

GENERALIZIRANI TRAG I NORMALNE FORME ZA LOGIKU INTERPRETABILNOSTI

VEDRAN ČAČIĆ

ABSTRACT.

Poznat je pojam traga u sustavu logike dokazivosti (GL), pomoću kojeg se za njen zatvoreni fragment dobivaju normalne forme kao booleovske kombinacije “propozicionalnih varijabli” $\Box^n \perp$. Teorija GL je nastala kao rezultat nastojanja formaliziranja rasprava o predikatu dokazivosti proizašlom iz proučavanja Peanove aritmetike, u pokušaju generalizacije i sistematizacije Gödelovih rezultata.

Trag za logiku dokazivosti uveo je S. Artemov, kao potpuni opis semantike proizvoljne GL rečenice, odnosno svjetova na kojima ona vrijedi. Ključna činjenica je da dubina svijeta s obzirom na relaciju dostiživosti u standardnim GL modelima u potpunosti karakterizira svijet u slučaju bez propozicionalnih varijabli, te skup svih takvih dubina (svjetova na kojima rečenica vrijedi, odnosno ne vrijedi) daje svu informaciju o njenoj semantici.

Logika interpretabilnosti (IL) uvedena je od strane A. Vissera, kao pokušaj finijeg razlikovanja teorija ne samo s obzirom na apsolutnu dokazivost, već relativnu interpretabilnost njenih proširenja. To prirodno vodi do binarnog modalnog operatora $\triangleright$, kojeg je unarni $\Box$ iz teorije GL samo specijalni slučaj. Karakterizacija svijeta u kanonskim IL modelima (tzv. Veltmanovim modelima, odnosno Veltmanovim okvirima ako nemamo propozicionalnih varijabli) sada je kompliciranija nego samo promatranje njegove dubine, pa pristup pomoću traga ne daje normalne forme.

Ipak, pokazuje se jedna začuđujuća činjenica: iako postoje IL-rečenice koje razlikuju svjetove finije nego što to čini dubina, one su izuzetno rijetke. Kad se promatra globalna ekvivalencija na modelima, što je uobičajeno kod normalnih formi, postaju još rjeđe. Zapravo, iz oko 95% IL rečenica (asimptotski gledano) može se eliminirati operator $\triangleright$, odnosno one imaju normalne forme iste kao u slučaju GL.

Iako to naravno ne daje potpunu klasifikaciju normalnih formi IL rečenica, smatramo da je fascinantno koliko je malo izražajnija logika IL od GL u zatvorenom fragmentu.