Algebra

Ivan Prokić

Fakultet tehničkih nauka, Novi Sad

Predavanje 6

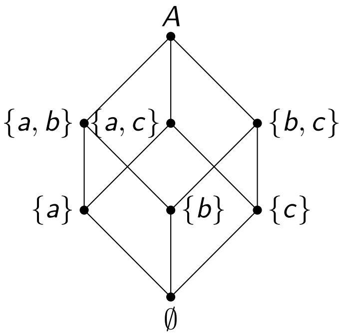
Na prethodnom času

- Bulove algebre
- Osnovne teoreme Bulove algebre
- Podalgebre
- Relacija poretka

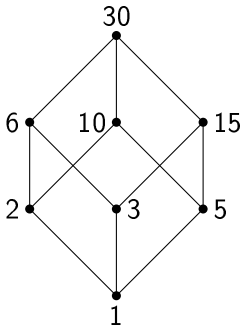
Homomorfizam i izomorfizam

Ovo deluje "isto"

- Skupovi: $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, za $A = \{1, 2, 3\}$



- Delioci broja 30: $(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$



Kako da formulišemo da su dve Bulove algebre "iste"?

Homomorfizam i izomorfizam

Definicija (Homomorfizam)

Neka su $\mathcal{B} = (B, +, \cdot, ', 0, 1)$ *i* $\mathcal{C} = (C, \oplus, \odot, ^{-}, 0^*, 1^*)$ *dve Bulove algebre. Funkcija* $\varphi : B \to C$*, se naziva homomorfizam ako za sve* $a, b \in B$ *važi*

1. $\varphi(a + b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b)$
2. $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b)$
3. $\varphi(a') = \overline{\varphi(a)}$

Definicija (Izomorfizam)

Bijektivni homomorfizam se naziva izomorfizam.

Primer

Za Bulove algebre $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$, za $A = \{1, 2, 3\}$, i $(D_{30}, NZS, NZD, x' = \frac{30}{x}, 1, 30)$, gde je $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, jedan izomorfizam je

$$\varphi = \begin{pmatrix} \emptyset & \{a\} & \{b\} & \{c\} & \{a,b\} & \{a,c\} & \{b,c\} & \{a,b,c\} \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 10 & 15 & 30 \end{pmatrix}$$

Treba proveriti da je φ bijekcija i da za sve $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ važi

1. $\varphi(X \cup Y) = NZS\{\varphi(X), \varphi(Y)\}$
2. $\varphi(X \cap Y) = NZD\{\varphi(a), \varphi(b)\}$
3. $\varphi(\overline{X}) = (\varphi(X))'$

Reprezentacija Bulovih algebri

Teorema (Teorema Stona o reprezentaciji Bulovih algebri)

Svaka Bulova algebra izomorfna je sa nekom Bulovom algebrom skupova $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap, ^{-}, \emptyset, A)$.

Posledica

Svaka konačna Bulova algebra (a mi radimo samo sa konačnim) ima 2^n *elemenata i sve Bulove algebre sa istim brojem elemenata su izomorfne.*

Bulovi izrazi i Bulove funkcije

(na dvoelementnoj Bulovoj algebri)

Bulovi izrazi

Napomena

Dalje ćemo raditi samo sa dvoelementnom Bulovom algebrom $(\{0,1\},+,\cdot,',0,1)$, *što je zapravo izomorfno sa Bulovom algebrom iskaznog računa* $(\{\perp,\top\},\vee,\wedge,\neg,\perp,\top)$.

Primer

U srednjoj školi rađeno: ispitati istinitost izraza $(\neg x \wedge y) \vee y$.

Bulovi izrazi

Napomena

Dalje ćemo raditi samo sa dvoelementnom Bulovom algebrom $(\{0,1\},+,\cdot,',0,1)$*, što je zapravo izomorfno sa Bulovom algebrom iskaznog računa* $(\{\perp,\top\},\vee,\wedge,\neg,\perp,\top)$.

