Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 24

Na prethodnom času

- Linearne transformacije
- Osnovni stav linearne algebre
- Izomorfizmi
- Matrice
- Veza između matrica i linearnih tranformacija

Primeri

Rotacije oko O u $\mathbb{R}^2$

Podsećanje: Rotacija oko 0 za ugao θ je
$f(x+iy) = (x+iy)e^{i\theta} = (x+iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$.
Tj. rotacija za θ oko $(0,0)$ u $\mathbb{R}^2$ je data sa $f(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$
Primeti: Ovo je linearna tranfsormacija, čija je matrica data sa

$$M_f = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{i važi} \qquad \det(M_f) = 1$$

Konkretno, rotacija u $\mathbb{R}^2$ oko koordinatnog početka:

- za ugao π je linearna transformacija $f_1(x,y) = (-x,-y)$, a matrica je $M_{f_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$;
- za ugao $\frac{\pi}{2}$ je linearna transformacija $f_2(x,y) = (-y,x)$, a matrica je $M_{f_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Rotacije oko O u $\mathbb{R}^2$

Podsećanje: Rotacija oko 0 za ugao θ je
$f(x+iy) = (x+iy)e^{i\theta} = (x+iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = x\cos\theta - y\sin\theta + i(x\sin\theta + y\cos\theta)$.
Tj. rotacija za θ oko $(0,0)$ u $\mathbb{R}^2$ je data sa $f(x,y) = (x\cos\theta - y\sin\theta, x\sin\theta + y\cos\theta)$
Primeti: Ovo je linearna tranfsormacija, čija je matrica data sa

$$M_f = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{i važi} \qquad \det(M_f) = 1$$

Konkretno, rotacija u $\mathbb{R}^2$ oko koordinatnog početka:

- za ugao π je linearna transformacija $f_1(x,y) = (-x,-y)$, a matrica je $M_{f_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; **Primeti:** $f_1(1,0) = (-1,0)$ i $f_1(0,1) = (0,-1)$
- za ugao $\frac{\pi}{2}$ je linearna transformacija $f_2(x,y) = (-y,x)$, a matrica je $M_{f_2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. **Primeti:** $f_2(1,0) = (0,1)$ i $f_2(0,1) = (-1,0)$

Osne simetrije u $\mathbb{R}^2$ ako osa prolazi kroz O

Podsećanje: Funkcija definisana sa
$f_\theta(z) = \overline{z}e^{i\theta} = (x - iy)(\cos\theta + i\sin\theta) = x\cos\theta + y\sin\theta + i(x\sin\theta - y\cos\theta)$,
određuje osnu simetriju u odnosu na osu koja prolazi kroz 0 i čija jedna poluosa sa pozitivnim delom realne ose gradi ugao od $\frac{\theta}{2}$. Tj. u $\mathbb{R}^2$ imamo da je
$f_\theta(x, y) = (x\cos\theta + y\sin\theta, x\sin\theta - y\cos\theta)$ linearna transformacija, čija je matrica

$$M_{f_\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \qquad \text{i važi} \qquad \det(M_{f_\theta}) = -1$$

Konkretno, osna simetrija u $\mathbb{R}^2$ oko ose koja prolazi kroz koordinatni početak i sa realnom osom gradi:

- ugao $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4}$ (tj. oko prave $y = x$) je linearna tranformacija $f_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = (y, x)$, čija je matrica $M_{f_{\frac{\pi}{2}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- ugao $\frac{\theta}{2} = -\frac{\pi}{4}$ (tj. oko prave $y = -x$) je linearna transformacija $f_{-\frac{\pi}{2}}(x, y) = (-y, -x)$.

