# Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 3

# Na prethodnom času

- Rekacije ekvivalencije
    - Klase ekvivalencije i faktor skup (particije)
    - Skup $\mathbb{Z}_n$
- Relacije poretka (parcijalno uređeni skupovi)
    - Haseov dijagram
    - Najmanji, najveći, min i max elementi
    - Supremum i infimum
    - Lanci i dobro uređeni skupovi

# Funkcije

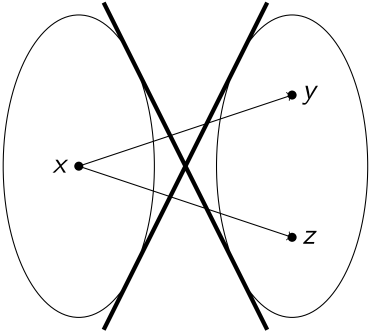
# Funkcije

## Definicija (Funkcije)

*Funkcija je binarna relacija kod koje ne postoje dva uređena para takva da su im prve komponente jednake a druge različite.*

## Napomena

*Umesto* $(x, y) \in f$ *pišemo* $f(x) = y$




## Definicija

*Ako je* $f$ *funkcija tada se skup prvih komponenti (originala)* $\mathcal{D}(f)$ *naziva* **domen**, *a skup drugih komponenti* $\mathcal{A}(f)$ **skup slika** *(piše se još i* $\mathrm{Im}(f)$*).*

## Napomena

*Druga definicija funkcije:* $f(x) \neq f(y) \quad \Rightarrow \quad x \neq y$

# Restrikcija funkcije

## Definicija (Restrikcija funkcije)

*Ako je $g \subseteq f$ tada se $g$ naziva restrikcija funkcije $f$ i piše se $g = f_{\mathcal{D}(g)}$.*

## Primer

1. *Funkcija $g = \{(a,2),(b,3)\}$ je restrikcija funkcije $f = \{(a,2),(b,3),(c,4)\}$ na skupu $\{a,b\}$, tj.*
$$f_{\mathcal{D}(g)} = f_{\{a,b\}} = g$$
2. *Funkcija $\sin_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x)$ je restrikcija funkcije $\sin(x)$ na intervalu $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$*

# Injektivnost

## Definicija (Injektivna funkcija $(1-1)$)

*Za funkciju $f$ kažemo da je injektivna (ili $1-1$) ako ne sardži dva uređena para kod kojih su prve komponente različite, a druge jednake.*

## Napomena

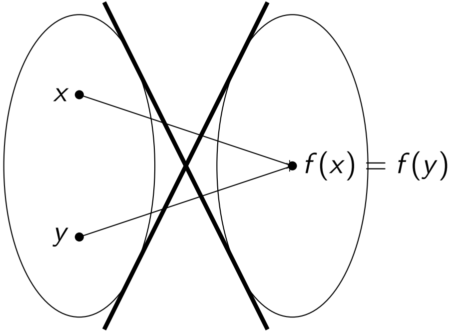
*Druga definicija injektivnosti:*

$$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$$

## Primer

*Naći injektivne funkcije:*

1. $f_1 = \{(a,1),(b,2),(a,3),(c,1)\}$
2. $f_2 = \{(a,1),(b,2),(c,1)\}$
3. $f_3 = \{(a,1),(b,2),(c,3)\}$



# Injektivnost

## Definicija (Injektivna funkcija $(1-1)$)

*Za funkciju $f$ kažemo da je injektivna (ili $1-1$) ako ne sardži dva uređena para kod kojih su prve komponente različite, a druge jednake.*

## Napomena

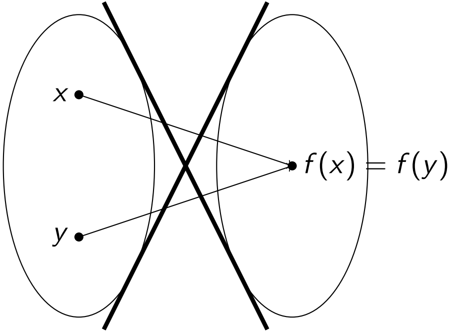
*Druga definicija injektivnosti:*

$f(x) = f(y) \quad \Rightarrow \quad x = y$

## Primer

*Naći injektivne funkcije:*

1. $f_1 = \{(a,1),(b,2),(a,3),(c,1)\} \quad \perp$
2. $f_2 = \{(a,1),(b,2),(c,1)\} \quad \perp$
3. $f_3 = \{(a,1),(b,2),(c,3)\} \quad \top$