Primer

U srednjoj školi rađeno: ispitati istinitost izraza $(\neg x \wedge y) \vee y$.

Mi ćemo umesto $(\neg x \wedge y) \vee y$ **pisati** $x'y + y$**, umesto** $\perp$ **pisaćemo** 0**, a umesto** $\top$ **pisaćemo** 1.

x	y	x'	$x'y$	$x'y+y$
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	0	1

Dakle, izraze pravimo od konstanti $0,1$*, promenljivih* $x,y,z,\ldots$ *i operacija* $+,\cdot,'$.

Definicija Bulovih izraza

Definicija (Bulovi izrazi)

1. *Konstante* $0, 1$ *i promenljive* $x, y, z, u, \ldots$ *su Bulovi izrazi.*
2. *Ako su* A *i* B *Bulovi izrazi, onda su to i* $(A + B)$, $(A \cdot B)$, $(A)'$.
3. *Bulovi izrazi dobijaju se konačnim brojem primena prethodna dva pravila.*

Primer

Bulovi izrazi su (zagrade pišemo samo kada moramo):
$0, 1, x, y, x'y, x'y + y, 1 + x', (x' + y')'z, \ldots$

Specijalni Bulovi izrazi

Definicija (Specijalni Bulovi izrazi)

1. **Monom:** *promenljiva ili njegova negacija* $(x, y, x', \ldots)$
2. **Elementarna konjukcija (EK)**: *proizvod monoma* $(x, 0, , xy', \ldots)$
3. **Disjunktivna normalna forma (DNF)**: *zbir EK* $(x, x', 1, x'y + y, \ldots)$
4. **Savršena disjunktivna normalna forma (SDNF)**: *zbir EK takvih da se u svakoj EK pojavljuju sve promenljive* $(x + x', x'y + xy, \ldots)$

Napomena

Dualno se definišu i elementarna disjunkcija (ED), konjuktivna normalna forma (KNF) i savršena konjuktivna normalna forma (SKNF).

Od Bulovih izraza do Bulovih funkcija

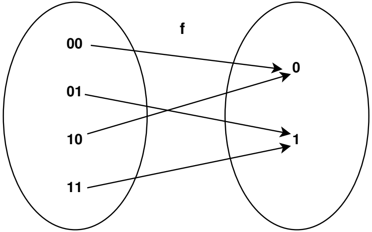
Setimo se našeg Bulovog izraza $x'y + y$ i ispitivanja njegove tačnosti:

x	y	$x'y + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Od Bulovih izraza do Bulovih funkcija

Setimo se našeg Bulovog izraza $x'y + y$ i ispitivanja njegove tačnosti:
Zapravo, ovaj izraz definiše jednu **Bulovu funkciju** $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$, i pišemo $f(x,y) = x'y + y$.

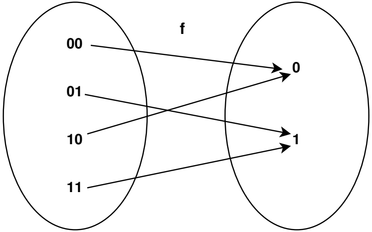
x	y	$f(x,y) = x'y + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Od Bulovih izraza do Bulovih funkcija

Setimo se našeg Bulovog izraza $x'y + y$ i ispitivanja njegove tačnosti:
Zapravo, ovaj izraz definiše jednu **Bulovu funkciju** $f : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, i pišemo $f(x,y) = x'y + y$.

x	y	$f(x,y) = x'y + y$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Napomena

Primetimo da izraz y definiše istu funkciju. Dakle, svaki izraz određuje jednu funkciju, ali više Bulovih izraza može da određuju istu funkciju.

Od Bulovih funkcija do Bulovih izraza

Napomena

Sledeća teorema pokazuje da za svaku Bulovu funkciju (na dvoelementnoj Bulovoj algebri) imamo tačno jedan Bulov izraz u obliku SDNF.

Teorema

Ako je $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ *Bulova funkcija, tada se ona može zapisati kao Bulov izraz u SDNF obliku*

$$f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} f(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n},$$

gde je $x^\alpha = \begin{cases} x & , \quad \alpha = 1 \\ x' & , \quad \alpha = 0 \end{cases}$

Dokaz prethodne teoreme za $n = 2$

Teorema

Ako je $f : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$ Bulova funkcija, tada se ona može zapisati kao Bulov izraz u SDNF obliku

$$f(x,y) = \sum_{(\alpha_1,\alpha_2)\in\{0,1\}^2} f(\alpha_1,\alpha_2)\cdot x^{\alpha_1}\cdot y^{\alpha_2}$$

Dokaz

x	y	$f(x,y)$
0	0	$f(0,0)$
0	1	$f(0,1)$
1	0	$f(1,0)$
1	1	$f(1,1)$

Teorema kaže:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0)\cdot x^0y^0 + f(0,1)\cdot x^0y^1 + f(1,0)\cdot x^1y^0 + f(1,1)\cdot x^1y^1 \\ &= f(0,0)\cdot x'y' + f(0,1)\cdot x'y + f(1,0)\cdot xy' + f(1,1)\cdot xy \end{aligned}$$

Sada možemo izračunati (primeti da ostane jedan sabirak):

$$\begin{aligned} f(0,0) &= f(0,0)\cdot 0'\cdot 0' + f(0,1)\cdot 0'\cdot 0 + f(1,0)\cdot 0\cdot 0' + f(1,1)\cdot 0\cdot 0 \\ &= f(0,0)\cdot 1\cdot 1 + f(0,1)\cdot 1\cdot 0 + f(1,0)\cdot 0\cdot 1 + f(1,1)\cdot 0\cdot 0 \end{aligned}$$

Isto tako možemo proveriti da i za $f(0,1), f(1,0), f(1,1)$ dobijamo tačne vrednosti.

Primer

Za sledeću Bulovu funkciju napisati Bulov izraz u obliku SDNF

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Primer

Za sledeću Bulovu funkciju napisati Bulov izraz u obliku SDNF

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0)\cdot x^0y^0 + f(0,1)\cdot x^0y^1 + f(1,0)\cdot x^1y^0 + f(1,1)\cdot x^1y^1 \\ &= 0\cdot x'y' + 1\cdot x'y + 0\cdot xy' + 1\cdot xy \\ &= x'y + xy \end{aligned}$$

Primer

Za sledeću Bulovu funkciju napisati Bulov izraz u obliku SDNF

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(0,0)\cdot x^0y^0 + f(0,1)\cdot x^0y^1 + f(1,0)\cdot x^1y^0 + f(1,1)\cdot x^1y^1 \\ &= 0\cdot x'y' + 1\cdot x'y + 0\cdot xy' + 1\cdot xy \\ &= x'y + xy \end{aligned}$$

Napomena

Primetimo da je posledica teoreme da sve Bulove funkcije možemo predstaviti pomoću funkcija $+$, $\cdot$ *i* $'$. *Zato se skup funkcija* $\{+, \cdot, '\}$ *zove generatorni za skup svih Bulovih funkcija.*

Napomena

Primetimo i da Bulovi izrazi $x'y + y$, y *i* $x'y + xy$ *svi određuju jednu istu Bulovu funkciju.*

Baze skupa Bulovih funkcija

Napomena

Rekli smo da $\{+, \cdot, '\}$ *generiše sve Bulove funkcije, međutim imamo* $xy = (x' + y')'$, *što znači da nam* $\cdot$ *nije neophodna. Zato je i* $\{+, '\}$ *generatoran skup, ali se zove i* **baza** *skupa Bulovih funkcija. Recimo,* $\{\cdot, '\}$, $\{\oplus, '\}$ *(gde je* $x \oplus y = x'y + xy'$, *tzv. ekskluzivno ili, tj. sabiranje po modulu* 2*),* $\{\Rightarrow, '\}$ *su takođe baze. Međutim, postoje i baze sa samo jednim elementom. Inače, Bulovih funkcija od dve promenljive ima ukupno* 16.

Teorema

Skupovi funkcija $\{\overline{\wedge}\}$ *(Šeferova, ni) i* $\{\overline{\vee}\}$ *(Lukašijevićeva, nili) jesu baze skupa Bulovih funkcija, gde su operacije date sa* $x\overline{\wedge}y = x' + y'$ *i* $x\overline{\vee}y = x'y'$.

Dokaz

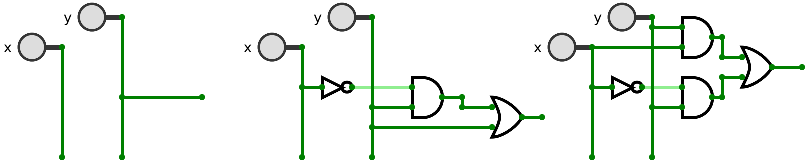
Za Šeferovu operaciju imamo da važi $x' = x\overline{\wedge}x$ *i* $x + y = (x\overline{\wedge}x)\overline{\wedge}(y\overline{\wedge}y)$, *tj. i* $'$ *i* $+$ *se mogu izraziti preko* $\overline{\wedge}$. *Slično se pokazuje i za Lukašijevićevu operaciju.*

Minimizacija Bulovih funkcija

(na dvoelementnoj Bulovoj algebri)

Minimizacija

Setimo se da Bulovi izrazi y, $x'y + y$ i $xy + x'y$ određuju jednu Bulovu funkciju. Međutim, svakom Bulovom izrazu zapravo odgovara jedno logičko kolo (ovde nećemo ići u detalje logičkih kola):



y $\qquad$ $x'y + y$ $\qquad$ $xy + x'y$

Sva tri kola implementiraju jednu istu funkciju, ali ne "koštaju" isto. Ovde nam je najbolje prvo kolo, ali bismo voleli da imamo proceduru koja bi nam za svaku Bulovu funkciju kao rezultat dala "najjeftiniju", tj. onu koja ima minimalan broj logičkih kapija (pri čemu se ograničavamo samo na izraze u obliku DNF, tj. tražimo **minimalne DNF**).

Implikante i proste implikante

Definicija (Implikante)

Kažemo da Bulov izraz $A(x_1, \ldots, x_n)$ *implikanta za Bulov izraz* $B(x_1, \ldots, x_n)$ *akko za funkcije* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *koja oderđuje izraz* $A(x_1, \ldots, x_n)$ *i* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *koja određuje izraz* $B(x_1, \ldots, x_n)$ *važi* $f(x_1, \ldots, x_n) + g(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n)$ *(tj.* $f \preccurlyeq g$*) za sve* $(x_1, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$.

Primer

Bulovi izrazi $y, x'y$ *i* xy *jesu implikante za Bulov izraz* $x'y + xy$.

Definicija (Proste implikante)

Elementarna konjukcija C *je prosta implikanta Bulove funkcije* f *akko je* C *implikanta za* f *i ako ne postoji* C_1 *elementarna konjukcija čiji je skup monoma poskup skupa monoma od* C*, a koja je takođe implikanta za* f.

Primer

Za Bulovu funkciju f *koja odgovara izrazima* y, $x'y + y$ *i* $xy + x'y$, *implikante* $x'y$ *i* xy *nisu proste, a* y *jeste.*

Minimalne disjunktivne nomalne forme (MDNF)

Da bi definisali minimalnu DNF, prvo moramo nekako da poredimo DNF-ove.

Definicija

DNF Φ_1 je **prostija** *od DNF Φ_2 akko je broj monoma od Φ_1 manji ili jednak broju monoma od Φ_2 i ako je broj elementarnih konjukcija od Φ_1 manji ili jednak broju elementarnih konjukcija od Φ_2, gde je bar jedna od nejednakosti striktna, tj. $<$.*

Primer

Imamo da je $\Phi_1(x, y) = y$ prostija od $\Phi_2(x, y) = x'y + y$, a da je $\Phi_2(x, y)$ prostija od $\Phi_3(x, y) = xy + x'y$. Dalje, $\Phi_3(x, y)$ je prostija od $\Phi_4(x, y) = xy + x'y + x'y'$.

Definicija (MDNF)

Kažemo da je DNF Φ minimalna disjunktivna normalna forma (MDNF) bulove funkcije f akko ne postoji prostija DNF koja određuje f.

MDNF sadrži samo proste implikante

Teorema

Neka je Φ MDNF bulove funkcije f. Tada svaka elementarna konjukcija od Φ jeste prosta implikanta od f.

Dokaz

Neka je MDNF $\Phi = C_1 + C_2 \ldots + C_n$, gde su $C_1, C_2, \ldots, C_n$ elementarne konjukcije. Ako pretpostavimo da jedna od elementarnih konjukcija nije prosta implikanta, recimo C_1, to bi značilo da postoji elementarna konjukcija C_1^* čiji je skup monoma (strogo) sadržan u skupu monoma od C, tj. $C_1 = C_1^* C$, a koja je prosta implikanta za f. Tada:

$$
\begin{aligned}
C_1^* + C_2 \ldots + C_n &= C_1^* + C_1^* C + C_2 \ldots + C_n && \text{(apsorpcija)}\\
&= C_1^* + C_1 + C_2 \ldots + C_n\\
&= C_1^* + \Phi = C_1^* + f\\
&= f && \text{(jer je } C_1^* \text{ prosta implikanta od } f\text{)}
\end{aligned}
$$

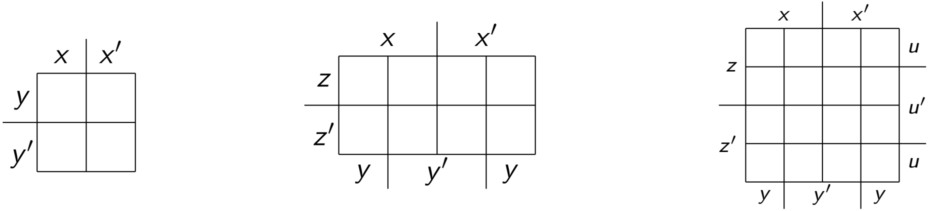
Ovo znači da je $C_1^* + C_2 \ldots + C_n$ DNF od f koja je prostija od Φ, tj. Φ nije MDNF.

Karnoove karte

Prethodna teorema kaže kako da nađemo MDNF-ove: prvo treba naći proste implikante.

Definicija (Karnoove karte)

Karnoove karte za Bulove funkcije od $2, 3$ *i* 4 *promenljive su tablice:*



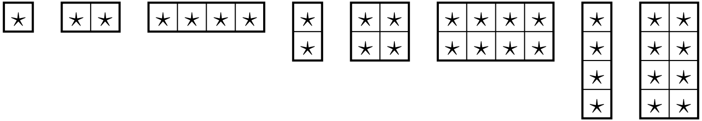
Pri čemu su tablice na papiru koji se može savijati: za tablicu u sredini papir savijamo tako da se leva i desna strana dodirnu (i dobijemo cilindar), a za tablicu desno takođe pravimo cilindar i onda mu spajamo gornji i donji kraj (i dobijamo torus).
Tablice popunjavamo na osnovu SDNF: svako polje u tablici odgovara jednoj EK u SDNF, ako je EK u SDNF onda polje obeležimo sa $\star$.

Maksimalni obeleženi četvorouglovi

U Karnoovoj karti grupišemo polja obeležena sa $\star$ na sledeći način.

Definicija (Osnovni obeleženi četvorouglovi)

Sledeći četvorouglovi su osnovni obeleženi četvorouglovi:



Definicija (Proste implikante u Karnoovoj karti)

Proste implikante su maksimalni obeleženi četvorouglovi (nisu sadržani u drugom obeleženom četvorouglu) u Karnoonoj karti.

Kada imamo proste implikante, MDNF dobijamo tako što napravimo dijunkciju $(+)$ minimalnog broja prostih implikanti koje prepokrivaju sva obeležena polja u Karoovoj karti. Sledi primer!

Primer 1

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Primer 1

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	y	$f(x, y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Rešenje. Iz tablice čitamo SDNF $f(x, y) = x'y + xy$ i popunjavamo Karnoovu kartu

	x	x'
y	$\star$	$\star$
y'		

Sada obeležena polja grupišemo u osnovne obeležene četvorouglove, i tražimo MDNF-ove.

Primer 1

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Rešenje. Iz tablice čitamo SDNF $f(x,y) = x'y + xy$ i popunjavamo Karnoovu kartu

	x	x'
y	$\star$	$\star$
y'		

Sada obeležena polja grupišemo u osnovne obeležene četvorouglove, i tražimo MDNF-ove. Imamo samo jednu prostu implikantu y, pa je jedina MDNF $\Phi = y$. **Pitanje: šta se ovde desilo?**

Primer 1

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	y	$f(x,y)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Rešenje. Iz tablice čitamo SDNF $f(x,y) = x'y + xy$ i popunjavamo Karnoovu kartu

	x	x'
y	$\star$	$\star$
y'		

Sada obeležena polja grupišemo u osnovne obeležene četvorouglove, i tražimo MDNF-ove. Imamo samo jednu prostu implikantu y, pa je jedina MDNF $\Phi = y$. **Pitanje: šta se ovde desilo?**

Odgovor: Grupisali smo polja xy i $x'y$, a to nam daje $xy + x'y = (x + x')y = 1 \cdot y = y$. Dakle, dve implikante xy i $x'y$ funkcije f smo zamenili njihovom zajedničkom prostom implikantom y.

Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

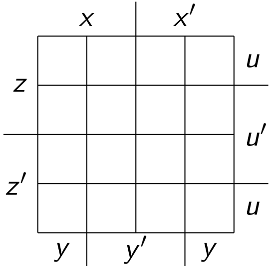
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$f(x,y,z,u) =$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u'$

	x		x'		
z					u
z					u'
z'			$\star$		u'
z'					u
	y	y'	y'	y	

Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu'$

	x	x	x'	x'	
z					u
z			$\star$		u'
z'			$\star$		u'
z'					u
	y	y'	y'	y	

Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

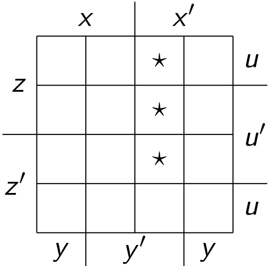
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu$$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

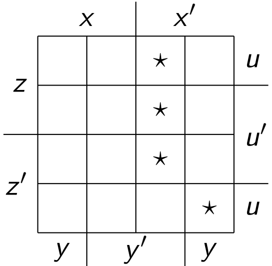
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u$$



Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	1	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu$$

	x		x'		
z			$\star$	$\star$	u
z			$\star$		u'
z'			$\star$		u'
z'				$\star$	u
	y	y'	y'	y	

Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	1	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u'$$

		x	x	x'	x'	
		y	y'	y'	y	
z	u			$\star$	$\star$	
z	u'			$\star$		
z'	u'		$\star$	$\star$		
z'	u				$\star$	

Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	1

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u$$

	x		x'		
z			$\star$	$\star$	u
			$\star$		u'
z'		$\star$	$\star$		
	$\star$			$\star$	u
	y	y'		y	

Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$

	x	x	x'	x'	
z	$\star$		$\star$	$\star$	u
z			$\star$		u'
z'		$\star$	$\star$		u'
z'	$\star$			$\star$	u
	y	y'	y'	y	

Proste implikante su:

MDNF-ovi su:

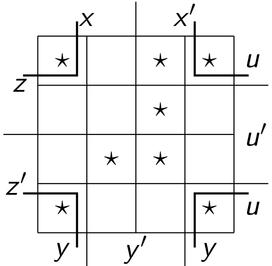
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$



Proste implikante su: yu,

MDNF-ovi su:

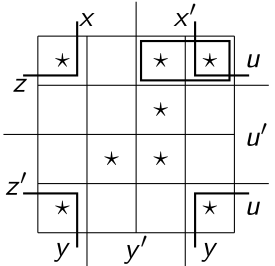
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$



Proste implikante su: yu, $x'zu$,

MDNF-ovi su:

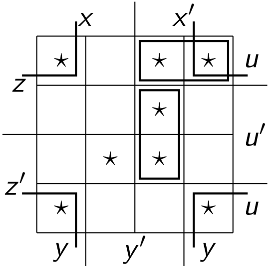
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$



Proste implikante su: yu, $x'zu$, $x'y'u'$,

MDNF-ovi su:

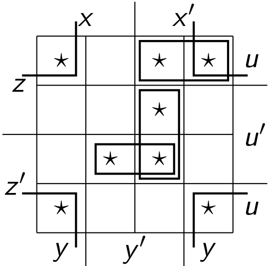
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$



Proste implikante su: $yu,\ x'zu,\ x'y'u',\ y'z'u',$

MDNF-ovi su:

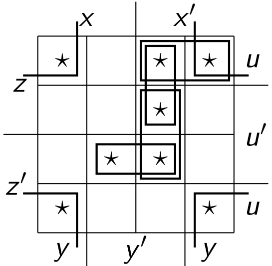
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$



Proste implikante su: $yu,\ x'zu,\ x'y'u',\ y'z'u',\ x'y'z$

MDNF-ovi su:

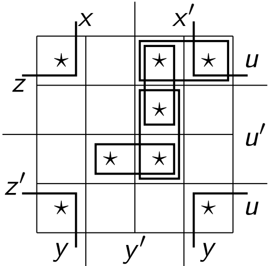
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$



Proste implikante su: yu, $x'zu$, $x'y'u'$, $y'z'u'$, $x'y'z$

MDNF-ovi su: $\Phi = yu+$

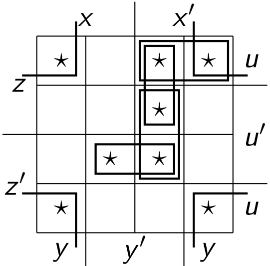
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$



Proste implikante su: yu, $x'zu$, $x'y'u'$, $y'z'u'$, $x'y'z$

MDNF-ovi su: $\Phi = yu + \ y'z'u' +$

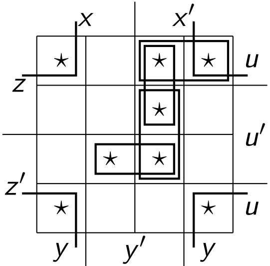
Primer 2

Za Bulovu funkciju zadatu tablicom, odrediti SDNF, naći sve proste impikante i sve MDNF.

x	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
y	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
z	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
u	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$f(x,y,z,u)$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0	0	0	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$

Iz tablice čitamo SDNF i popunjavamo Karnoovu kartu

$$f(x,y,z,u) = x'y'z'u' + x'y'zu' + x'y'zu + x'yz'u + x'yzu + xy'z'u' + xyz'u + xyzu$$



Proste implikante su: $yu,\ x'zu,\ x'y'u',\ y'z'u',\ x'y'z$

MDNF-ovi su: $\Phi = yu + y'z'u' + x'y'z$

Šta smo danas radili

- Homomorfizam i izomorfizam
- Reprezentacija Bulovih algebri
- Bulovi izrazi i EK, DNF, SDNF (dualno ED, KNF, SKNF)
- Bulove funkcije i njihova veza sa Bulovim izrazima
- Minimizacija Bulovih izraza (u obliku DNF)
- Proste implikante i MDNF
- Karnoove karte