora:

(a) $(\{\alpha\vec{i} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(b) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(c) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \,|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(d) $(\{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x = y = z\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(e) $(\{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(f) $(\{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 1\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(g) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(h) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

Još primera

Zaokruži slovo ispred vektorskih prostora:

(a) $(\{\alpha\vec{i} \,|\, \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(b) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \,|\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(c) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \,|\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(d) $(\{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x = y = z\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(e) $(\{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(f) $(\{(x, y, z) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 1\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(g) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(h) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

Još primera

Zaokruži slovo ispred vektorskih prostora:

(a) $(\{\alpha\vec{i} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(b) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(c) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(d) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x = y = z\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(e) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(f) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x + y + z = 1\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(g) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(h) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

Još primera

Zaokruži slovo ispred vektorskih prostora:

(a) $(\{\alpha\vec{i} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(b) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(c) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(d) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \land x = y = z\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(e) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \land x + y + z = 0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(f) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \land x + y + z = 1\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(g) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(h) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

Još primera

Zaokruži slovo ispred vektorskih prostora:

(a) $(\{\alpha\vec{i} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(b) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(c) $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(d) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \land x = y = z\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(e) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \land x + y + z = 0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(f) $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \land x + y + z = 1\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(g) $(\mathbb{C}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

(h) $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, +, \cdot)$

Osobine

Teorema

U svakom vektorskom prostoru $(V, F, +, \cdot)$, *za svaki vektor* $a \in V$ *i svaki skalar* $\alpha \in F$ *važi*

1. $\alpha \cdot 0 = 0$
2. $0 \cdot a = 0$
3. $\alpha \cdot a = 0 \;\Leftrightarrow\; (\alpha = 0 \vee a = 0)$
4. $(-\alpha) \cdot a = \alpha \cdot (-a) = -(\alpha \cdot a)$
5. $(-\alpha) \cdot (-a) = \alpha \cdot a$
6. $-a = (-1)a$

Dokaz teoreme

1. $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot 0 + 0 = \alpha \cdot 0 + (\alpha \cdot 0 - (\alpha \cdot 0)) = (\alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0) - (\alpha \cdot 0) =$
$\alpha \cdot (0 + 0) - (\alpha \cdot 0) = \alpha \cdot 0 - (\alpha \cdot 0) = 0$
2. Slično.
3. Ako je $\alpha = 0$ ili $a = 0$ iz tvrđenja pod 1. i 2. sledi da je $\alpha \cdot a = 0$. Predpostavimo sada da je $\alpha \cdot a = 0$. Ako je $\alpha = 0$ dokaz je gotov, zato pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$. Pošto je F polje, znamo da za $\alpha \neq 0$ postoji inverzni element α^{-1} (u odnosu na $\cdot$ drugu operaciju iz polja). Sada jednakost $\alpha \cdot a = 0$ pomnožimo sa α^{-1} i dobijamo
$$\alpha^{-1}(\alpha \cdot a) = \alpha^{-1} \cdot 0 \;\Leftrightarrow\; (\alpha^{-1}\alpha) \cdot a = 0 \Leftrightarrow 1 \cdot a = 0 \Leftrightarrow \; a = 0$$
4. Dokazaćemo samo deo $(-\alpha) \cdot a = -(\alpha \cdot a)$, drugi deo je analogan.
$(-\alpha) \cdot a = (-\alpha) \cdot a + 0 = (-\alpha) \cdot a + (\alpha \cdot a - (\alpha \cdot a)) =$
$((-\alpha) \cdot a + \alpha \cdot a) - (\alpha \cdot a) = (-\alpha + \alpha) \cdot a - (\alpha \cdot a) = 0 \cdot a - (\alpha \cdot a) = -(\alpha \cdot a)$
5. $(-\alpha) \cdot (-a) = -(\alpha \cdot (-a)) = -(-(\alpha \cdot a)) = \alpha \cdot a$
6. $(-1) \cdot a = -(1 \cdot a) = -a$

Vektorski potprostori. Lineali

Vektorski potprostor

Podsećanje: Kod svih algebarskih struktura do sada smo posmatrali podstrukture i homomorfizme.

Definicija (Potprostor)

Neka je $(V, F, +, \cdot)$ vektorski prostor i neka je $\emptyset \neq W \subseteq V$. Ako je $(W, F, +, \cdot)$ vektorski prostor, gde su $+$ i $\cdot$ restrikcije operacija iz V, tada kažemo da je W potprostor od V.

Primer

- *Za svaki vektorski prostor V imamo dva trivijalna potprostora: $(\{0\}, F, +, \cdot)$ i $(V, F, +, \cdot)$.*
- *Vektorski prostor $(\{\alpha\vec{i} \mid \alpha, \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ je potprostor od $(\{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \mid \alpha, \beta, \in \mathbb{R}\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, a oba su potprostori prostora slobodnih vektora.*
- *Vektorski prostor $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge x = y = z\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$ je potprostor od $(\{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \wedge 2x - y - z = 0\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, a oba su potprostori od $\mathbb{R}^3$.*

Potprostori - kako ih pronaći?

Podsećanje: Da bi nešto bilo pogrupa grupe mora biti zatvoren za operaciju i sadržati sve inverzne elemente.

Teorema

Neka je $\emptyset \neq W \subseteq V$ i neka je V vektorski prostor nad poljem F. W je potprostor prostora V akko za svaka dva vektora $a, b \in W$ i svaki skalar $\alpha \in F$ važi

$$a + b \in W \quad i \quad \alpha a \in W$$

Dokaz

$(\Rightarrow)$: *Ako je W potprostor od V tada $a + b \in W$ i $\alpha a \in W$ važi.*

$(\Leftarrow)$: *Sve aksiome vektorskog prostora, sem postojanje neutralnog i inverznih elemenata u $(V, +)$, su date sa $\forall$ kvantifikatorom, pa pošto važe na V, onda važe i na svakom njegovom podskupu na kom su zatvorene. Treba još pokazati postojanje neutralnog elementa u $(W, +)$ - za $a \in W$ i $\alpha = 0$ dobijamo $\alpha a = 0 \cdot a = 0 \in W$, i postojanje inverznih elemenata - za $a \in W$ i $\alpha = -1$ imamo $\alpha a = (-1)a = -a \in W$.*

Prethodna teorema u jednom izrazu

Teorema

Neka je $\emptyset \neq W \subseteq V$ *i neka je* V *vektorski prostor nad poljem* F. W *je potprostor prostora* V *akko za svaka dva vektora* $a, b \in W$ *i sve skalare* $\alpha, \beta \in F$ *važi*

$$\alpha a + \beta b \in W$$

Dokaz

Treba pokazati da je $a + b \in W$ *i* $\alpha a \in W$ *ekvivalentno sa* $\alpha a + \beta b \in W$.

$(\Rightarrow)$: *Neka za sve* $a, b \in W$ *i* $\alpha \in F$ *važi* $a + b \in W$ *i* $\alpha a \in W$. *Tada za* $\beta \in F$ *imamo* $\alpha a \in W$ *i* $\beta b \in W$, *odakle je* $\alpha a + \beta b \in W$.

$(\Leftarrow)$: *Neka za sve* $a, b \in W$ *i* $\alpha, \beta \in F$ *važi* $\alpha a + \beta b \in W$. *Tada za* $\alpha = \beta = 1$ *dobijamo* $a + b \in W$, *a za* $\beta = 0$ *dobijamo* $\alpha a \in W$.

Napomena

Teorema zapravo kaže da su vektorski (pot)prostori zatvoreni za sve linearne kombinacije svojih vektora. Detalji na sledećem slajdu.

Linearne kombinacije. Lineali

Definicija (Linearna kombinacija)

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Linearna kombinacija n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ iz V je vektor $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$, za proizvoljne skalare $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F$, pri čemu je $n \in \mathbb{N}$.

Definicija (Lineal)

Skup svih linearnih kombinacija n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, u vektorskom prostoru V nad poljem F, zove se lineal n-torke $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i označava sa

$$L(a_1, a_2, \ldots, a_n) = <a_1, a_2, \ldots, a_n> = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \,|\, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in F\}$$

Kažemo da vektori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ generišu lineal $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Napomena

U vektorskom prostoru slobodnih vektora V imamo $L(\vec{i}, \vec{j}) = \{\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} \,|\, \alpha, \beta, \in \mathbb{R}\}$, $L(\vec{i}) = \{\alpha\vec{i} \,|\, \alpha, \in \mathbb{R}\}$, $L(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = V$, ali i $L(\vec{i}, \vec{j}) = L(\vec{i}, \vec{j}, \vec{0}) = L(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$.

Lineali su potprostori

Teorema

Lineal n-torke vektora $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ iz V je vektorski potprostor prostora V (tj. vektori $a_1, a_2, \ldots, a_n$ generišu potprostor $L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$).

Dokaz

Neka je V vektorski prostor nad poljem F. Samo treba pokazati da za svaka dva vektora $a, b \in L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i svaka dva skalara $\alpha, \beta \in F$ važi $\alpha a + \beta b \in L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Iz $a, b \in L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ sledi

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n \quad i \quad b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \ldots + \beta_n a_n$$

odakle dobijamo

$$\alpha a + \beta b = (\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)a_1 + (\alpha\alpha_2 + \beta\beta_2)a_2 + \ldots + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)a_n \in L(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Potprostori u $\mathbb{R}^n$

Teorema

Svaki potprostor od $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}, +, \cdot)$ *jeste vektorski prostor skupa rešenja nekog homogenog sistema linearnih jednačina sa n promenljivih nad poljem* $\mathbb{R}$.

Primer

Za homogeni sistem linearnih jednačina $x + y = 0$ *i* $-2x - 2y = 0$, *skup rešenja je* $\mathcal{R} = \{(x, -x) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -1) \,|\, x \in \mathbb{R}\} = L((1, -1))$, *tj. skup tačaka prave* $y = -x$ *(koji je potprostor prostora* $\mathbb{R}^2$*).*

Napomena

Potprostori od $\mathbb{R}^3$ *su jedino:* $(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\{(0, 0, 0)\}, \mathbb{R}, +, \cdot)$, *prave koje prolaze kroz koordinatni početak i ravni koje prolaze kroz koordinatni početak.*

Napomena

Iz $L(\vec{i}, \vec{j}) = L(\vec{i}, \vec{j}, \vec{0}) = L(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$ *sledi da* $(\vec{i}, \vec{j})$ *generišu isti potprostor (xOy ravan) kao i vektori* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{0})$ *i* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{j})$. *Deluje da su* $\vec{0}$ *i* $\vec{i} + \vec{j}$ *"višak" i da nam ne treba više od* $\vec{i}$ *i* $\vec{j}$ *vektora da izgenerišemo xOy ravan. Ovakve minimalne skupove generatora zovemo* **baze** *- ali da bi došli do njih moramo prvo definisati* **linearnu nezavisnost**.

Šta smo danas radili

- Vektorski prostori
- Potprostori
- Lineali