Projekcija na pravu koja prolazi kroz O u $\mathbb{R}^3$

Podsećanje: Normalna projekcija tačke M na pravu koja prolazi kroz O, tj. $a : \vec{r} = t\vec{a}$ je data sa $\vec{r}_{M'} = \frac{\vec{r}_M \vec{a}}{\vec{a}\vec{a}}\vec{a}$, tj. ako je $M(x, y, z)$, $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, onda je funkcija koja projektuje sve tačke iz prostora na pravu a data sa

$$P_a(x, y, z) = \frac{a_1 x + a_2 y + a_3 z}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}(a_1, a_2, a_3)$$

Ako uzmemo da je $|\vec{a}| = 1$, tada imamo

$$P_a(x, y, z) = (a_1^2 x + a_2 a_1 y + a_3 a_1 z, a_1 a_2 x + a_2^2 y + a_3 a_2 z, a_1 a_3 x + a_2 a_3 y + a_3^2 z)$$

pa je P_a linearna tranformacija, čija je matrica (koju ćemo označiti isto kao i funkciju)

$$P_a = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_2 a_1 & a_3 a_1 \\ a_1 a_2 & a_2^2 & a_3 a_2 \\ a_1 a_3 & a_2 a_3 & a_3^2 \end{bmatrix} \quad \text{i važi} \quad \det(P_a) = 0 \quad \text{i} \quad P_a^2 = P_a \cdot P_a = P_a$$

Ovakve linearne transformacije zovu se **projektori**. Dati primer!

Projekcije na ravan koja prolazi kroz O u $\mathbb{R}^3$

Podsećanje: Normalna projekcija tačke M na ravan koja prolazi kroz O, tj. $\alpha : \vec{r}\vec{n} = 0$ je data sa $\vec{r}_{M'} = \vec{r}_M - \frac{\vec{r}_M\vec{n}}{\vec{n}\vec{n}}\vec{n}$, tj. ako je $M(x, y, z)$, $\vec{n} = (A, B, C)$, onda je funkcija koja projektuje sve tačke iz prostora na ravan α data sa

$$P_\alpha(x, y, z) = (x, y, z) - \frac{Ax + By + Cz}{A^2 + B^2 + C^2}(A, B, C)$$

Ako uzmemo da je $|\vec{n}| = 1$, tada imamo

$$P_\alpha(x, y, z) = (x, y, z) - (A^2x + BAy + CAz, ABx + B^2y + CBz, ACx + BCy + C^2z)$$

pa je P_α linearna tranformacija, čija je matrica (koju ćemo označiti isto kao i funkciju)

$$P_\alpha = \begin{bmatrix} 1 - A^2 & -BA & -CA \\ -AB & 1 - B^2 & -CB \\ -AC & -BC & 1 - C^2 \end{bmatrix} \quad \text{i važi} \quad \det(P_\alpha) = 0 \quad \text{i} \quad P_\alpha^2 = P_\alpha \cdot P_\alpha = P_\alpha$$

Ponovo **projektor**.

Simetrije u odnosu na pravu koja prolazi kroz O u $\mathbb{R}^3$

Problem: Naći funkciju koja tačke iz prostora preslikava osno simetrično u odnosu na pravu $a : \vec{r} = t\vec{a}$, gde je $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Rešenje: Ako za tačku $M(x, y, z)$ tražimo tačku N simetričnu u odnosu na pravu a, tada je M' projekcija tačke M na pravu a sredina duži MN, tj. važi $\vec{r}_{M'} = \frac{\vec{r}_M + \vec{r}_N}{2}$, odakle dobijamo $\vec{r}_N = 2\vec{r}_{M'} - \vec{r}_M$. Zato je tražena funkcija

$$R_a(x, y, z) = 2P_a(x, y, z) - (x, y, z)$$

Pošto su P_a (projekcija na pravu a) i identička funkcija linearne transformacije, to je i R_a linearna transformacija (jer je linearna kombinacija linearnih transformacija ponovo linearna transformacija), a matrica je

$$R_a = 2P_a - I = \begin{bmatrix} 2a_1^2 - 1 & 2a_2 a_1 & 2a_3 a_1 \\ 2a_1 a_2 & 2a_2^2 - 1 & 2a_3 a_2 \\ 2a_1 a_3 & 2a_2 a_3 & 2a_3^2 - 1 \end{bmatrix} \quad \text{i važi} \quad \det(P_a) \neq 0 \quad \text{i} \quad P_a^2 = P_a \cdot P_a = I$$

Ovakve linearne transformacije zovu se **reflektori**. Dati primer!

Simetrije u odnosu na ravan koja prolazi kroz O u $\mathbb{R}^3$

Probajte sami! (Pratite prethodni slajd)

Napomena

Slično bismo mogli pokazati i da su kose projekcije i kose simetrije u odnosu na prave i ravni koje prolaze kroz O takođe linearne transformacije i naći njihove matrice.

