Teoremi karakterizacije u modalnoj logici

Tin Perkov

Tehničko veleučilište u Zagrebu

26. lipnja 2012.

Osnovni modalni jezik

- Formule: $\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \to \psi \mid \Diamond\varphi$

Osnovni modalni jezik

- Formule: $\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \to \psi \mid \Diamond\varphi$
- Modeli: $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $W \neq \emptyset$ nosač, $R \subseteq W \times W$ relacija dostiživosti, $V : p \mapsto V(p) \subseteq W$ valuacija

Osnovni modalni jezik

- Formule: $\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \to \psi \mid \Diamond\varphi$
- Modeli: $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $W \neq \emptyset$ nosač, $R \subseteq W \times W$ relacija dostiživosti, $V : p \mapsto V(p) \subseteq W$ valuacija
- Standardna translacija:

$$\begin{aligned}
ST_x(p) &= Px, \text{ za svaku propozicionalnu varijablu } p\\
ST_x(\bot) &= x \neq x\\
ST_x(\varphi \to \psi) &= ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi)\\
ST_x(\Diamond\varphi) &= \exists y(xRy \wedge ST_y(\varphi))
\end{aligned}$$

Osnovni modalni jezik

- Formule: $\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \to \psi \mid \Diamond\varphi$
- Modeli: $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $W \neq \emptyset$ nosač, $R \subseteq W \times W$ relacija dostiživosti, $V : p \mapsto V(p) \subseteq W$ valuacija
- Standardna translacija:

$$\begin{aligned} ST_x(p) &= Px, \text{ za svaku propozicionalnu varijablu } p \\ ST_x(\bot) &= x \neq x \\ ST_x(\varphi \to \psi) &= ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi) \\ ST_x(\Diamond\varphi) &= \exists y(xRy \wedge ST_y(\varphi)) \end{aligned}$$

- Istinitost: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ akko $\mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w]$

Osnovni modalni jezik

- Formule: $\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \to \psi \mid \Diamond\varphi$
- Modeli: $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $W \neq \emptyset$ nosač, $R \subseteq W \times W$ relacija dostiživosti, $V : p \mapsto V(p) \subseteq W$ valuacija
- Standardna translacija:

$$\begin{aligned} ST_x(p) &= Px, \text{ za svaku propozicionalnu varijablu } p \\ ST_x(\bot) &= x \neq x \\ ST_x(\varphi \to \psi) &= ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi) \\ ST_x(\Diamond\varphi) &= \exists y(xRy \wedge ST_y(\varphi)) \end{aligned}$$

- Istinitost: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ akko $\mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w]$
- Globalna istinitost: $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ akko $\mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\varphi)$

Osnovni modalni jezik

- Formule: $\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \to \psi \mid \Diamond\varphi$
- Modeli: $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, $W \neq \emptyset$ nosač, $R \subseteq W \times W$ relacija dostiživosti, $V : p \mapsto V(p) \subseteq W$ valuacija
- Standardna translacija:

$$\begin{aligned} ST_x(p) &= Px, \text{ za svaku propozicionalnu varijablu } p \\ ST_x(\bot) &= x \neq x \\ ST_x(\varphi \to \psi) &= ST_x(\varphi) \to ST_x(\psi) \\ ST_x(\Diamond\varphi) &= \exists y (xRy \land ST_y(\varphi)) \end{aligned}$$

- Istinitost: $\mathfrak{M}, w \Vdash \varphi$ akko $\mathfrak{M} \models ST_x(\varphi)[w]$
- Globalna istinitost: $\mathfrak{M} \Vdash \varphi$ akko $\mathfrak{M} \models \forall x ST_x(\varphi)$
- Ispunjivost: φ ispunjiva u $\mathfrak{M}$ akko $\mathfrak{M} \models \exists x ST_x(\varphi)$

Modalna definabilnost

- Lokalna: klasa $\mathcal{K}$ točkovnih modela je *lokalno definabilna* ako postoji skup formula Σ t. d. $\mathcal{K} = \{(\mathfrak{M}, w) : \mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma\}$.

Modalna definabilnost

- Lokalna: klasa $\mathcal{K}$ točkovnih modela je *lokalno definabilna* ako postoji skup formula Σ t. d. $\mathcal{K} = \{(\mathfrak{M}, w) : \mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma\}$.
- Globalna: klasa $\mathcal{K}$ modela je *globalno definabilna* ako postoji Σ t. d. $\mathcal{K} = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \Vdash \Sigma\}$.

