Formalni računi sa kontrolom resursa

Jelena Ivetić

Sustavi dokazivanja
Dubrovnik, 28.6.2012.

1. Formalni sistemi sa eksplicitnim strukturalnim pravilima

2. Formalni računi sa eksplicitnom kontrolom resursa
   - Sintaksa
   - Operacionalna semantika
   - Tipski sistemi

ND sa implicitnim str. pravilima

(Ax) $$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}$$

$(\rightarrow_{intro})$ $$\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B}$$

$(\rightarrow_{elim})$ $$\dfrac{\Gamma \vdash A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

LJ sa implicitnim str. pravilima

(Ax)	$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}$$
$(\to_L)$	$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma, A \to B \vdash C}$$
$(\to_R)$	$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}$$
(Cut)	$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}$$

LJ sa eksplicitnim str. pravilima

$$\frac{}{A \vdash A}\ (Ax)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to_R) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, B \vdash C}{\Gamma, \Delta, A \to B \vdash C}\ (\to_L)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta, A \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ (Cut)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (Weak) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (Cont)$$

ND sa eksplicitnim str. pravilima

$$\frac{}{A \vdash A}\ (Ax)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ (\to_{intro}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ (\to_{elim})$$

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (Weak) \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}\ (Cont)$$

Implicitna vs eksplicitna structuralna pravila

Implicitna structuralna pravila

- konteksti su skupovi
- Aksioma: $\Gamma, A \vdash A$
- aditivna tj. "context-sharing" pravila

Eksplicitna structuralna pravila

- konteksti su multiskupovi
- Aksioma: $A \vdash A$
- multiplikativna tj. "context-splitting" pravila

- cilj?
  Napraviti formalne račune koji odgovaraju sistemima sa eksplicitnim strukturalnim pravilima, na način na koji λ-račun korespondira sistemu ND.
- motivacija?
  - teorijska - ostvariti uvid u deo procesa računanja koji se obično implicitno podrazumeva;
  - praktična - kontrolisanje ovog dela procesa računanja omogućava optimizaciju.
- zašto "kontrola resursa"?
  Zato što strukturalna pravila vrše kvantitativnu transformaciju konteksta tj. brisanje i dupliranje formula u kontekstu.

Sintaksa $\lambda_{®}$-računa

- pre-termi $\lambda_{®}$-računa:

$$\text{Pre-termi} \qquad f \quad ::= \quad x \mid \lambda x.f \mid ff \mid x \odot f \mid x <^{x_1}_{x_2} f$$

- $\lambda x.f$ je apstrakcija, ff je aplikacija, $x \odot f$ je slabljenje i $x <^{x_1}_{x_2} f$ je kontrakcija.
- slobodne promenljive pre-terma f - $Fv(f)$:

$$\begin{array}{rcl} Fv(x) & = & x; \\ Fv(\lambda x.f) & = & Fv(f) \setminus \{x\}; \\ Fv(fg) & = & Fv(f) \cup Fv(g); \\ Fv(x \odot f) & = & \{x\} \cup Fv(f); \\ Fv(x <^{x_1}_{x_2} f) & = & \{x\} \cup Fv(f) \setminus \{x_1, x_2\}. \end{array}$$

- operatori koji vezuju slobodne promenljive se zovu binderi.

- Termi su samo oni pre-termi koji zadovoljavaju sledeća dva uslova:
  - u svakom pod-termu, svaka slobodna promenljiva se pojavljuje tačno jednom;
  - svaki binder vezuje tačno jedno pojavljivanje slobodne promenljive.
- Na primer, pre-termi

  $$\lambda x.y \quad , \quad \lambda x.xx \quad , \quad x <^{y}_{z} (xy)$$

  nisu termi $\lambda_{®}$-računa.
- Pre-term $x \odot \lambda x.x$ zahvaljujući Barendregtovoj konvenciji jeste $\lambda_{®}$-term $x \odot \lambda y.y$.