# Funkcija skupa $A$ u skup $B$. Sirjektivnost (*na*)

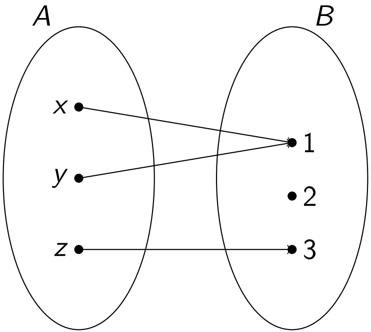
## Definicija (Funkcija skupa $A$ u skup $B$)

*Kažemo da je $f$ funkcija skupa $A$ u skup $B$, u oznaci $f : A \to B$, ako važi:*

1. *$f$ je funkcija*
2. $\mathcal{D}(f) = A$
3. $\mathcal{A}(f) \subseteq B$

## Primer

*Za $A = \{x, y, z\}$ i $B = \{1, 2, 3\}$, jedna funkcija $f : A \to B$ je $f = \{(x, 1), (y, 1), (z, 3)\}$*




## Definicija (Sirjektivnost (*na*))

*Funkcija $f : A \to B$ je sirjektivna ako važi $\mathcal{A}(f) = B$, i tada pišemo $f : A \xrightarrow{na} B$.*

# Bijekcija

## Napomena

*Ako je funkcija* $f : A \to B$ *injektivna, onda pišemo* $f : A \xrightarrow{1-1} B$

## Definicija (Bijekcija)

*Ako je funkcija* $f : A \to B$ *injektivna i sirjektivna, tada kažemo da je* $f$ *bijekcija i pišemo* $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$.

## Primer

*Za* $A = \{x, y, z\}$ *i* $B = \{1, 2, 3\}$, *jedna bijekcija* $f : A \to B$ *je* $f = \{(x, 2), (y, 1), (z, 3)\}$

## Napomena

*Bijekcije se još zovu permutacije i uzajamno jednoznačana preslikavanja*

# Vežbanje

## Primer

*Dati su skupovi* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$, *binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.*

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$
$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$$
$$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$
$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

| | $f_i$ je funkcija | $1-1$ | $f_i : A \to B$ | $f_i : A \xrightarrow{na} B$ | $f_i : A \xrightarrow{1-1} B$ | $f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | | | | | | |
| $f_2$ | | | | | | |
| $f_3$ | | | | | | |
| $f_4$ | | | | | | |

# Vežbanje

## Primer

*Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.*

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\} \qquad f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$
$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\} \qquad f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

| | $f_i$ je funkcija | $1-1$ | $f_i : A \to B$ | $f_i : A \xrightarrow{na} B$ | $f_i : A \xrightarrow{1-1} B$ | $f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | *DA* | *DA* | *NE* | *NE* | *NE* | *NE* |
| $f_2$ | | | | | | |
| $f_3$ | | | | | | |
| $f_4$ | | | | | | |

# Vežbanje

## Primer

*Dati su skupovi* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$*, binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.*

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\} \qquad f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$
$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\} \qquad f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

| | $f_i$ *je funkcija* | $1-1$ | $f_i : A \to B$ | $f_i : A \xrightarrow{na} B$ | $f_i : A \xrightarrow{1-1} B$ | $f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | *DA* | *DA* | *NE* | *NE* | *NE* | *NE* |
| $f_2$ | *NE* | *NE* | *NE* | *NE* | *NE* | *NE* |
| $f_3$ | | | | | | |
| $f_4$ | | | | | | |

# Vežbanje

## Primer

*Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.*

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\}$$
$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\}$$
$$f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$
$$f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

| | $f_i$ je funkcija | $1-1$ | $f_i : A \to B$ | $f_i : A \xrightarrow{na} B$ | $f_i : A \xrightarrow{1-1} B$ | $f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | DA | DA | NE | NE | NE | NE |
| $f_2$ | NE | NE | NE | NE | NE | NE |
| $f_3$ | DA | NE | DA | NE | NE | NE |
| $f_4$ | | | | | | |