Modalna definabilnost

- Lokalna: klasa $\mathcal{K}$ točkovnih modela je *lokalno definabilna* ako postoji skup formula Σ t. d. $\mathcal{K} = \{(\mathfrak{M}, w) : \mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma\}$.
- Globalna: klasa $\mathcal{K}$ modela je *globalno definabilna* ako postoji Σ t. d. $\mathcal{K} = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \Vdash \Sigma\}$.

Primjer

Komplement klase modela definirane formulom $\Diamond\top$ nije globalno definabilan. No, to je klasa svih modela u kojima je formula $\neg\Diamond\top$ ispunjiva.

Modalna definabilnost

- Lokalna: klasa $\mathcal{K}$ točkovnih modela je *lokalno definabilna* ako postoji skup formula Σ t. d. $\mathcal{K} = \{(\mathfrak{M}, w) : \mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma\}$.
- Globalna: klasa $\mathcal{K}$ modela je *globalno definabilna* ako postoji Σ t. d. $\mathcal{K} = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \Vdash \Sigma\}$.

Primjer

Komplement klase modela definirane formulom $\Diamond\top$ nije globalno definabilan. No, to je klasa svih modela u kojima je formula $\neg\Diamond\top$ ispunjiva.

- Egzistencijalna: klasa $\mathcal{K}$ je $\exists$-*definabilna* ako postoji Σ t. d. su u $\mathcal{K}$ točno oni modeli u kojima je svaka formula iz Σ ispunjiva.

Modalna definabilnost

- Lokalna: klasa $\mathcal{K}$ točkovnih modela je *lokalno definabilna* ako postoji skup formula Σ t. d. $\mathcal{K} = \{(\mathfrak{M}, w) : \mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma\}$.
- Globalna: klasa $\mathcal{K}$ modela je *globalno definabilna* ako postoji Σ t. d. $\mathcal{K} = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \Vdash \Sigma\}$.

Primjer

Komplement klase modela definirane formulom $\Diamond\top$ nije globalno definabilan. No, to je klasa svih modela u kojima je formula $\neg\Diamond\top$ ispunjiva.

- Egzistencijalna: klasa $\mathcal{K}$ je $\exists$-*definabilna* ako postoji Σ t. d. su u $\mathcal{K}$ točno oni modeli u kojima je svaka formula iz Σ ispunjiva.
- Poopćenje: $\mathcal{K}$ je $\forall\exists$-*definabilna* ako postoji par (Σ_1, Σ_2) skupova formula t. d. su u $\mathcal{K}$ točno modeli na kojima je svaka formula iz Σ_1 globalno istinita i svaka formula iz Σ_2 ispunjiva.

Modalna definabilnost

- Lokalna: klasa $\mathcal{K}$ točkovnih modela je *lokalno definabilna* ako postoji skup formula Σ t. d. $\mathcal{K} = \{(\mathfrak{M}, w) : \mathfrak{M}, w \Vdash \Sigma\}$.
- Globalna: klasa $\mathcal{K}$ modela je *globalno definabilna* ako postoji Σ t. d. $\mathcal{K} = \{\mathfrak{M} : \mathfrak{M} \Vdash \Sigma\}$.

Primjer

Komplement klase modela definirane formulom $\Diamond\top$ nije globalno definabilan. No, to je klasa svih modela u kojima je formula $\neg\Diamond\top$ ispunjiva.

- Egzistencijalna: klasa $\mathcal{K}$ je *∃-definabilna* ako postoji Σ t. d. su u $\mathcal{K}$ točno oni modeli u kojima je svaka formula iz Σ ispunjiva.
- Poopćenje: $\mathcal{K}$ je *∀∃-definabilna* ako postoji par (Σ_1, Σ_2) skupova formula t. d. su u $\mathcal{K}$ točno modeli na kojima je svaka formula iz Σ_1 globalno istinita i svaka formula iz Σ_2 ispunjiva.
- Daljnje poopćenje: $\mathcal{K}$ je *poopćeno definabilna* ako je definirana nekim skupom S rečenica prvog reda dobivenih od nekih $\forall x ST_x(\varphi)$ i $\exists x ST_x(\varphi)$ pomoću logičkih veznika.

