

# Računanje generaliziranog traga za zatvoreni fragment logike interpretabilnosti

Marko Doko

Sveučilište u Zagrebu  
PMF – Matematički odsjek

Dubrovnik  
Sustavi dokazivanja  
28. lipnja 2012.

# Malo o dizajnu softvera

- Formule i sheme čuvamo kao stabla.
- Na ulazu dozvoljavamo sve veznike (osim bikondicionala) i modalne operatore, konstante  $\perp$ ,  $\top$  i  $\star$ , te pokrate za često korištene sheme  $A = \star \triangleright \star$ ,  $N = \neg A$  i  $X = \neg(N \triangleright A)$ .
- Prije računanja traga formula se prevede u kanonski oblik (koriste se samo  $\perp$ ,  $\rightarrow$  i  $\triangleright$ ):

$$\neg(F \rightarrow \perp) \iff F$$

$$\neg F \iff F \rightarrow \perp$$

$$\top \iff \neg \perp$$

$$F \vee G \iff \neg F \rightarrow G$$

$$F \wedge G \iff \neg(F \rightarrow \neg G)$$

$$F \leftrightarrow G \iff (F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F)$$

$$\diamond F \iff \neg \square \neg F$$

$$\square F \iff \neg F \triangleright \perp$$

# Računanje traga

- Za zapisivanje traga u računalu bitno je da su tragovi IL shema nakon nekog mjesta konstantni.
- Računanje traga provodimo direktnom primjenom definicije:

$$\text{Tr}(\perp) := (-1, -1, -1, \dots)$$

$$\text{Tr}(\star) := (0, 0, 0, \dots)$$

$$\text{Tr}(F \rightarrow G)_n := \max\{-\text{Tr}(F)_n, \text{Tr}(G)_n\}$$

$$\text{Tr}(F \triangleright G)_n := \begin{cases} 1, & m(F) \geq \min\{n, M(G)\} \\ -1, & M(F) < n \leq m(G) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$m(F) := \min\{n \mid \text{Tr}(F)_n \neq -1\} \quad M(F) := \min\{n \mid \text{Tr}(F)_n = 1\}$$

- Pri računanju koristimo da jedino  $\triangleright$  može “produljiti” trag i to najviše za 1.

# Invertiranje traga

lokalni GL ekvivalent

Ako je trag sheme  $F$  determiniran, tada  $F$  ima lokalni GL ekvivalent  $G$ .

Za pronalazak GL formule koja odgovara determiniranom tragu koristimo Artemovljev algoritam:

- Ako je  $\text{Tr}(F) = (1, \dots)$ , onda je  $G = \top$ .
- U suprotnom, promatramo (maksimalne) intervale  $[a, b)$ , na kojima je  $\text{Tr}(F)$  jednak  $-1$ , a  $G$  se sastoji od konjunkcije formula koje “reprezentiraju” te intervale:

$$[a, b) \mapsto \begin{cases} \Box^a \perp & b = +\infty, \\ \neg \Box^b \perp & a = 0 \text{ i } b < +\infty, \\ \Box^b \perp \rightarrow \Box^a \perp & \text{inače.} \end{cases}$$

# Invertiranje traga

globalni GL ekvivalent

- Za formule koje nemaju determinirani trag koristeći teorem o generalizaciji tražimo globalni GL ekvivalent.

## Teorem

$\varphi \stackrel{g}{\iff} \psi$  ako i samo ako  $\Box\varphi \iff \Box\psi$ .

# Invertiranje traga

globalni GL ekvivalent

- Za formule koje nemaju determinirani trag koristeći teorem o generalizaciji tražimo globalni GL ekvivalent.

## Teorem

$\varphi \stackrel{g}{\iff} \psi$  ako i samo ako  $\Box\varphi \iff \Box\psi$ .

- Vrijedi: ako je  $\Box\varphi$  determinirana, onda je njen GL ekvivalent oblika  $\Box\psi$ .

# Invertiranje traga

globalni GL ekvivalent

- Za formule koje nemaju determinirani trag koristeći teorem o generalizaciji tražimo globalni GL ekvivalent.

## Teorem

$\varphi \stackrel{g}{\iff} \psi$  ako i samo ako  $\Box\varphi \iff \Box\psi$ .

- Vrijedi: ako je  $\Box\varphi$  determinirana, onda je njen GL ekvivalent oblika  $\Box\psi$ .

$$\bullet \text{Tr}(\Box\varphi) = \text{Tr}(\neg\varphi \triangleright \perp) = \begin{cases} 1, & m(\neg\varphi) \geq \min\{n, M(\perp)\} \\ -1, & M(\neg\varphi) < n \leq m(\perp) \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$\bullet \text{Kako je } M(\perp) = m(\perp) = +\infty, \text{Tr}(\Box\varphi) = \begin{cases} 1, & m(\neg\varphi) \geq n \\ -1, & M(\neg\varphi) < n \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

# Minimalna nedeterminirana formula

i neke pravilnosti u nedeterminiranim formulama

- Generirati formule po složenosti (broj  $\rightarrow$  i  $\triangleright$ ).
- $\approx 150 \cdot 10^6$  formula složenosti manje od 12.
- Iskoristiti teorem o supstituciji!



# Minimalna nedeterminirana formula

i neke pravilnosti u nedeterminiranim formulama

- Generirati formule po složenosti (broj  $\rightarrow$  i  $\triangleright$ ).
- $\approx 150 \cdot 10^6$  formula složenosti manje od 12.
- Iskoristiti teorem o supstituciji!
- Nedeterminirane fomule koje smo izgenerirali (do složenosti 11) sadrže podstring oblika  $\triangleright \diamond^n \top$ .