Matrice i linearne tranformacije u drugim bazama i nad drugim poljima

Druge baze

Do sad smo uglavnom vektore predstavljali pomoću standardne baze, npr. u $\mathbb{R}^4$

$$x=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\alpha\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}+\gamma\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}+\delta\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\\\delta\end{bmatrix}$$

Međutim, u praksi nekad ova baza i nije najbolji izbor. Zato postoje mnoge druge baze, ovde dajemo matrice za neke najvažnije (za $\mathbb{C}^4$ i $\mathbb{R}^4$):

Furijeova: Volšova (Hadamarova): Haarova (velvet):

$$F_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&-i&-1&i\\1&-1&1&-1\\1&i&-1&-i\end{bmatrix}\quad W_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\\1&-1&1&-1\end{bmatrix}\quad H_4=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\\sqrt{2}&-\sqrt{2}&0&0\\0&0&\sqrt{2}&-\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

Primeti: Vektori kolona matrica čine ortonormirane baze za $\mathbb{R}^4$ (Furijeova za $\mathbb{C}^4$)

Zadatak

Zadatak: Vektor $x \in \mathbb{R}^4$, koji u Volšovoj bazi ima reprezentaciju $x = (2, -2, 0, 0)_W$ predstaviti u bazi određenoj Haarovom matricom H.

Rešenje: Neka su w_1, w_2, w_3, w_4 vektori kolona Volšove matrice, a h_1, h_2, h_3, h_4 vektori kolona Haarove matrice. Reprezentacije jednog istog vektora x u različitim bazama označavaćemo sa indeksom baze. Sada imamo

$$x_W = (2, -2, 0, 0)_W = 2w_1 - 2w_2 + 0 \cdot w_3 + 0 \cdot w_4 = W_4 \cdot x_W = (0, 0, 2, 2)_I = x_I$$

tj. dobili smo x u standardnoj bazi I - zapravo je W_4 matrica linearne tranformacije koja vektore iz baze W preslikava u vektore standardne baze I. Sa druge strane, imamo

$$x_H = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)_H = \alpha \cdot h_1 + \beta \cdot h_2 + \gamma \cdot h_3 + \delta \cdot h_4 = H_4 \cdot x_H = (0, 0, 2, 2)_I = x_I$$

Dakle, reprezentaciju vektora u bazi H možemo izračunati iz sistema linearnih jednačina $\alpha \cdot h_1 + \beta \cdot h_2 + \gamma \cdot h_3 + \delta \cdot h_4 = (0, 0, 2, 2)_I = x_I$ - ovo je za domaći - ali možda interesantnije je primetiti da smo izveli matričnu jednačinu $W_4 \cdot x_W = x_I = H_4 \cdot x_H$, odakle dobijamo

$$x_H = H_4^{-1} \cdot x_I = H_4^{-1} W_4 \cdot x_W$$

Prelazak iz standardne baze u bazu A

Teorema

Ako je $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, i neka je sa A označena odgovarajuća matrica (čije kolone predstavljaju redom vektori baze A). Tada je matrica prelaska iz standardne baze I u bazu A data sa A^{-1}, tj. $x_A = A^{-1}x_I$.

Napomena

Obrnuto, prelazak iz baze A u standardnu bazu I je jednostavan, jer je $x_I = Ax_A$.

Linearne tranformacije $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ u drugima bazama

Do sada smo naučili da svaka linearna transformacija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ima oblik $f(x, y, z) = (\alpha x + \gamma y + \varphi z, \beta x + \delta y + \psi z)$, tj.

$$\begin{array}{rcl} f(1,0,0) & = & (\alpha, \beta) \\ f(0,1,0) & = & (\gamma, \delta) \\ f(0,0,1) & = & (\varphi, \psi) \end{array}, \quad \text{čija je matrica} \quad M_f = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \varphi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix}$$

Međutim, is Osnovnog stava linearne algebre znamo da je linearna transformacija zadata slikama bilo koje baze (ne mora biti standardna).