Konstrukcije modela

Oznake za svojstva zatvorenosti klase (točkovnih) modela na konstrukcije:

$\mathcal{K}$ ima svojstvo:	$\mathcal{K}$ je zatvorena na:
`BIS`	bisimulacije
`SB`	surjektivne bisimulacije
`TB`	totalne bisimulacije
`TSB`	totalne surjektivne bisimulacije
`UPROD`	ultraprodukte
`UPOW`	ultrapotencije
`DU`	disjunktne unije
`GSUB`	generirane podmodele
`GINT`	generirane međumodele

Konstrukcije modela

Oznake za svojstva zatvorenosti klase (točkovnih) modela na konstrukcije:

$\mathcal{K}$ ima svojstvo:	$\mathcal{K}$ je zatvorena na:
`BIS`	bisimulacije
`SB`	surjektivne bisimulacije
`TB`	totalne bisimulacije
`TSB`	totalne surjektivne bisimulacije
`UPROD`	ultraprodukte
`UPOW`	ultrapotencije
`DU`	disjunktne unije
`GSUB`	generirane podmodele
`GINT`	generirane međumodele

S $\overline{\mathrm{UPOW}}$ označavamo zatvorenost komplementa na ultrapotencije itd.

Karakterizacije lokalne definabilnosti

Teorem (de Rijke)

Neka je $\mathcal{K}$ klasa točkovnih modela. Tada vrijedi:

1. *$\mathcal{K}$ je modalno definabilna ako i samo ako ima svojstva* BIS, UPROD *i* $\overline{\mathrm{UPOW}}$.
2. *$\mathcal{K}$ je modalno definabilna jednom formulom ako i samo ako ima svojstva* BIS, UPROD *i* $\overline{\mathrm{UPROD}}$.

Karakterizacije lokalne definabilnosti

Teorem (de Rijke)

Neka je $\mathcal{K}$ klasa točkovnih modela. Tada vrijedi:

1. *$\mathcal{K}$ je modalno definabilna ako i samo ako ima svojstva BIS, UPROD i $\overline{\mathrm{UPOW}}$.*
2. *$\mathcal{K}$ je modalno definabilna jednom formulom ako i samo ako ima svojstva BIS, UPROD i $\overline{\mathrm{UPROD}}$.*

Teorem (Van Benthemov tm. karakterizacije)

Formula prvog reda $F(x)$ (nad odgovarajućom signaturom) je ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule ako i samo ako je invarijantna na bisimulacije, tj. ako i samo ako za sve bisimilarne točkovne modele $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ vrijedi $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$ akko $\mathfrak{M}' \models F(x)[w']$.

Karakterizacije lokalne definabilnosti

Teorem (de Rijke)

Neka je $\mathcal{K}$ klasa točkovnih modela. Tada vrijedi:

1. *$\mathcal{K}$ je modalno definabilna ako i samo ako ima svojstva BIS, UPROD i $\overline{\mathrm{UPOW}}$.*
2. *$\mathcal{K}$ je modalno definabilna jednom formulom ako i samo ako ima svojstva BIS, UPROD i $\overline{\mathrm{UPROD}}$.*

Teorem (Van Benthemov tm. karakterizacije)

Formula prvog reda $F(x)$ (nad odgovarajućom signaturom) je ekvivalentna standardnoj translaciji neke modalne formule ako i samo ako je invarijantna na bisimulacije, tj. ako i samo ako za sve bisimilarne točkovne modele $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ vrijedi $\mathfrak{M} \models F(x)[w]$ akko $\mathfrak{M}' \models F(x)[w']$.

Napomena (van Benthem)

Invarijantnost dane formule $F(x)$ na bisimulacije nije odlučiva.

Glavni test invarijantnosti na bisimulacije

Je li formula $F(x)$ invarijantna na bisimulacije? Pomoću semantičkog stabla pokušavamo konstruirati bisimilarne točkovne modele $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ t. d. $\mathfrak{M}, w \models F(x)[w]$, ali $\mathfrak{M}', w' \models \neg F(x)[w']$.

Glavni test invarijantnosti na bisimulacije

Je li formula $F(x)$ invarijantna na bisimulacije? Pomoću semantičkog stabla pokušavamo konstruirati bisimilarne točkovne modele $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ t. d. $\mathfrak{M}, w \models F(x)[w]$, ali $\mathfrak{M}', w' \models \neg F(x)[w']$.

