

**Kombinatorika, prostor verovatnoće i verovatnoća slučajnih događaja**

1. Od mesta  $A$  do mesta  $B$  vodi 5 puteva, a od mesta  $B$  do mesta  $C$  vode 3 puta. Koliko puteva vodi od mesta  $A$  do mesta  $C$  preko mesta  $B$ ?
2. Koliko se različitih vrsta značaka može napraviti ako se značke prave u obliku kruga, trougla, kvadrata ili šestougla, i u svaku značku se upisuje jedno veliko slovo abecede ( $A, B, C, \dots$ ) i jedna cifra ( $0, 1, 2, \dots, 9$ )?
3. Na koliko načina se može izabrati 5 knjiga iz kolekcije od 20 različitih knjiga?
4. Na koliko različitih načina učesnik u igri „loto 7/39” može popuniti tiket?
5. Na koliko različitih načina možemo izabrati 5 karata iz špila od 52 karte tako da među izabranim kartama bude
  - (a) tačno 2 keca,
  - (b) bar 2 keca,
  - (c) najviše 2 keca?
6. Na koliko različitih načina se može izabrati 8 karata iz špila od 52 karte tako da među izabranim kartama bude
  - (a) tačno 2 sedmice i 3 keca,
  - (b) tačno 2 sedmice i bar 3 keca?
7. Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva koji se mogu napisati od cifara 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 takvih da se u jednom broju
  - (a) ne mogu nalaziti iste cifre,
  - (b) mogu nalaziti iste cifre?
8. Koliko ima petocifrenih brojeva u kojima su sve cifre različite?
9. Eksperiment se sastoji od jednog bacanja kockice za igru. Posmatrajmo događaje:  
 $A$  - „pri bacanju je dobijen paran broj”,  
 $B$  - „pri bacanju je dobijen neparan broj”,  
 $C$  - „pri bacanju je dobijen broj manji od 3”.
  - (a) Napisati skup elementarnih događaja (ishoda eksperimenta)  $\Omega$ .
  - (b) Napisati događaje  $A$ ,  $B$  i  $C$  kao skupove elementarnih događaja.
  - (c) Koji su parovi događaja  $A$ ,  $B$ ,  $C$  disjunktni (nesaglasni, isključivi)?
10. Navesti skup elementarnih ishoda za sledeće eksperimente:
  - (a) bacanje jednog novčića,
  - (b) bacanje novčića dva puta,
  - (c) bacanje novčića tri puta,
  - (d) bacanje kockice za igru i jednog novčića,
  - (e) bacanje dva puta kockice za igru,
  - (f) registrovanje boje kuglice pri izvlačenju jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele, 4 crvene i 2 plave kuglice,
  - (g) registrovanje boja izvučenih kuglica ako se izvlači dva puta po jedna kuglica iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele, 4 crvene i 2 plave kuglice,
  - (h) registrovanje boja izvučenih kuglica ako se izvlače odjednom dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 3 bele, 4 crvene i 2 plave kuglice,
  - (i) registrovanje ispravnosti jedne sijalice,