- Formalna definicija skupa $\lambda_{®}$-terma - $\Lambda_{®}$:

$$\frac{}{x \in \Lambda_{®}^{x}} \qquad \frac{f \in \Lambda_{®} \quad x \in Fv(f)}{\lambda x.f \in \Lambda_{®}}$$

$$\frac{f \in \Lambda_{®} \quad g \in \Lambda_{®} \quad Fv(f) \cap Fv(g) = \emptyset}{fg \in \Lambda_{®}}$$

$$\frac{f \in \Lambda_{®} \quad x \notin Fv(f)}{x \odot f \in \Lambda_{®}} \qquad \frac{f \in \Lambda_{®} \quad x_1 \neq x_2, \quad x_1, x_2 \in Fv(f) \quad x \notin Fv(f) \setminus \{x_1, x_2\}}{x <_{x_2}^{x_1} f \in \Lambda_{®}}$$

- Terme obeležavamo sa $M, N, P, M', \ldots$

- Iako neki λ-termi nisu $\lambda_{®}$-termi (npr. $\lambda x.y$, xx,...) svaki λ-term ima sebi odgovarajući $\lambda_{®}$-term.

Example

$$\begin{array}{rcl} \lambda - term & \rightsquigarrow & \lambda_{®} - term \\ \lambda x.y & \rightsquigarrow & \lambda x.x \odot y \\ \lambda x.xx & \rightsquigarrow & \lambda x.x <^{x_1}_{x_2} (x_1 x_2) \end{array}$$

- vidimo da kontrakcija odgovara dupliranju promenljive, dok slabljenje odgovara brisanju promenljive.

Notacija i konvencije:

- $X \odot M$ označava $x_1 \odot \ldots x_n \odot M$;
- $X <_Z^Y M$ označava $x_1 <_{z_1}^{y_1} \ldots x_n <_{z_n}^{y_n} M$;
- ako je X prazna lista, onda $X \odot M = X <_Z^Y M = M$;
- $x <_{x_2}^{x_1} M = x <_{x_1}^{x_2} M$;
- Domen bindera se proteže na desno koliko je moguće tj. $\lambda x.MN = \lambda x.(MN)$ i $x <_z^y MN = x <_z^y (MN)$

Pravila računanja u $\lambda_{®}$-računu

- β-redukcija - ključni korak u izračunavanju:
  $$(\beta) \quad (\lambda x.M)N \quad \to \quad M[N/x]$$
- supstitucija - implicitna tj. meta-operator:

$$\begin{array}{rcl}
x[N/x] & \triangleq & N \\
(\lambda y.M)[N/x] & \triangleq & \lambda y.M[N/x], \quad x \neq y \\
(MP)[N/x] & \triangleq & M[N/x]P, \quad x \notin Fv(P) \\
(MP)[N/x] & \triangleq & MP[N/x], \quad x \notin Fv(M) \\
(y \odot M)[N/x] & \triangleq & y \odot M[N/x], \quad x \neq y \\
(x \odot M)[N/x] & \triangleq & Fv(N) \odot M \\
(y <^{y_1}_{y_2} M)[N/x] & \triangleq & y <^{y_1}_{y_2} M[N/x], \quad x \neq y \\
(x <^{x_1}_{x_2} M)[N/x] & \triangleq & Fv(N) <^{Fv(N_1)}_{Fv(N_2)} M[N_1/x_1, N_2/x_2]
\end{array}$$

Pravila računanja u $\lambda_{®}$-računu

- γ-redukcije - vrše propagaciju kontrakcije što dublje u term:

$$
\begin{array}{lrcl}
(\gamma_1) & x <^{x_1}_{x_2} (\lambda y.M) & \to & \lambda y.x <^{x_1}_{x_2} M \\
(\gamma_2) & x <^{x_1}_{x_2} (MN) & \to & (x <^{x_1}_{x_2} M)N, \text{ if } x_1, x_2 \notin Fv(N) \\
(\gamma_3) & x <^{x_1}_{x_2} (MN) & \to & M(x <^{x_1}_{x_2} N), \text{ if } x_1, x_2 \notin Fv(M)
\end{array}
$$