Primjer ($\exists y R x y$)

$$\exists y R w y \cdot w Z w' \cdot \forall y \neg R w' y$$

Glavni test invarijantnosti na bisimulacije

Je li formula $F(x)$ invarijantna na bisimulacije? Pomoću semantičkog stabla pokušavamo konstruirati bisimilarne točkovne modele $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ t. d. $\mathfrak{M}, w \models F(x)[w]$, ali $\mathfrak{M}', w' \models \neg F(x)[w']$.

Primjer ($\exists yRxy$)

$$\begin{array}{c} \exists yRwy \cdot wZw' \cdot \forall y \neg Rw'y \\ Rwa \cdot \cdot \end{array}$$

Glavni test invarijantnosti na bisimulacije

Je li formula $F(x)$ invarijantna na bisimulacije? Pomoću semantičkog stabla pokušavamo konstruirati bisimilarne točkovne modele $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ t. d. $\mathfrak{M}, w \models F(x)[w]$, ali $\mathfrak{M}', w' \models \neg F(x)[w']$.

Primjer ($\exists y Rxy$)

$$\exists y Rwy \cdot wZw' \cdot \forall y \neg Rw'y$$

$$Rwa \cdot \cdot$$

$$\cdot aZa' \cdot \boxed{Rw'a'}$$

Glavni test invarijantnosti na bisimulacije

Je li formula $F(x)$ invarijantna na bisimulacije? Pomoću semantičkog stabla pokušavamo konstruirati bisimilarne točkovne modele $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ t. d. $\mathfrak{M}, w \models F(x)[w]$, ali $\mathfrak{M}', w' \models \neg F(x)[w']$.

Primjer ($\exists y Rxy$)

$$\exists y Rwy \cdot wZw' \cdot \forall y \neg Rw'y$$

$$Rwa \cdot \cdot$$

$$\cdot aZa' \cdot \boxed{Rw'a'}$$

$$\cdot \cdot \neg Rw'a'$$

$$X$$

Glavni test invarijantnosti na bisimulacije

Je li formula $F(x)$ invarijantna na bisimulacije? Pomoću semantičkog stabla pokušavamo konstruirati bisimilarne točkovne modele $(\mathfrak{M}, w)$ i $(\mathfrak{M}', w')$ t. d. $\mathfrak{M}, w \models F(x)[w]$, ali $\mathfrak{M}', w' \models \neg F(x)[w']$.

Primjer ($\exists y Rxy$)

$$\begin{array}{l}
\exists y Rwy \cdot wZw' \cdot \forall y \neg Rw'y \\
\qquad\quad Rwa \cdot \cdot \\
\qquad\qquad\quad \cdot aZa' \cdot \boxed{Rw'a'} \\
\qquad\qquad\quad\; \cdot \cdot \neg Rw'a' \\
\qquad\qquad\qquad X
\end{array}$$

Dobili smo kontradikciju, pa test daje odgovor da je polazna formula invarijantna na bisimulacije. Zaista, ona je ekvivalentna standardnoj translaciji formule $\Diamond\top$.

Glavni test invarijantnosti na bisimulacije

Primjer $(\exists y(Rxy \wedge (Px \vee Py)) = ST_x((\Diamond \top \wedge p) \vee \Diamond p))$

$$\exists y(Rwy \wedge (Pw \vee Py)) \cdot wZw' \cdot \forall y(\neg Rw'y \vee (\neg Pw' \wedge \neg Py))$$

