A "REFUTATION" OF CH AND A REFUTATION OF FREILING ARGUMENT AGAINST CH

Z. ŠIKIĆ

$$\boxed{\text{CH i.e. } 2^{\aleph_0} = \aleph_1}$$

HILBERT'S #1

PARIS ICM 1900

HEIDELBERG ICM 1904

KÖNIG: $(\forall \alpha)\, 2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha$

BERNSTEIN: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$

SIERPINSKI 1919, CH

IS EQUIVALENT TO:

THE PLANE IS THE UNION OF TWO SETS A & B, S.T. EACH VERTICAL SECTION OF A AND EACH HORIZONT. SECTION OF B IS COUNTABLE.

(THE UNION OF COUNTABLY MANY FUNCTIONS $y=f(x)$ AND $x=g(y)$)

"IT MUST BE FALSE"

SIERPINSKI 1965:

$2^{\aleph_0} = \aleph_n$ IFF

$(\exists A_1, \ldots, A_{n+2})$

$\mathbb{R}^{n+2} = A_1 \cup \ldots \cup A_{n+2}$ &

$(\forall L_i)$ $A_i \cap L_i$ FINITE

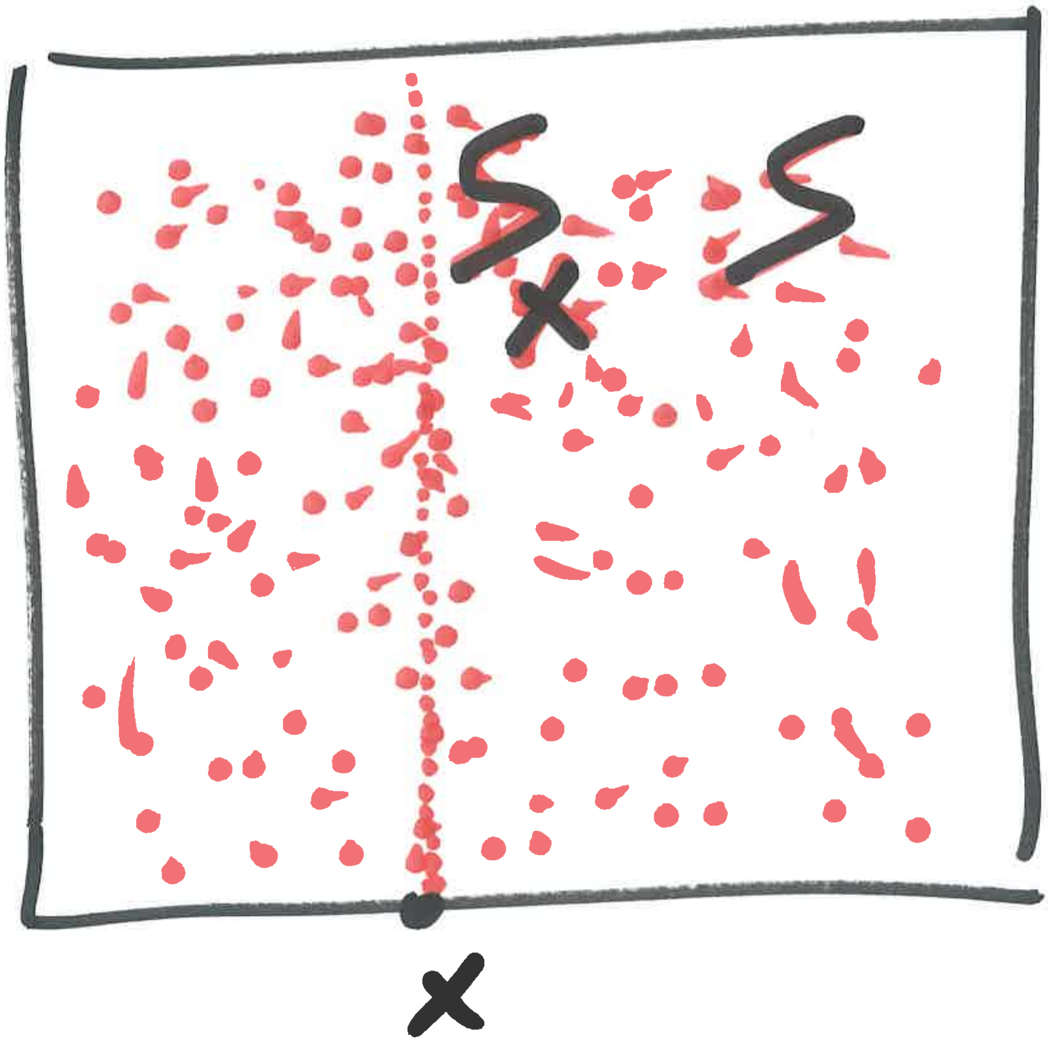
L_i: LINE PARALEL x_i.

THE SQUARE $J^2 = (0,1)^2$ IS THE UNION OF S AND $S' = \{(y,x) : (x,y) \in S\}$ S.T. EACH VERTICAL SECTION OF S (S_x) IS COUNTABLE

(THE UNION OF COUNTABLY MANY FUNCTIONS AND ITS INVERSES)

"IT MUST BE FALSE"

"IT MUST BE FALSE"



$(\forall x)\ S_x$ COUNTABLE

& $S \cup S' = I^2$

$\left(S_x = \{(x,y)\} \overset{!}{=} \{y\}\right)$

PROOF: CH $\Rightarrow$

$\mathbb{J} = (x_\alpha : \alpha < \aleph_1)$

$S := \{(x_\alpha, x_\beta) : \alpha \geq \beta\}$

$\Rightarrow \quad S \cup S' = \mathbb{J}^2$ &

$(\forall \alpha)\ S_{x_\alpha}$ COUNTABLE

$(\{\beta : \alpha \geq \beta\}$ COUNTABLE$)$

$\neg CH$ & $(\forall x) S_x$ COUNTABLE

$\Longrightarrow (\exists U \subseteq J)\ |U| = \aleph_1$

$V := \bigcup_{x \in U} S_x \Longrightarrow$

$|V| = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1 \Longrightarrow$

$\exists a \in J \setminus V$ & $(\forall x \in U)\ a \notin S_x$

$\exists b \in U \setminus S_a \quad (\aleph_1 \setminus \aleph_0)$

$b \notin S_a$ & $a \notin S_b$ i.e.

$(a,b) \notin S$ & $(b,a) \notin S$

7

3. Nous connaissons très peu des théorèmes qui sont équivalents à l'hypothèse du continu.

En 1919 j'ai démontré [1]) que *l'hypothèse du continu est équivalente au théorème que l'ensemble de tous les points du plan est une somme de deux ensembles, dont un est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe d'abscisses et l'autre est au plus dénombrable sur toute parallèle à l'axe des ordonnées.*

Voici la démonstration. Admettons l'hypothèse du continu et soit

$$t_1,\ t_2,\ t_3, \ldots,\ t_\omega,\ t_{\omega+1}, \ldots,\ t_\lambda, \ldots \qquad (\lambda < \Omega) \tag{2}$$

une suite transfinie du type Ω, formée du tous les nombres réels différents [2]), Ω désignant le plus petit nombre transfini de la 3ème classe).

Désignons par A l'ensemble de tous les points du plan P au coordonnées (t_α, t_β), où $\alpha \leqslant \beta$, et posons $B = P - A$.

Soit b un nombre réel donné: c'est donc un terme de la suite (2), p. ex. $b = t_\beta$ (où β est un nombre ordinal $< \Omega$). Les points de l'ensemble A, dont l'ordonnée y est égale à b, sont des points (t_λ, t_β), pour lesquels $\lambda \leqslant \beta$; β étant $< \Omega$, il en résulte que la droite $y = b$ contient un ensemble au plus dénombrable de points de A. Or, soit a un nombre réel donné, p. ex. $a = t_\alpha$. Les points de $B = P - A$ à l'abscisse $x = a$ sont, comme on voit sans peine, des points (t_α, t_λ), pour lesquels $\lambda < \alpha$: d'après $\alpha < \Omega$ on en conclut que la droite $x = a$ contient un ensemble au plus dénombrable de points de B.

L'hypothèse du continu entraîne donc l'existence d'une décomposition du plan $P = A + B$, jouissant des propriétés désirées. Nous allons maintenant démontrer qu'inversement, l'existence d'une telle décomposition entraine l'hypothèse du continu.

Admettons que l'hypothèse du continu est fausse et soit E un ensemble formé de $\aleph_1$ parallèles à l'axe d'abscisses: désignons par N l'ensemble de tous les points de A qui sont situés sur les parallèles formant E. Toute droite de E contenant un ensemble au plus dénombrable de points de A (d'après la propriété de A) et l'ensemble E contenant $\aleph_1$ droites, il s'ensuit que l'ensemble N a une puissance au plus égale à $\aleph_1$. Il en résulte, à plus forte raison, que la projection orthogonale de l'ensemble N sur l'axe des abscisses a une puissance $\leqslant \aleph_1$. Donc, si la puissance du continu n'est pas $\aleph_1$, il existe un point x_0 sur l'axe d'abscisses qui n'est la projection d'aucun point de l'ensemble N sur cet axe. Par conséquent, tout point d'intersection de la droite $x = x_0$ avec une parallèle à l'axe des abscisses faisant partie de E appartient à l'ensemble $P - A = B$. La droite $x = x_0$ contiendrait donc un ensemble non dénombrable de points de l'ensemble B, contrairement à la propriété de cet ensemble. Notre théorème est ainsi démontré.

(7)

$S_x = S(x)$ i.e. S IS A FUNCTION FROM $\mathbb{J}$ TO COUNTABLE SUBSETS OF $\mathbb{J}$ & SIERPINSKI EQUIVALENT IS:

$$(\exists S : \mathbb{J} \to \mathbb{J}_{\aleph_0})(\forall x, y \in \mathbb{J})(x \in S(y) \vee y \in S(x))$$

THE NEGATION IS EQUIVALENT TO $\neg$CH & KNOWN AS FREILING SYMMETRY AXIOM

$$(\forall S : \mathbb{J} \to \mathbb{J}_{\aleph_0})(\exists x, y \in \mathbb{J})$$

$$(x \notin S(y) \;\&\; y \notin S(x))$$

FREILING OFFERED AN ARGUMENT IN SUPPORT OF THE AXIOM:

IF WE RANDOMLY CHOOSE x, y THE PROB. OF $x \notin S(y)$ AND OF $y \notin S(x)$ IS 1, BECAUSE $S(x), S(y)$ COUNTABLE, HENCE RANDOMLY CHOSEN x & y ARE THE WITNESSES WE NEEDED.

IF X IS CHOSEN THEN

$Pr(y \notin S(x)) = 1$.

SINCE WE CAN PREDICT THIS NO MATTER WHICH X IS CHOSEN, WE MAY PREDICT $Pr(y \notin S(x)) = 1$ BEFORE X IS CHOSEN.

BY SYMMETRY WE MAY PREDICT $Pr(x \notin S(y)) = 1$ FOR CHOSEN y, NO MATTER WHICH y IS CHOSEN, BEFORE y IS CHOSEN.

HENCE:

BEFORE x & y ARE CHOSEN WE MAY PREDICT THAT

$\Pr(x \notin S(y)) = 1$ FOR CHOSEN y &

$\Pr(y \notin S(x)) = 1$ FOR CHOSEN x

AND THEREFORE RANDOMLY CHOSEN x & y ARE WITNESSES FOR F. SYMMETRY AXIOM.

(9")

IT DOES NOT MEAN

$\{(x,y) : x \notin S(y)\}$ OR

$\{(x,y) : y \notin S(x)\}$ HAVE

PROBABILITY (i.e. ARE MEASURABLE)

THEY ARE PROVABLY NONMEASURABLE!!

THEIR x/y SECTIONS ARE MEASURABLE (WITH MEASURE 0)

Mumford, D. *The dawning age of stohasticity,*
in V. Arnold, M. Atiyah et al. (eds),
Mathematics, frontiers and perspectives,
pp. 197-218, American Math. Society, 2000.

Freiling used the argument to motivate a new axiom of set theory which disproves the continuum hypothesis. I believe we should go much further: his 'proof ' shows that if we make random variables one of the basic elements of mathematics, it follows that the CH is false and we will get rid of one of the meaningless conundrums of set theory.

MY "REFUTATION" OF CH:

$$(\exists S: \mathbb{J} \to \mathcal{P}(\mathbb{J}))(\forall x, y \in \mathbb{J})$$

$$[x \in S(x) \;\&\; |S(x)| < |\mathbb{J}| \;\&$$

$$(S(x) \subseteq S(y) \vee S(y) \subseteq S(x))]$$

NAMELY, IF $(x_\alpha : \alpha < |\mathbb{J}|)$ WELL ORDERES $\mathbb{J}$ THEN

$$S(x_\alpha) := \{x_\beta : \beta \leq \alpha\}$$

HAS DESIRED PROPERTIES

(PROVABLE IN ZFC)

$$CH \Rightarrow (\forall x)\ |S(x)| \leq \aleph_0$$

$$\Rightarrow Pr(x \notin S(y)) = 1$$

$$Pr(y \notin S(x)) = 1$$

$$* \Rightarrow Pr(x \notin S(y) \mid y \notin S(x)) = 1$$

$$y \notin S(x) \ \& \ y \in S(y) \Rightarrow S(y) \notin S(x$$

$$\Rightarrow S(x) \subseteq S(y) \ \& \ x \in S(x)$$

$$\Rightarrow x \in S(y) \qquad \perp$$

*

$$Pr(S)=Pr(T)=1 \Rightarrow$$

$$Pr(\bar{S})=Pr(\bar{T})=0 \Rightarrow$$

$$Pr(\bar{S}\vee\bar{T})\leq Pr(\bar{S})+Pr(\bar{T})=0$$

$$\Rightarrow Pr(\overline{\bar{S}\vee\bar{T}})=Pr(S\,\&\,T)=1$$

$$\Rightarrow pr(S)\,pr(T|S)=1$$

$$\Rightarrow pr(T|S)=1$$

Thank you very much for your recent submission to the JSL. I think that it gives an elegant retelling of the Freiling "paradox" in probabilistic terms, however, regretfully, it does not really advance the subject significantly enough to warrant publication. In any case, thank you for considering the JSL for your paper.

IT IS WORSE THEN THA

THERE IS AN ERROR IN MY "REFUTATION" OF CH !!

WE DO NOT HAVE:

$$\Pr(x \notin S(y)) = \Pr(y \notin S(x)) = 1$$

WE HAVE:

$$\Pr(x \notin S(y) \mid \text{GIVEN } y) = \Pr(y \notin S(x) \mid \text{GIVEN } x) = 1$$

AND FROM THIS

$$\Pr(x \notin S(y) \mid y \notin S(x)) = 1$$

DOES NOT FOLLOW

12a

I BELIEVE CH IS FALSE

I.E. FSA IS TRUE

I DO NOT BELIEVE FREILING ARGUMENT IS AN ARGUMENT FOR THAT BECAUSE

$Pr(x \notin S(y) \mid y \text{ GIVEN}) = 1$ &

$Pr(y \notin S(x) \mid x \text{ GIVEN}) = 1$

$$\not\Longrightarrow$$

$\underline{\underline{Pr}}(x \notin S(y) \,\&\, y \notin S(x)) = 1$

(EVEN FOR AN INTUITIVE $\underline{\underline{Pr}}$)

1. $\not\Rightarrow$

THE MOST COMMON MATH-EMATICAL CRITICISM:

$\{(x,y) : x \notin S(y) \ \& \ y \notin S(x)\}$

IS NOT L. MEASURABLE I.E.

$\underline{\underline{Pr}}(x \notin S(y) \ \& \ y \notin S(x))$

DOES NOT EXIST!

FREILING DISCUSSED THAT: HIS $\underline{\underline{Pr}}$ IS JUST AN <u>INTUITION</u>

2. $\not\Rightarrow$

WE KNOW (SINCE 1919) THAT IF CH IS TRUE THEN THERE IS AN S SUCH THAT

$x \notin S(y) \,\&\, y \notin S(x)$ *

IS FALSE FOR EVERY x, y!

HENCE, IF WE ARGUE THAT * IS TRUE FOR SOME x, y WE HAVE TO PRESUPPOSE THAT CH IS NOT TRUE

BUT THEN, THIS COULD NOT BE AN ARGUMENT AGAINST CH

CONCLUSION :

FREILING ARGUMENT FOR SYMMETRY AXIOM MUST PRESUPOSE THAT CH IS FALSE & THIS DISQUALIFIES THE ARGUMENT AS AN ARGUMENT FOR FALSITY OF CH

$$P\big((\forall \varepsilon)(\exists N)(\forall h)(G_{N+h} \le \varepsilon)\big) = 1$$

$$P\big((\forall m)\underbrace{(\exists N)(\forall h)\left(G_{N+h} \le \tfrac{1}{m}\right)}_{A_m}\big) = 1$$

$$P(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \cdots) = 1$$

$$\& \quad A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \cdots \implies$$

$$(\forall m)\, P(A_m) = 1$$

$$(\forall \varepsilon)\, P\big((\exists N)(\forall h)(G_{N+h} \le \varepsilon)\big) = 1$$