- ω-redukcije - vrše izvlačenje slabljenja na površinu terma:

$$
\begin{array}{lrcl}
(\omega_1) & \lambda x.(y \odot M) & \to & y \odot (\lambda x.M), \; x \neq y \\
(\omega_2) & (x \odot M)N & \to & x \odot (MN) \\
(\omega_3) & M(x \odot N) & \to & x \odot (MN)
\end{array}
$$

- $\gamma\omega$-redukcije - interakcija strukturalnih operatora:

$$
\begin{array}{lrcl}
(\gamma\omega_1) & x <^{x_1}_{x_2} (y \odot M) & \to & y \odot (x <^{x_1}_{x_2} M), \; y \neq x_1, x_2 \\
(\gamma\omega_2) & x <^{x_1}_{x_2} (x_1 \odot M) & \to & M[x/x_2]
\end{array}
$$

Pravila računanja u $\lambda_{®}$-računu

- ekvivalencije - omogućavaju da se liste promenljivih X, Y, Z tretiraju kao skupovi:

$$
\begin{array}{lrcl}
(\epsilon_1) & x \odot (y \odot M) & \equiv & y \odot (x \odot M) \\
(\epsilon_2) & x <^{x_1}_{x_2} M & \equiv & x <^{x_2}_{x_1} M \\
(\epsilon_3) & x <^{y}_{z} (y <^{u}_{v} M) & \equiv & x <^{y}_{u} (y <^{z}_{v} M) \\
(\epsilon_4) & x <^{x_1}_{x_2} (y <^{y_1}_{y_2} M) & \equiv & y <^{y_1}_{y_2} (x <^{x_1}_{x_2} M), \quad x \neq y_1, y_2, \; y \neq x_1, x_2
\end{array}
$$

- α-ekvivalencija - za oba bindera:

$$
\begin{array}{rcl}
\lambda x.M & \equiv_\alpha & \lambda y.M[y/x] \\
x <^{y}_{z} M & \equiv_\alpha & x <^{y_1}_{z_1} M[y_1/y, z_1/z]
\end{array}
$$

Primer računanja

I način:

$$\begin{array}{rcl} z <^{z_1}_{z_2} (\lambda x.x \odot y)(z_1 z_2) & \to_\beta & z <^{z_1}_{z_2} (x \odot y)[z_1 z_2/x] \\ & \triangleq & z <^{z_1}_{z_2} (Fv(z_1 z_2) \odot y) \\ & = & z <^{z_1}_{z_2} (z_1 \odot z_2 \odot y) \\ & \to_{\gamma\omega_2} & (z_2 \odot y)[z/z_2] \\ & \triangleq & z \odot y. \end{array}$$

II način:

$$\begin{array}{rcl} z <^{z_1}_{z_2} (\lambda x.x \odot y)(z_1 z_2) & \to_{\gamma_3} & (\lambda x.x \odot y) z <^{z_1}_{z_2} z_1 z_2 \\ & \to_\beta & (x \odot y)[z <^{z_1}_{z_2} z_1 z_2/x] \\ & \triangleq & Fv(z <^{z_1}_{z_2} z_1 z_2) \odot y \\ & = & z \odot y. \end{array}$$

Dok u λ-računu: $(\lambda x.y)(zz) \to_\beta y[zz/x] \triangleq y.$

Normalne forme

- Računanje se vrši do dovodjenja terma u normalnu formu.
- $\lambda_{®}$-račun zadovoljava osobinu konfluentnosti, iskazanu sledećim dijagramom:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M_1 \arrow[dr] & & M_2 \arrow[dl] \\ & M' & \end{tikzcd}$$

- Posledica: svaki $\lambda_{®}$-term ima najviše jednu normalnu formu.
- Ako svi nizovi redukcija dovode do normalne forme, term ima osobinu jake normalizacije.

- Skup normalnih formi je odredjen sledećom apstraktnom sintaksom:

$$
\begin{array}{rcl}
M_{nf} & ::= & x \mid \lambda x.M_{nf} \mid \lambda x.x \odot M_{nf} \mid xM^1_{nf} \ldots M^n_{nf} \mid \\
 & & x <^{x_1}_{x_2} M_{nf} N_{nf}, \text{ if } x_1 \in Fv(M_{nf}), x_2 \in Fv(N_{nf}) \\
W_{nf} & ::= & x \odot M_{nf} \mid x \odot W_{nf}
\end{array}
$$

- neophodno je razdvojiti kategoriju W_{nf} zato što term $\lambda x.y \odot M_{nf}$ nije normalna forma

$$\lambda x.y \odot M_{nf} \rightarrow_{\omega_1} y \odot \lambda x.M_{nf}.$$

Tipovi

- Tipovi su sintaksni objekti koji se dodeljuju termima.
- Intuitivno, mogu se posmatrati kao domen funkcije koju term reprezentuje.
- Možemo posmatrati term kao program, a njemu odgovarajući tip kao specifikaciju programa.
- Postoje mnogi tipski sistemi za λ-račun;
- u $\lambda_{®}$-računu:
  - osnovni tipski sistem tj. obični tipovi;
  - tipovi sa presekom.

Obični tipovi

- Obični tipovi su definisani sledećom apstraktnom sintaksom

$$\text{tipovi} \quad \alpha \quad ::= \quad p \mid \alpha \to \alpha$$

- Osnovna dodela tipa je izraz $x : \alpha$;
- baza (ili kontekst) Γ je skup $\{x_1 : \alpha_1, \ldots, x_n : \alpha_n\}$ osnovnih dodela tipa, u kome su sve promenljive različite;
- domen baze je skup promenljivih $Dom(\Gamma) = \{x_1, \ldots, x_n\}$;
- proširenje baze $\Gamma, x : \alpha$ označava skup $\Gamma \cup \{x : \alpha\}$, pri čemu $x \notin Dom(\Gamma)$.
- Γ, Δ je disjunktna unija dve baze.

Tipski sistem $\lambda_{®} \rightarrow$

$$\frac{}{x : \alpha \vdash x : \alpha}\ (Ax)$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash M : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow_I) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha \rightarrow \beta \quad \Delta \vdash N : \alpha}{\Gamma, \Delta \vdash MN : \beta}\ (\rightarrow_E)$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha, y : \alpha \vdash M : \beta}{\Gamma, z : \alpha \vdash z <^{x}_{y} M : \beta}\ (Cont) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha}{\Gamma, x : \beta \vdash x \odot M : \alpha}\ (Weak)$$

Tipski sistem $\lambda_{®} \rightarrow$

$$\frac{}{x : \alpha \vdash x : \alpha}\ (Ax)$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash M : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \alpha \rightarrow \beta}\ (\rightarrow_I) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha \rightarrow \beta \quad \Delta \vdash N : \alpha}{\Gamma, \Delta \vdash MN : \beta}\ (\rightarrow_E)$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha, y : \alpha \vdash M : \beta}{\Gamma, z : \alpha \vdash z <_y^x M : \beta}\ (Cont) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha}{\Gamma, x : \beta \vdash x \odot M : \alpha}\ (Weak)$$

Osobine sistema $\lambda_{®} \rightarrow$

Proširenje CH korespondencije: $\lambda_{®}$-račun sa tipovima odgovara sistemu ND sa eksplicitnim strukturalnim pravilima.

Theorem

Neka $\Gamma \vdash M : \alpha$. Tada $x \in Dom(\Gamma)$ ako i samo ako $x \in Fv(M)$.

Theorem

Neka $\Gamma \vdash M : \alpha$ i $M \rightarrow M'$ ili $M \equiv M'$. Tada $\Gamma \vdash M' : \alpha$.

Theorem

Ako term M ima tip u sistemu $\lambda_{®} \rightarrow$, onda zadovoljava osobinu jake normalizacije.

Osobine koje $\lambda_{®} \rightarrow$ NE zadovoljava...