$$Rwa \wedge (Pw \vee Pa) \cdot \cdot$$

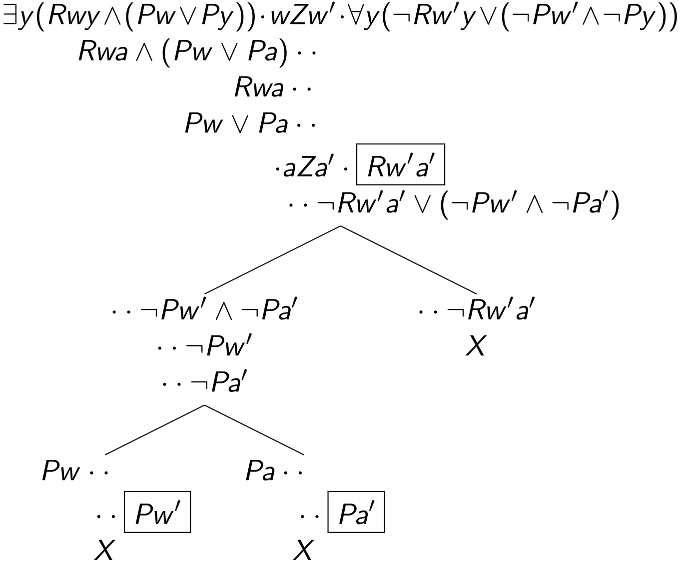
$$Rwa \cdot \cdot$$

$$Pw \vee Pa \cdot \cdot$$

$$\cdot aZa' \cdot \boxed{Rw'a'}$$

Glavni test invarijantnosti na bisimulacije

Primjer $(\exists y(Rxy \wedge (Px \vee Py)) = ST_x((\Diamond\top \wedge p) \vee \Diamond p))$



$\exists y(Rwy \wedge (Pw \vee Py)) \cdot wZw' \cdot \forall y(\neg Rw'y \vee (\neg Pw' \wedge \neg Py))$

$Rwa \wedge (Pw \vee Pa) \cdot \cdot$

$Rwa \cdot \cdot$

$Pw \vee Pa \cdot \cdot$

$\cdot aZa' \cdot \boxed{Rw'a'}$

$\cdot \cdot \neg Rw'a' \vee (\neg Pw' \wedge \neg Pa')$

$\cdot \cdot \neg Pw' \wedge \neg Pa'$

$\cdot \cdot \neg Pw'$

$\cdot \cdot \neg Pa'$

$Pw \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \boxed{Pw'}$

X

$Pa \cdot \cdot$

$\cdot \cdot \boxed{Pa'}$

X

$\cdot \cdot \neg Rw'a'$

X

Karakterizacije modalne definabilnosti klasa modela

$\mathcal{K}$	$\forall$-definabilna	$\exists$-definabilna
skupom formula	SB, DU, UPOW i $\overline{\mathtt{UPOW}}$	TB, UPROD i $\overline{\mathtt{UPOW}}$
konačnim skupom	$=$ jednom formulom	TB, UPROD i $\overline{\mathtt{UPROD}}$
jednom formulom	SB, DU, UPOW i $\overline{\mathtt{UPROD}}$	TB, UPROD, $\overline{\mathtt{DU}}$ i $\overline{\mathtt{UPOW}}$

$\mathcal{K}$	$\forall\exists$-definabilna	poopćeno def.
skupom formula	TSB, DU, GINT, UPROD i $\overline{\mathtt{UPOW}}$	TSB, UPROD i $\overline{\mathtt{UPOW}}$
konačnim skupom	TSB, DU, GINT, UPROD i $\overline{\mathtt{UPROD}}$	$=$ jednom formulom
jednom formulom	(pitanje nema smisla)	TSB, UPROD i $\overline{\mathtt{UPROD}}$

Skica dokaza na primjeru ∃-definabilnosti

- ($\Rightarrow$) Totalna bisimulacija očito čuva ispunjivost. Ostala svojstva slijede iz elementarnosti.

Skica dokaza na primjeru $\exists$-definabilnosti

- ($\Rightarrow$) Totalna bisimulacija očito čuva ispunjivost. Ostala svojstva slijede iz elementarnosti.
- ($\Leftarrow$) Neka $\mathcal{K}$ ima navedena svojstva.
  Neka je $S = \{\exists x ST_x(\varphi) : \varphi \text{ ispunjiva u svim modelima iz } \mathcal{K}\}$.
  Tada je $\mathcal{K} \subseteq Mod(S)$. Preostaje dokazati $Mod(S) \subseteq \mathcal{K}$.
  Neka je $\mathfrak{M}$ model t. d. $\mathfrak{M} \models S$. Treba dokazati $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$.

Skica dokaza na primjeru $\exists$-definabilnosti

- ($\Rightarrow$) Totalna bisimulacija očito čuva ispunjivost. Ostala svojstva slijede iz elementarnosti.
- ($\Leftarrow$) Neka $\mathcal{K}$ ima navedena svojstva.
  Neka je $S = \{\exists x ST_x(\varphi) : \varphi \text{ ispunjiva u svim modelima iz } \mathcal{K}\}$.
  Tada je $\mathcal{K} \subseteq Mod(S)$. