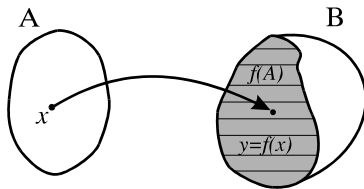


UVOD



Ako su A i B neprazni skupovi i ako je svakom $x \in A$ dodeljen, po izvesnom zakonu, tačno jedan element $y \in B$, tada kažemo da je na skupu A definisana funkcija (preslikavanje) f sa vrednostima u skupu B .

Simbolički zapisano:

$$1. (\forall x \in A) (\exists y \in B) (x, y) \in f,$$

$$2. (\forall x \in A) (\forall y_1, y_2 \in B)$$

$$(x, y_1) \in f \wedge (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2.$$

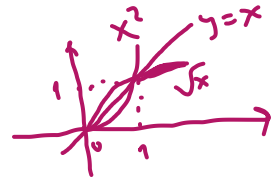
Umesto $(x, y) \in f$ pišemo $y=f(x)$.

Skup A nazivamo *oblast definisanosti* (ili domen) funkcije f , a skup $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subset B$ skup *vrednosti* (ili kodomen) funkcije f . Promenljivu x zovemo *nezavisna promenljiva* (argument, original), a y *zavisna promenljiva* (vrednost funkcije ili slika). Ako je $A \subset \mathbb{R}$ i $B \subset \mathbb{R}$ tada za funkciju $f : A \rightarrow B$ kažemo da je realna funkcija jedne realne promenljive.

Napomena: Umesto „funkcija f data sa $f(x)=?$ ” kraće pišemo samo funkcija $y=f(x)$.

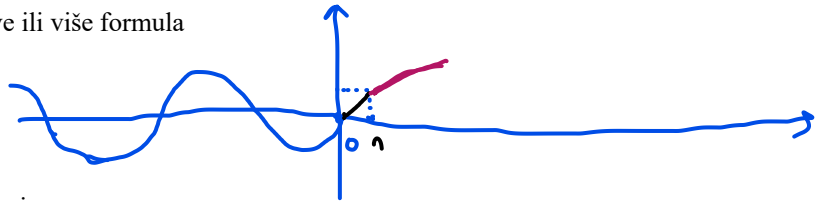
Funkcija može biti zadata:

1. *Analitički*:
 - Eksplicitno $y=f(x)$,
 - Implicitno $F(x,y)=0$,
 - Parametarski $y=f(t)$, $x=g(t)$.
2. *Grafički*,
3. *Tabelarno*.



Funkcija može biti zadata i pomoću dve ili više formula

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & , \quad x \leq 0 \\ x & , \quad 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x} & , \quad x > 1 \end{cases}.$$



Za preslikavanje $f : A \rightarrow B$ kažemo da je:

- *Injektivno* (“1 – 1”) ako različitim originalima odgovaraju različite slike, tj. $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$,
- *Sirjektivno* (“na”) ako za svako $y \in B$ postoji $x \in A$ takvo da je $f(x)=y$, tj. $f(A) = B$,
- *Bijektivno* (“1 – 1” i “na”).

$$f(x) = x^2, \mathbb{R}$$



$$f(-1) = 1$$

$$f(1) = 1$$

Oblast definisanosti

Oblast definisanosti je najširi podskup skupa $\mathbb{R}$ gde su izvodljive sve operacije date funkcijom.

- Racionalna funkcija $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $Q_m(x) \neq 0$

$$\text{Primer: } y = \frac{x-3}{x-2}, \quad \begin{matrix} x-2 \neq 0 \\ x \neq 2 \end{matrix} \Rightarrow D: x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

- $y = \sqrt[n]{f(x)}$

$$\begin{matrix} n = 2k \in \mathbb{N}, & f(x) \geq 0 \\ n = 2k+1 \in \mathbb{N}, & \text{nema ograničenja za } f(x) \end{matrix}$$

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Nule funkcije

Nula funkcije $y = f(x)$ je vrednost promenljive x za koju je $y=0$.

Parnost i neparnost funkcije

Ako je oblast definisanosti D funkcije $y = f(x)$ simetričan skup (skup D je simetričan ako za svako $x \in D$ sledi da je i $-x \in D$) tada:

- za funkciju f kažemo da je *parna* ako je $f(-x) = f(x)$ za sve vrednosti $x \in D$,
- za funkciju f kažemo da je *neparna* ako je $f(-x) = -f(x)$, za sve vrednosti $x \in D$.