... a bilo bi dobro da ih račun ima

- Neka $\Gamma \vdash M' : \alpha$ i $M \rightarrow M'$ ili $M \equiv M'$. Tada $\Gamma \vdash M : \alpha$.
- Ako term M zadovoljava osobinu jake normalizacije, onda ima tip u sistemu $\lambda_{®} \rightarrow$.

Example

Na primer, term $z <^{z_1}_{z_2} (\lambda x.x \odot y)(z_1 z_2) \rightarrow z \odot y$.
Važi $z : \alpha, y : \beta \vdash z \odot y : \beta$, ali termu $z <^{z_1}_{z_2} (\lambda x.x \odot y)(z_1 z_2)$ se ne može dodeliti tip u sistemu $\lambda_{®} \rightarrow$.

- ovo su standardne "boljke" osnovnih tipskih sistema formalnih računa, rešenje je u uvodjenju tipova sa presekom.

Tipski sistem $\lambda_{®}\cap$

... je veoma zanimljiv, ali o njemu sledeći put!

Sistem $\lambda_{®}\cap$

$$\frac{}{x : \sigma \vdash x : \sigma}\ (Ax)$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha \vdash M : \sigma}{\Gamma \vdash \lambda x.M : \alpha \to \sigma}\ (\to_I) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \cap_{i=1}^{n} \tau_i \to \sigma \quad \Delta_0 \vdash N : \tau_0 \quad \dots \quad \Delta_n \vdash N : \tau_n}{\Gamma, \Delta_0^{\top} \sqcap \Delta_1 \sqcap \dots \sqcap \Delta_n \vdash MN : \sigma}\ (\to_E)$$

$$\frac{\Gamma, x : \alpha, y : \beta \vdash M : \sigma}{\Gamma, z : \alpha \cap \beta \vdash z <_y^x M : \sigma}\ (Cont) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \sigma}{\Gamma, x : \top \vdash x \odot M : \sigma}\ (Weak)$$

Theorem (Ghilezan et al. (2011))

$\lambda_{®}$-term ima osobinu jake normalizacije ako i samo ako ima tip u sistemu $\lambda_{®}\cap$.

Šta smo uradili

- Uveli tipove sa presekom u $\lambda_{\circledR}$ i dokazali da u sistemu $\lambda_{\circledR}\cap$ važi da:

  Term ima tip ako i samo ako ima osobinu jake normalizacije.

- Napravili sekventni lambda račun sa kontrolom resursa $\lambda_{\circledR}^{\mathsf{Gtz}}$ koji u osnovnom tipskom sistemu odgovara sistemu LJ sa eksplicitnim strukturalnim pravilima.
- Uveli tipove sa presekom u $\lambda_{\circledR}^{\mathsf{Gtz}}$ i u λ-račun sa eksplicitnom supstitucijom i kontrolom resursa $\lambda_{\circledR}^{\mathsf{x}}$ i pokazali da i ovi sistemi karakterišu osobinu jake normalizacije.

Reference

- S. Ghilezan, J. Ivetić, P. Lescanne, D. Žunić: *Intuitionistic sequent-style calculus with explicit structural rules*. Tbilisi 2009 - 8th International Symposium on Language, Logic and Computation, Lecture Notes in Artificial Intelligence 6618: 101-124 (2011).
- S. Ghilezan, J. Ivetić, P. Lescanne, S. Likavec: *Intersection Types for the Resource Control Lambda Calculi*. ICTAC 2011 - 8th International Colloquium on Theoretical Aspects of Computing, Lecture Notes in Computer Science 6916: 116-134 (2011).
- S. Ghilezan, J. Ivetić, P. Lescanne, S. Likavec: *Intersection types for explicit substitution with resource control*. ITRS 2012 - Sixth Workshop on Intersection Types and Related Systems (ovde, sutra).

Mogući nastavci istraživanja

- Računarske interpretacije substrukturalnih logika, polazeći od $\lambda_{\circledR}$-računa umesto od linearne logike;
- rekonstrukcija tipova;
- implementacija.