- (j) registrovanje ispravnosti tri sijalice.
- (k) izvlačenje jedne kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 4 kuglice označene brojevima 1, 2, 3 i 4.
- (l) izvlačenje odjednom dve kuglice iz kutije u kojoj se nalaze 4 kuglice označene brojevima 1, 2, 3 i 4.
11. Meta se gađa sa 3 metka. Neka je  $S_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$  događaj „ $i$ -tim metkom je meta pogodena”. Preko događaja  $S_i$  izraziti događaje
- $A$  - „ostvarena su 3 pogotka”,  
 $B$  - „ostvarena su 3 promašaja”,  
 $C$  - „ostvaren je bar 1 pogodak”,  
 $D$  - „ostvaren je bar 1 promašaj”,  
 $E$  - „ostvarena su bar 2 pogotka”,  
 $F$  - „ostvaren je najviše 1 pogodak”.
12. Na osam listića papira se napisani brojevi 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, i na slučajan način se odabiraju dva listića. Izračunati verovatnoću da će zbir brojeva sa odabranih listića biti veći od 15.
13. Bacaju se dve kockice za igru, a iz kutije koja sadrži 3 bele i 4 crne kuglice izvlače se odjednom dve kuglice. Koji je od događaja
- $A$  - „na kockicama će pasti jednaki brojevi, ili brojevi čiji je zbir 5”,  
 $B$  - „iz kutije će se izvući dve crne kuglice, ili kuglice različitih boja”  
verovatniji?
14. Iz špila od 52 karte se nasumice izvlače 3 karte. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:
- $A$  - „izvući će se trojka, sedmica i kec”,  
 $B$  - „izvući će se tačno jedan kec”,  
 $C$  - „izvući će se bar jedan kec”,  
 $D$  - „izvući će se najviše dva keca”,  
 $E$  - „među izvučenim kartama biće tačno jedan kec i tačno dve tref karte”.
15. U posudi se nalazi 9 belih, 8 crvenih i 7 žutih kuglica. Izvlači se 8 kuglica odjednom. Izračunati verovatnoću da će biti izvučene 2 bele, 4 crvene i 2 žute kuglice.
16. Bacaju se bela i plava kockica za igru. Izračunati verovatnoće sledećih događaja:
- $A$  - „zbir palih brojeva biće manji od 9”,  
 $B$  - „na obe kockice će pasti isti broj”,  
 $C$  - „na belojoj kockici će pasti broj veći nego na plavojoj”,  
 $D$  - „na plavojoj kockici će pasti broj za dva veći od broja na belojoj kockici”,  
 $E$  - „na obe kockice će pasti parni brojevi čiji je zbir bar 8”,  
 $F$  - „bar na jednoj kockici će pasti broj 6”.
17. Na putu do posla inženjer prolazi pored dva semafora. Verovatnoća da će se morati zaustaviti kod prvog iznosi 0.4, a kod drugog 0.5. Takođe je poznato da verovatnoća da će morati da se zaustavi bar kod jednog semafora iznosi 0.6. Izračunati verovatnoće događaja
- $A$  - „inženjer će morati da se zaustavi kod oba semafora”,  
 $B$  - „inženjer će morati da se zaustavi samo kod prvog semafora”,  
 $C$  - „inženjer će morati da se zaustavi kod tačno jednog semafora”.
18. Na školskom takmičenju iz plivanja učestvuje 45 dece. 15 dece pliva kraul i delfin, 30 pliva kraul i 20 pliva delfin. Izračunati verovatnoće događaja:
- $A_1$  - „slučajno odabrano dete pliva samo kraul”,  
 $A_2$  - „slučajno odabrano dete pliva tačno jednu od navedenih disciplina”,  
 $A_3$  - „slučajno odabrano dete pliva delfin ili kraul”,  
 $A_4$  - „slučajno odabrano dete ne pliva ni delfin ni kraul”.
19. Koliko iznosi verovatnoća da iz špila od 32 karte 3 puta zaredom izvučemo kralja ako
- (a) izvučenu kartu svaki put vraćamo u špil,  
(b) izvučene karte ne vraćamo u špil?
20. U kutiji se nalaze 3 zelene i 4 bele kuglice. Pera izvlači 3 puta po jednu kuglicu iz kutije

- (a) bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju,
- (b) sa vraćanjem izvučene kuglice u kutiju.

Izračunati verovatnoću događaja  $A$  – „Pera će izvući bar jednu kuglicu bele boje

21. U kutiji se nalaze 3 obična novčića i jedan defektni novčić koji ima grb sa obe strane. Na slučajan način se iz kutije bira jedan novčić i baca 2 puta.
  - (a) Izračunati verovatnoću da će oba puta pasti grb.
  - (b) Ako je oba puta pao grb, koliko iznosi verovatnoća da je iz kutije izabran ispravan novčić?
22. U tri magacina se nalaze mašinski strugovi, i to:
  - magacin 1: 10 strugova, od čega 4 neispravna,
  - magacin 2: 6 strugova, od čega 1 neispravna,
  - magacin 3: 8 strugova, od čega 3 neispravna.
 Iz slučajno odabranog magacina se nasumice odabira jedan strug.
  - (a) Izračunati verovatnoću da će odabrani strug biti neispravan.
  - (b) Izračunati verovatnoću da je odabrani strug iz magacina 2 ako se zna da je taj strug ispravan.
23. Prva kutija sadrži 5 crvenih i 6 belih kuglica, a druga kutija sadrži 4 crvene i 4 bele kuglice. Iz prve kutije se nasumice izvlači jedna kuglica i premešta u drugu kutiju. Zatim se iz druge kutije na slučajan način izvlači jedna kuglica.
  - (a) Izračunati verovatnoću da će se iz druge kutije izvući crvena kuglica.
  - (b) Ako se zna da je iz druge kutije izvučena crvena kuglica, koliko iznosi verovatnoća da je iz prve u drugu kutiju premeštena crvena kuglica?
24. Od ukupne proizvodnje jedne zanatske radionice, 50% se proizvodi na mašini  $M_1$ , 20% na mašini  $M_2$ , i 30% na mašini  $M_3$ . Na mašini  $M_1$  se u proseku napravi 3% neispravnih proizvoda (škarta), na mašini  $M_2$  u proseku 5%, a na mašini  $M_3$  u proseku 4% neispravnih proizvoda. Na slučajan način se bira jedan proizvod iz posmatrane radionice.
  - (a) Izračunati verovatnoću da će odabrani proizvod biti ispravan.
  - (b) Ako je odabrani proizvod ispravan, koliko iznosi verovatnoća da je on proizveden na mašini  $M_3$ ?
25. Pera bira jednu od dve kutije  $K_1$  i  $K_2$  i to dvostrukoverovatnije kutiju  $K_1$  nego kutiju  $K_2$ , a zatim iz kutije izvlači 2 kuglice. U kutiji  $K_1$  se nalaze dve kuglice označene brojem 1 i tri kuglice označene brojem 2. U kutiji  $K_2$  se nalazi jedna kuglica označena brojem 1 i četiri kuglice označene brojem 2. Ako je zbir izvučenih brojeva jednak 3 izračunati verovatnoću da je Pera izvlačio kuglice iz prve kutije.

### Slučajne promenljive diskretnog tipa

1. Firma na raspolaganju ima šest telefonskih linija. Neka je  $X$  broj linija zauzetih u određenom trenutku. Zakon raspodele za  $X$  dat je sa

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0.1 & 0.15 & 0.2 & 0.25 & 0.2 & 0.06 & 0.04 \end{pmatrix}.$$

- (a) Izračunati verovatnoće sledećih događaja
    - $A$  - „bar tri linije su zauzete”,
    - $B$  - „manje od dve linije su zauzete”,
    - $C$  - „najmanje četiri linije nisu zauzete”,
    - $D$  - „zauzeto je između dve i pet linija”.
  - (b) Izračunati  $F_X(1.3)$ ,  $F_X(3)$  i  $F_X(4.6)$ .
  - (c) Naći funkciju raspodele  $F_X(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  i grafički je predstaviti.
2. U kutiji se nalaze tri kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 2 i dve kuglice označene brojem 3. Na slučajan način izvlačimo jednu kuglicu iz kutije. Neka je  $X$  slučajna promenljiva koja predstavlja izvučeni broj.
    - (a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive  $X$ .

- (b) Izračunati  $F_X(2.5)$ ,  $F_X(-1)$ ,  $F_X(2)$  i  $F_X(5)$ .
- (c) Naći funkciju raspodele,  $F_X(x)$ , za slučajnu promenljivu  $X$  i grafički je predstaviti.
3. U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1, četiri kuglice označene brojem 3, i jedna kuglica označena brojem 5. Na slučajan način izvlačimo odjednom dve kuglice iz kutije. Neka je  $X$  slučajna promenljiva koja predstavlja zbir izvučenih brojeva. Naći zakon raspodele slučajne promenljive  $X$ .
  4. U kutiji se nalaze 4 bele i 6 zelenih kuglica. Pera izvlači jednu po jednu kuglicu bez vraćanja izvučene kuglice u kutiju sve dok ne izvuče zelenu kuglicu. Slučajna promenljiva  $X$  predstavlja broj izvedenih izvlačenja. Naći zakon raspodele slučajne promenljive  $X$  i izračunati  $F_{2X+1}(5)$  i  $F_{X^2}(6)$ .
  5. Biljana baca kockicu za „*Ne ljuti se čoveče*”. Slučajna promenljiva  $X$  predstavlja vrednost ostatka pri deljenju palog broja sa 4. Napisati zakon raspodele slučajne promenljive  $X$ .
  6. U kutiji se nalazi 5 crvenih i 3 bele kuglice. Slavica izvlači tri kuglice istovremeno. Slučajna promenljiva  $X$  predstavlja broj izvučenih belih kuglica. Naći zakon raspodele slučajne promenljive  $X$ .
  7. Kockica se baca do prve pojave šestice ali najviše četiri puta. Neka slučajna promenljiva  $X$  predstavlja ukupan broj izvedenih bacanja.
    - (a) Naći zakon raspodele slučajne promenljive  $X$ .
    - (b) Izračunati  $P(2 \leq X < 4)$ ,  $P(2 < X < 4)$  i  $P(X < 3)$ .
  8. U kutiji se nalazi 5 belih i 3 zelene kuglice. Zoran na slučajan način izvlači jednu po jednu kuglicu
    - (a) bez vraćanja
    - (b) sa vraćanjem
 dok ne izvuče kuglicu zelene boje. Naći zakon raspodele slučajne promenljive  $X$  koja predstavlja broj izvlačenja.
  9. U kutiji se nalaze dve kuglice označene brojem 1, tri kuglice označene brojem 2 i četiri kuglice označene brojem 3. Vlada na slučajan način bira odjednom dve kuglice iz kutije. Naći zakon raspodele slučajne promenljive  $X$  koja predstavlja ostatak pri deljenju zbira izvučenih brojeva sa 3.
  10. Na pravcu kretanja automobila se nalaze tri semafora. Verovatnoća zaustavljanja automobila na prvom semaforu je 0.4, na drugom 0.6 i na trećem 0.5. Semafori rade nezavisno jedan od drugog. Naći raspodelu slučajne promenljive  $X$  koja predstavlja broj semafora koje je vozač automobila prošao do prvog zaustavljanja.
  11. U kutiji se nalaze 3 bele i 1 zelena kuglica. Ljubo na slučajan način izvlači jednu kuglicu. Ako izvuče belu kuglicu baca ispravan novčić dva puta. Ako izvuče zelenu kuglicu baca dva puta novčić koji sa obe strane ima grb. Naći zakon raspodele slučajne promenljive  $X$  koja predstavlja broj pojavljivanja pisma u opisanom eksperimentu.
  12. Strelac gađa metu. Verovatnoća pogotka u svakom nezavisnom gađanju je 0.6.
    - (a) Ako strelac na raspolaganju ima četiri metka, naći raspodelu slučajne promenljive  $X$  koja predstavlja broj ostvarenih pogodaka.
    - (b) Ako strelac na raspolaganju ima sto metaka, naći raspodelu slučajne promenljive  $Y$  koja predstavlja broj promašaja.
    - (c) Ako strelac gađa metu do prvog pogotka naći raspodelu slučajne promenljive  $U$  koja predstavlja broj ispaljenih metaka.
    - (d) Ako strelac gađa metu do prvog promašaja naći raspodelu slučajne promenljive  $V$  koja predstavlja broj ispaljenih metaka.
  13. Pretpostavimo da broj telefonskih poziva ima Poasonovu raspodelu sa parametrom  $\lambda = 2$  na sat.
    - (a) Izračunati verovatnoću da će u toku sata biti obavljeno tačno tri telefonska poziva.
    - (b) Izračunati verovatnoću da će u toku jednog sata biti obavljeno najviše dva telefonska poziva.
    - (c) Izračunati verovatnoću da će u toku jednog sata biti obavljeno najmanje dva telefonska poziva.
  14. Pretpostavimo da se prosečno 20% od ukupnog broja vozača zaustavi na raskrsnici na kojoj svetle crvena svetla na svim pravcima kada nema drugih vozila na vidiku. Na slučajan način je uočeno trideset vozača.

- (a) Naći raspodelu slučajne promenljive  $X$  koja predstavlja broj vozača koji se zaustave na semaforu. Izračunati verovatnoću da se među posmatranim vozačima najviše njih pet zaustavilo na semaforu.
- (b) Naći približnu raspodelu  $Y$  slučajne promenljive koja predstavlja broj vozača koji se zaustave na semaforu, a zatim pomoću nje izračunati verovatnoću da se među posmatranim vozačima najviše njih pet jeste zaustavilo na semaforu.
15. Košarkaš gađa koš 1000 puta. Verovatnoća promašaja u svakom nezavisnom gađanju je 0.005. Naći raspodele slučajnih promenljivih  $X$  i  $Y$  koje predstavljaju redom tačan i približan broj promašaja.

### Slučajne promenljive apsolutno neprekidnog tipa

1. Knjiga u čitaonici se iznajmljuje najduže na dva sata. Neka slučajna promenljiva  $X$  označava vreme zadržavanja knjige kod slučajno izabranog studenta. Gustina slučajne promenljive  $X$  data je sa

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

- (a) Izračunati  $F_X(1.2)$ ,  $F_X(-1)$ ,  $F_X(3.5)$ , a zatim naći funkciju raspodele  $F_X(x)$  za svako  $x \in \mathbb{R}$ .
- (b) Kolika je verovatnoća da će knjiga biti izdata između sat i sat i po vremena?
- (c) Izračunati verovatnoće  $P(X \leq 1)$ ,  $P(X > 1.5)$  i  $P(X = 1)$ .
- (d) Grafički predstaviti funkciju gustine i funkciju raspodele.
2. Profesor nikada ne završi čas pre zvona, ali završi u toku prve minute nakon zvona. Neka  $X$  predstavlja vreme (izraženo u minutima) koje prođe od zvona do završetka predavanja. Gustina za  $X$  data je sa

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} kx^2, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

- (a) Odrediti konstantu  $k$ .
- (b) Naći funkciju raspodele za  $X$ .
- (c) Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen najduže pola minute?
- (d) Kolika je verovatnoća da će čas biti produžen više od 40 sekundi?
3. Na putu za posao, profesor prvo mora da „hvata” autobus blizu kuće koji ga odvozi do stajališta za drugi autobus koji ga vozi do posla. Slučajna promenljiva  $X$  predstavlja vreme čekanja oba autobusa (izraženo u minutama) i data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & 0 \leq x < 5, \\ \frac{2}{5} - \frac{1}{25}x, & 5 \leq x \leq 10, \\ 0, & x \notin [0, 10]. \end{cases}$$

- (a) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” više od 6 minuta?
- (b) Kolika je verovatnoća da će na čekanje „izgubiti” između 3 i 8 minuta?
- (c) Naći funkciju raspodele  $F_X$ .
- (d) Grafički predstaviti funkcije  $\varphi_X$  i  $F_X$ , a zatim obeležiti  $P(X < 6)$ .
4. Neprekidna slučajna promenljiva  $X$  data je funkcijom raspodele:

$$F_X(x) = \begin{cases} b, & x \leq 1, \\ \frac{(x-1)^3}{27}, & 1 < x \leq 4, \\ 3a, & x > 4. \end{cases}$$

Odrediti konstante  $a$  i  $b$  i naći gustinu za  $X$ .

5. Neka je  $X$  vreme (izraženo u satima) između dolaska dva klijenta u banku i neka  $X$  ima eksponencijalnu raspodelu sa parametrom  $a = 0.2$ .
- (a) Skicirati grafike funkcije gustine i funkcije raspodele slučajne promenljive  $X$ . Na grafiku funkcije gustine predstaviti  $P(X \geq 0.2)$ .



3. Nепреkidna slučajna promeњljiva  $X$  data je gustinom

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x \in [0, 2], \\ 0, & x \notin [0, 2]. \end{cases}$$

Naći matematičko očekivanje i disperziju za  $X$  i  $Y = 2X + 1$ . Naći matematičko očekivanje za  $Z = -X^2 + 3X - 4$ .

4. Slučajna promeњljiva  $X$  ima uniformnu  $\mathcal{U}(2, 4)$  raspodelu. Neka je slučajna promeњljiva  $Y = -2X + 5$ . Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajnih promeњljivih  $X$  i  $Y$ .
5. Slučajna promeњljiva  $X$  ima eksponencijalnu  $\mathcal{E}(3)$  raspodelu. Neka je slučajna promeњljiva  $Y = -X + 5$ . Izračunati matematičko očekivanje i disperziju slučajnih promeњljivih  $X$  i  $Y$ .
6. Naći matematičko očekivanje i disperziju za slučajne promeњljive  $X$  i  $Y$  koje imaju normalnu  $\mathcal{N}(0, 1)$  i  $\mathcal{N}(-3, 4)$  raspodelu, redom.