Funkcija ne mora da bude ni parna ni neparna.

Periodičnost

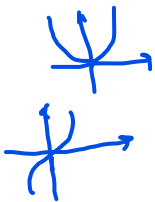
Funkcija je periodična ako postoji broj $\omega \neq 0$, takav da je $f(x + \omega) = f(x)$ za svako $x \in D$. Broj ω nazivamo *period*. Najmanji pozitivan broj ω , ako postoji, zove se *osnovni period* funkcije.

Monotonost funkcije

Za funkciju $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ kaže se da je nad intervalom $I \subset D$:

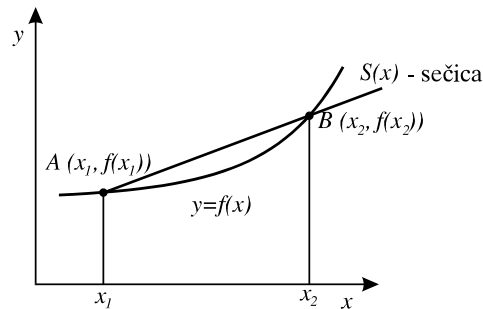
- monotono rastuća*, ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
- monotono opadajuća*, ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,
- monotono nerastuća*, ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$,
- monotono neopadajuća*, ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

U svakom od navedenih slučajeva se kaže da je funkcija *monotona* nad intervalom I .



Konveksnost i konkavnost

Konveksnost i konkavnost funkcije se posmatra nad intervalom $I \subset D \subset \mathbb{R}$.



Ako za svake dve tačke $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ i $x \in (x_1, x_2)$ sledi:

- $f(x) < S(x)$ funkcija je *konveksna* nad intervalom I ,
- $f(x) > S(x)$ funkcija je *konkavna* nad intervalom I .

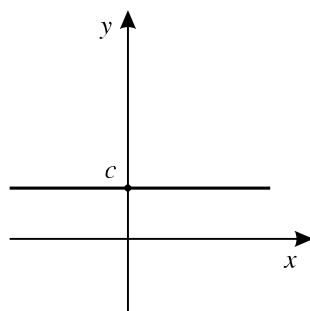
Ograničenost

Za funkciju $y=f(x)$ kažemo da je *ograničena sa donje strane* ako postoji broj M_1 , takav da je za svako $x \in D$, $f(x) \geq M_1$.

Funkcija f je *ograničena sa gornje strane* ako postoji broj M_2 , takav da je za svako $x \in D$, $f(x) \leq M_2$.

Funkcija je *ograničena* ako je ograničena i sa donje i sa gornje strane, tj. ako postoje brojevi M_1 i M_2 , takvi da je za svako $x \in D$, $M_1 \leq f(x) \leq M_2$, ili ako postoji pozitivan broj K , takav da je $|f(x)| \leq K$ za svako $x \in D$.

Konstantna funkcija $y = f(x) = c$



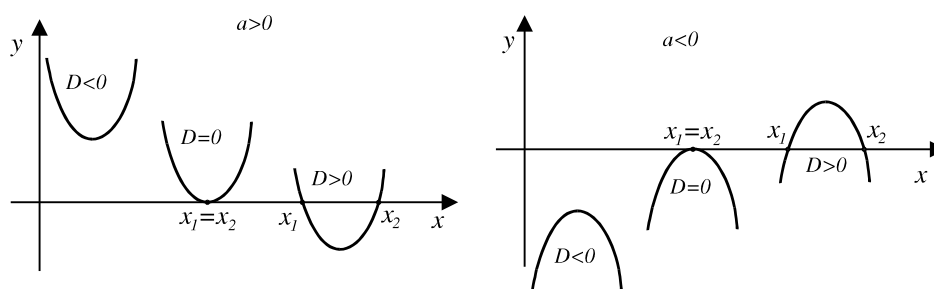
- $D: x \in \mathbb{R}$,
- monotono nerastuća i monotono neopadajuća,
- nije ni konveksna ni konkavna.

Parabola $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

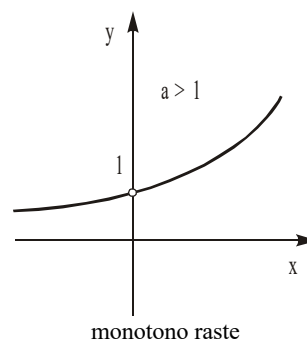
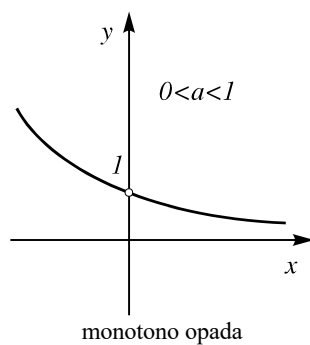
– $D: x \in \mathbb{R}$.

U zavisnosti od znaka diskriminante D ($D = b^2 - 4ac$) za rešenja (nule) funkcije se dobija:

- $D > 0$ – rešenja su realna i različita,
- $D = 0$ – rešenja su realna i jednaka,
- $D < 0$ – nema realnih nula (rešenja su konjugovano-kompleksna).



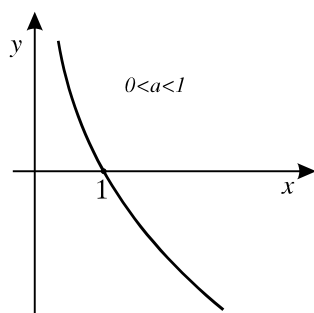
Eksponencijalna funkcija $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$



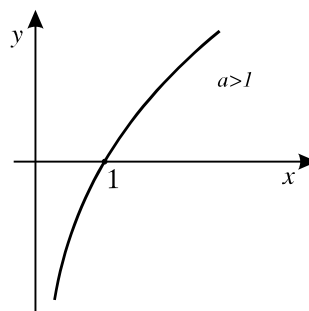
- $D: x \in \mathbb{R}$,
- funkcija nema nula,
- specijalan slučaj za $a=e$ ($y = e^x$) ili $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$.

Logaritamska funkcija $y = f(x) = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$

- $D: x \in \mathbb{R}^+$.
- Simetrična je u odnosu na pravu $y=x$ sa funkcijom $y = a^x$.
- Logaritamska funkcija je inverzna funkcija funkcije $y = a^x$.



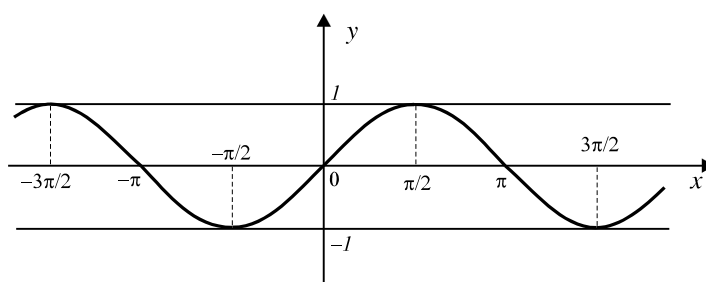
monotono opada



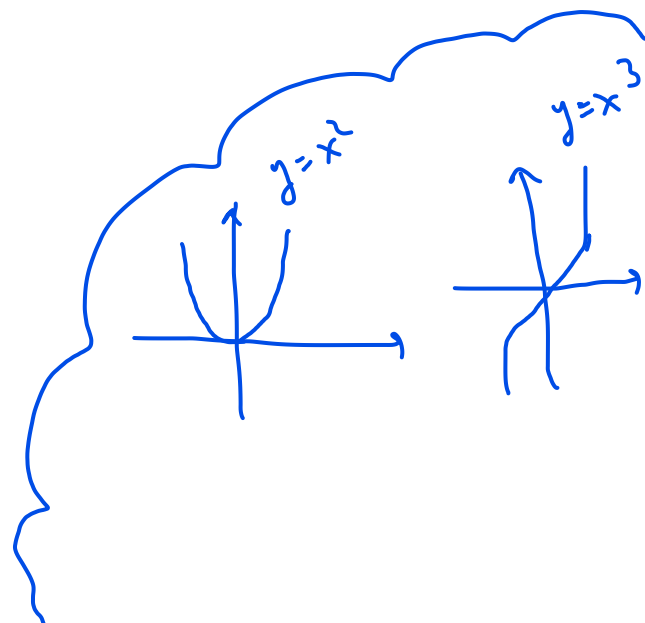
monotono raste

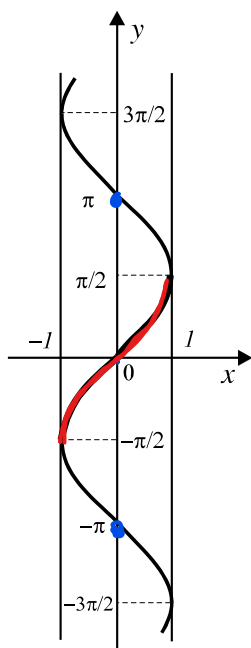
- $x=1$ je nula funkcije,
- $a=e=2,71828\dots$ $y=\ln x$,
- $a=10$ $y=\log x$.

$y=\sin x$



- $D: x \in \mathbb{R}$,
- skup vrednosti $[-1, 1]$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega = 2\pi$,
- $\sin(-x) = -\sin x$ (funkcija je neparna),
- $x=k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su nule funkcije.





$y = \arcsin x$

Funkcija $y = \sin x$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ na interval $[-1, 1]$.

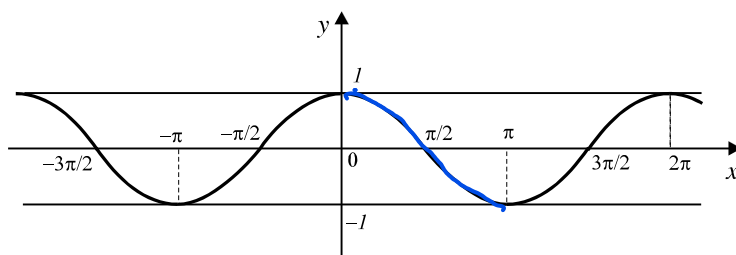
Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $[-1, 1]$ i skupom vrednosti $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Restrikcija funkcije $f(x) = \sin x$ nad intervalom $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = \arcsin x$.

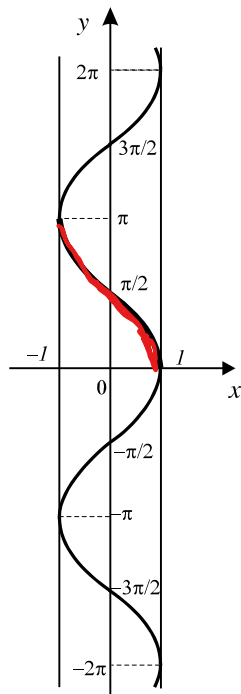
Simetrična je u odnosu na pravu $y = x$ sa $y = \sin x$.

- $D : x \in [-1, 1]$,
- skup vrednosti $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- $y = \arcsin(-x) = -\arcsin x$ (funkcija je neparna),
- funkcija monotonno raste.

$y = \cos x$



- $D : x \in \mathbb{R}$,
- skup vrednosti $[-1, 1]$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega = 2\pi$,
- $\cos(-x) = \cos x$ (funkcija je parna),
- $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su nule funkcije.



$y = \arccos x$

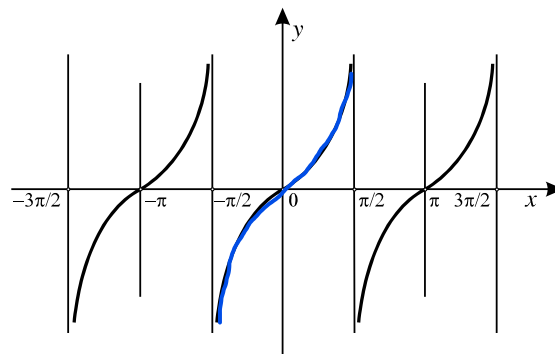
Funkcija $y = \cos x$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $[0, \pi]$ na interval $[-1, 1]$.

Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $[-1, 1]$ i skupom vrednosti $[0, \pi]$.

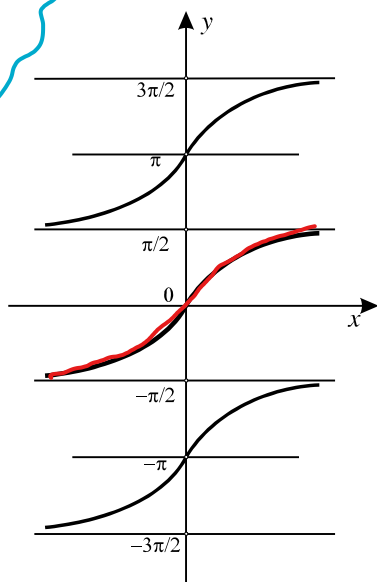
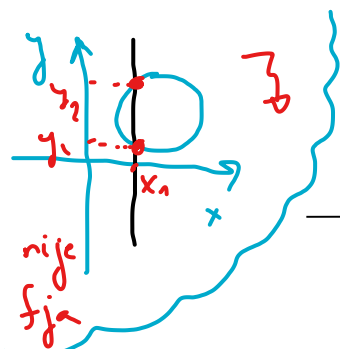
Restrikcija funkcije $f(x) = \cos x$ nad intervalom $[0, \pi]$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = \arccos x$.

- D: $x \in [-1, 1]$,
- Skup vrednosti $[0, \pi]$,
- Funkcija monotono opada.

$y = \operatorname{tg} x$



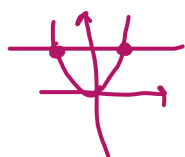
- definisana za svako $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- skup vrednosti funkcije je $(-\infty, \infty)$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega = \pi$,
- $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$ (funkcija je neparna),
- monotono je rastuća na svim intervalima oblika $(\frac{(2k+1)}{2}\pi, \frac{(2k+3)}{2}\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
- $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su nule funkcije.



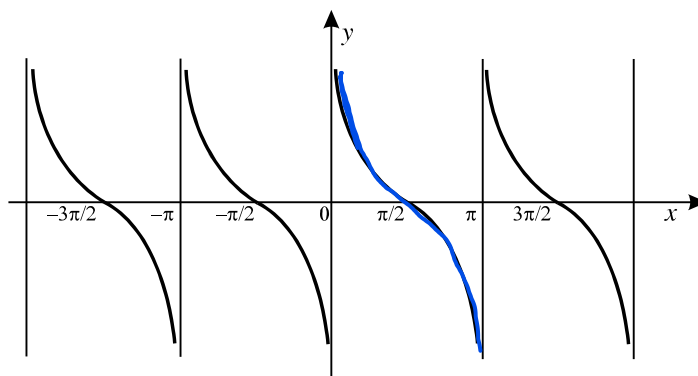
$y = \arctg x$

Funkcija $y = \tg x$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ na interval $(-\infty, \infty)$. Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa oblašću definisanosti $(-\infty, \infty)$ i skupom vrednosti $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Restrikcija funkcije $y = \tg x$ nad intervalom $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = \arctg x$.

- $D : x \in \mathbb{R}$,
- Skup vrednosti $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
- Monotono raste,
- $\arctg(-x) = -\arctg(x)$ - neparna.



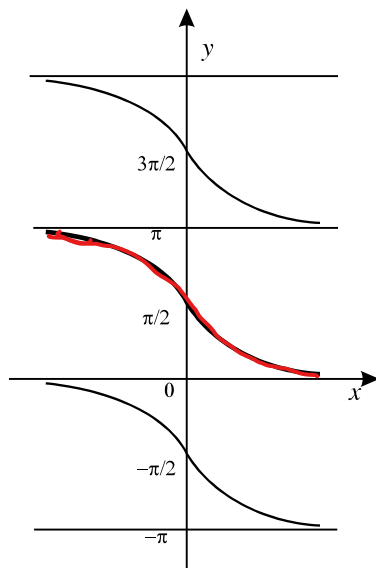
$y = \ctg x$



$$y = \ctg x = \frac{\cos x}{\sin x} \neq 0$$

- definisana za svako $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,
- skup vrednosti funkcije je $(-\infty, \infty)$,
- funkcija je periodična: osnovni period je $\omega = \pi$,
- $\ctg(-x) = -\ctg(x)$ (funkcija je neparna,
- funkcija monotonno opada na svim intervalima oblika $(k\pi, (k+1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$
- $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ su nule funkcije.

$y = \text{arctg} x$



Funkcija $y = \text{ctg} x$ obostrano jednoznačno (zbog monotonosti) preslikava interval $(0, \pi)$ na interval $(-\infty, \infty)$.

Zato je moguće definisati inverznu funkciju sa domenom $(-\infty, \infty)$ i skupom vrednosti $(0, \pi)$.

Restrikcija funkcije $y = \text{ctg} x$ nad intervalom $(0, \pi)$ ima inverznu funkciju, koja se označava sa $y = \text{arcctg} x$.

- $D : x \in \mathbb{R}$,
- skup vrednosti je $(0, \pi)$,
- monotono opada.