Definicija

Ako je $A = (a_1, a_2, a_3)$ baza prostora $\mathbb{R}^3$ i $B = (b_1, b_2)$ baza prostora $\mathbb{R}^2$ i $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linearna transformacija zadata sa

$$\begin{array}{rcccl} f(a_1) & = & \alpha b_1 + \beta b_2 & = & (\alpha, \beta)_B \\ f(a_2) & = & \gamma b_1 + \delta b_2 & = & (\gamma, \delta)_B \\ f(a_3) & = & \varphi b_1 + \psi b_2 & = & (\varphi, \psi)_B \end{array}, \quad \textit{tada je} \quad C = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \varphi \\ \beta & \delta & \psi \end{bmatrix}$$

matrica linearne transformacije f u odnosu na baze A i B.

Šta kaže prethodna definicija i može li sad preko standradne baze?

Prethodna definicija kaže da ako je zadata baza vektorskog prostora originala A i baza vektorskog skupa slika B, tada slike vektora iz baze A predstavljene u bazi B određuju matricu linearne transformacije, tj.

$$f(x_A) = y_B \qquad \Leftrightarrow \qquad C \cdot x_A = y_B$$

Pitanje: Ako su mi poznate baze A i B i matrica linearne tranformacije C, kako da izračunam matricu linearne transformacije M_f u odnosu na I_3 i I_2 standardne baze prostora $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$?

Odgovor: Ako su A i B matrice baza A i B (čije su kolone vektori iz odgovarajućih baza), tada imamo

$$y_{I_2} = By_B = BCx_A = BCA^{-1}x_{I_3}$$

odakle je matrica u standardnim bazama $M_f = BCA^{-1}$.

Napomena: Generalizacija na $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je direktna.

Linearne transformacije $f : F^n \to F^m$ nad drugim poljima?

Pitanje: Do sad smo radili samo sa linearnim transformacijama nad poljem $\mathbb{R}$, šta je sa ostalim poljima?

Odgovor: Sve isto važi i nad ostalim poljima:

Teorema (Oblik linearne transfomacije)

Svaka linearna transfomacija $f : F^n \to F^m$ ima oblik

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{m1}x_1 + \dots + a_{nm}x_n)$$

Primeti da je linearna transformacija određena slikama standardne baze $f(1, 0, \dots, 0) = (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, f(0, \dots, 0, 1) = (a_{1n}, \dots, a_{mn})$ i da je njena matrica

$$M_f = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ostali vektorski prostori i linearne transformacije?

Pitanje: A šta ako vektorski prostor nije F^n? Npr. vektorski prostori kompleksnih brojeva, slobodnih vektora, polinoma?
Odgovor: Ovo smo već "rešili", npr. za slobodni vektor $\vec{x} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k} = (\alpha, \beta, \gamma)$, tj. slobodne vektore smo izjednačavali sa uređenim trojkama realnih brojeva (svaka baza određuje koordinate). Sad ćemo to formalno opisati.

Teorema (Kanonički izomorfizam)

Neka je $(V, F, +, \cdot)$ vektorski prostor i neka je $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jedna baza prostora V. Tada je funkcija $\varphi_A : F^n \to V$ definisana sa, za sve $x \in F^n$,

$$\varphi_A(x) = \varphi_A(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n$$

izomorfizam vektorskih prostora F^n i V, koji se zove kanonički izomorfizam.

Matrice za sve linearne transformacije

Definicija (Matrice za sve linearne transformacije)

Neka je $f : V_1 \to V_2$ linearna transformacija, gde su V_1 i V_2 vektorski prostori nad proizvoljnim poljem F. Neka je $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ jedna baza prostora V_1 i $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ jedna baza prostora V_2. Tada linearna transformacija

$$f_C = \varphi_B^{-1} \circ f \circ \varphi_A : F^n \to F^m$$

određuje matricu C, za koju kažemo da odgovara linearnoj transformaciji f.

Napomena

Prethodna teorema tvrdi da sve linearne transformacije između konačno-dimenzionalnih vektorskih prostora, nad proizvoljnim poljem, možemo - do na kanonički izomorfizam - posmatrati kao linearne transformacije $f : F^n \to F^m$, pa zato za sve njih imamo jedinstvene matrice.

Šta smo danas radili

- Primeri linearnih transformacija: rotacije, simetrije, projekcije
- Promena baze
- Matrice u drugim bazama
- Kanonički izomorfizam
- Matrice za sve linearne tranfsomacije