# Vežbanje

## Primer

*Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{a, b, c\}$, binarne relacije i tabela. Popuniti tabelu sa DA i NE.*

$$f_1 = \{(1, a), (2, b)\} \qquad f_3 = \{(1, c), (2, c), (3, b), (4, b)\}$$
$$f_2 = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, a), (2, a)\} \qquad f_4 = \{(1, c), (2, b), (3, b), (4, a)\}$$

| | $f_i$ je funkcija | $1-1$ | $f_i : A \to B$ | $f_i : A \xrightarrow{na} B$ | $f_i : A \xrightarrow{1-1} B$ | $f_i : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1$ | DA | DA | NE | NE | NE | NE |
| $f_2$ | NE | NE | NE | NE | NE | NE |
| $f_3$ | DA | NE | DA | NE | NE | NE |
| $f_4$ | DA | NE | DA | DA | NE | NE |

# Broj elemenata skupa

## Napomena

- *Ako je* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *i* $B = \{a, b, c\}$, *da li postoji* $f : A \xrightarrow{1-1} B$ *i da li postoji* $g : B \xrightarrow{na} A$?
- *Da li je* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *data sa* $f(n) = 2n$ *injektivna?*

## Definicija

*Ako postoji bijekcija* $f : A \xrightarrow[na]{1-1} B$ *onda kažemo da* $A$ *i* $B$ *imaju isti broj elemenata i pišemo* $|A| = |B|$ *i* $Card(A) = Card(B)$.

## Teorema

- *Za konačan skup* $A$ *postoji bijekcija* $f : A \xrightarrow[na]{1-1} \{1, 2, \ldots, n\}$ *i tada pišemo* $|A| = n$.
- *Skup je beskonačan ako se može injektivno preslikati u svoj pravi podskup.*
- *Skup* $A$ *sa istim brojem elemenata kao* $\mathbb{N}$ *zove se* **prebrojiv**, *i pišemo* $|A| = \aleph_0$
- *Skup* $A$ *sa istim brojem elemenata kao* $\mathbb{R}$ *zove se* **neprebrojiv**, *i pišemo* $|A| = c$

# Konačni skupovi sa istim brojem elemenata

**Teorema**

*Neka su $A$ i $B$ konačni skupovi i neka je $|A| = |B|$. Tada važi za $f : A \to B$:*

- *ako je $f$ injektivna onda mora biti i sirjektivna*
- *ako je $f$ sirjektivna onda mora biti i injektivna*

**Napomena**

*Ovo nećemo dokazivati.*

# Još jedan način zapisa funkcija (i relacija)

## Napomena

*Binarnu relaciju* $f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n)\}$ *možemo zapisati na sledeći način*

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$$

Iz ovog zapisa možemo lakše uočiti neke osobine od $f$:

- $f$ je funkcija akko su svaka dva elementa u prvoj vrsti različita
- $f$ je funkcija iz skupa $A$ u skup $B$ akko je $f$ funkcija, $\{a_1, a_2, ..., a_n\} = A$ i $\{b_1, b_2, ..., b_n\} \subseteq B$
- $f$ je injektivna funkcija akko su i u drugoj vrsti svaka dva elementa različita
- $f$ je sirjektivna funkcija iz skupa $A$ u skup $B$ akko je i $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$

# Inverzna funkcija i kompozicija

# Inverzna funkcija

## Primer

*Setimo se inverzne binarne relacije. Za sledeće funkcije odredi inverzne binarne relacije:*

1. $f = \{(1, a), (2, b)\}$
2. $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$

# Inverzna funkcija

## Primer

*Setimo se inverzne binarne relacije. Za sledeće funkcije odredi inverzne binarne relacije:*

1. $f = \{(1, a), (2, b)\}$ $\qquad f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2)\}$
2. $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ $\qquad g^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

# Inverzna funkcija

## Primer

*Setimo se inverzne binarne relacije. Za sledeće funkcije odredi inverzne binarne relacije:*

1. $f = \{(1, a), (2, b)\}$ $\qquad f^{-1} = \{(a, 1), (b, 2)\}$
2. $g = \{(1, a), (2, b), (3, b)\}$ $\qquad g^{-1} = \{(a, 1), (b, 2), (b, 3)\}$

## Teorema

*Neka je $f$ funkcija. Inverzna relacija $f^{-1}$ je funkcija (i tada se zove* **inverzna funkcija***) akko je $f$ injektivna. Dalje, ako je $f : A \to A$ bijekcija tada je i $f^{-1} : A \to A$ bijekcija.*

## Dokaz

*$f$ je injektivna akko $(\forall x, z \in \mathcal{D}(f))(\forall y \in \mathcal{A}(f))((x, y) \in f \wedge (z, y) \in f) \Rightarrow x = z$. Ovo je ekvivalentno sa*

$$(\forall y \in \mathcal{D}(f^{-1}))(\forall x, z \in \mathcal{A}(f^{-1}))((y, x) \in f^{-1} \wedge (y, z) \in f^{-1}) \Rightarrow x = z$$

*gde zapravo piše da je $f^{-1}$ funkcija.*

# Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

# Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\quad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

# Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\quad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \,|\, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$

# Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\qquad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_3^{-1} = \{(2x+1, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(t, \tfrac{t-1}{2}) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

# Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\qquad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad$ ne postoji, $f_4$ nije $1-1$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_4(1) = f_4(-1)$$

# Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\qquad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad$ ne postoji, $f_4$ nije $1-1$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ $\qquad f_5^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$f_5^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\} = \{(t, \sqrt{t}) \mid t \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$$

# Inverzna funkcija: primeri

Za sledeće funkcije odrediti inverzne funkcije (ako postoje):

1. $f_1 = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ $\qquad f_1^{-1} = \{(2,1),(3,2),(4,3)\}$
2. $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad f_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
3. $f_3 = \{(x, 2x+1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad f_3^{-1} = \{(x, \frac{x-1}{2}) \mid x \in \mathbb{R}\}$
4. $f_4 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad$ ne postoji, $f_4$ nije $1-1$
5. $f_5 = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$ $\qquad f_5^{-1} = \{(x, \sqrt{x}) \mid x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}\}$
6. $f_6 = \{(x, e^x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ $\qquad f_6^{-1} = \{(x, \ln x) \mid x \in \mathbb{R}^+\}$

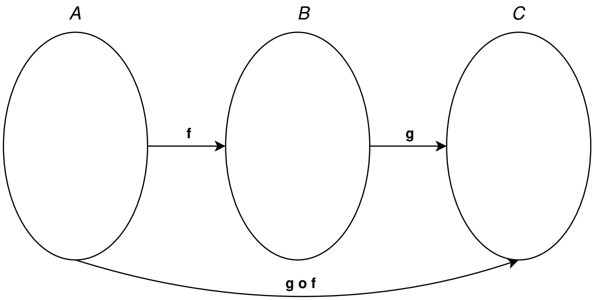
$$f_6^{-1} = \{(e^x, x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(t, \ln t) \mid t \in \mathbb{R}^+\}$$

# Kompozicija funkcija

## Definicija (Kompozicija funkcija)

*Neka su* $A, B$ *i* $C$ *neprazni skupovi i* $f : A \to B$ *i* $g : B \to C$ *funkcije. Tada je i* $g \circ f : A \to C$ *takođe funkcija definisana sa*

$$(\forall x \in A)(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



# Kompozicija funkcija: osobine

## Teorema

*Neka je $A \neq \emptyset$ i funkcije $f, g, h : A \to A$. Tada važi $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, tj. važi asocijativnost.*

## Dokaz

*Po definiciji kompozicije za $x \in \mathcal{D}(h)$ imamo*
$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)\big(h(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) = f\big((g \circ h)(x)\big) = \big(f \circ (g \circ h)\big)(x)$

# Kompozicija funkcija: osobine

## Teorema

*Neka je $A \neq \emptyset$ i funkcije $f, g, h : A \to A$. Tada važi $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$, tj. važi asocijativnost.*

## Dokaz

*Po definiciji kompozicije za $x \in \mathcal{D}(h)$ imamo*
$$((f \circ g) \circ h)(x) = (f \circ g)\big(h(x)\big) = f\Big(g\big(h(x)\big)\Big) = f\big((g \circ h)(x)\big) = \big(f \circ (g \circ h)\big)(x)$$

## Teorema

*Neka je $A \neq \emptyset$ i funkcije $f, g : A \to A$. Tada važi*

1. *ako su $f$ i $g$ injektivne tada je i $f \circ g$ injektivna;*
2. *ako su $f$ i $g$ sirjektivne tada je i $f \circ g$ sirjektivna.*

## Dokaz

1. *Treba pokazati $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y) \Rightarrow x = y$. Pošto je $f$ injektivna, iz $f\big(g(x)\big) = f\big(g(y)\big)$ sledi $g(x) = g(y)$, a odavde iz injektivnosti $g$ sledi $x = y$.*

# Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Odrediti (ako je moguće): $f^{-1}$, $g^{-1}$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

# Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Odrediti (ako je moguće): $f^{-1}$, $g^{-1}$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

# Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Odrediti (ako je moguće): $f^{-1}$, $g^{-1}$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

# Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Odrediti (ako je moguće): $f^{-1}$, $g^{-1}$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix} \qquad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

# Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Odrediti (ako je moguće): $f^{-1}$, $g^{-1}$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

# Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1,2,3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Odrediti (ako je moguće): $f^{-1}$, $g^{-1}$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

# Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Odrediti (ako je moguće): $f^{-1}$, $g^{-1}$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & & \end{pmatrix}$$

# Kompozicija funkcija: primeri

Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i $f, g : A \to A$ zadate sa $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Odrediti (ako je moguće): $f^{-1}$, $g^{-1}$, $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $(g \circ f)^{-1}$ i $f^{-1} \circ g^{-1}$.

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad (g \circ f)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad f^{-1} \circ g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

### Napomena

*Generalno, $f \circ g \neq g \circ f$, tj. ne važi komutativnost kompozicije.*

# Identička, inverzna funkcija i kompozicija

## Definicija (Identička funkcija)

*Neka je $A \neq \emptyset$. Funkcija $i_d : A \to A$ definisana sa $(\forall x \in A)\ i_d(x) = x$, se naziva identička funkcija skupa $A$. Primetimo da je $i_d$ bijekcija i da je $f \circ i_d = i_d \circ f = f$.*

## Lema

*Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i $i_d$ identička funkcija skupa $A$. Tada važi $f \circ g = i_d$ akko $g = f^{-1}$ (i takođe $f = g^{-1}$).*

## Dokaz

*Imamo $g = f^{-1}$ akko $(\forall x \in A)$ iz $f(x) = y$ sledi $g(y) = x$. Kako su $f$ i $g$ bijekcije, ovo je ekvivalentno sa $(\forall y \in A)\big(f \circ g\big)(y) = y$.*

## Lema

*Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i $i_d$ identička funkcija skupa $A$. Tada je*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

# Identička, inverzna funkcija i kompozicija

## Definicija (Identička funkcija)

*Neka je $A \neq \emptyset$. Funkcija $i_d : A \to A$ definisana sa $(\forall x \in A)\ i_d(x) = x$, se naziva identička funkcija skupa $A$. Primetimo da je $i_d$ bijekcija i da je $f \circ i_d = i_d \circ f = f$.*

## Lema

*Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i $i_d$ identička funkcija skupa $A$. Tada važi $f \circ g = i_d$ akko $g = f^{-1}$ (i takođe $f = g^{-1}$).*

## Lema

*Neka je $A \neq \emptyset$, $f, g : A \xrightarrow[na]{1-1} A$ i $i_d$ identička funkcija skupa $A$. Tada je*

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

## Dokaz

$$(f \circ g) \circ \left(g^{-1} \circ f^{-1}\right) = f \circ \left(g \circ g^{-1}\right) \circ f^{-1} = f \circ i_d \circ f^{-1} = f \circ f^{-1} = i_d$$

# Šta smo danas radili

- Funkcije i funkcije skupa $A$ u skup $B$
- Injektivnost i sirjektivnost
- Bijekcija
- Inverzna funkcija
- Kompozicija funkcija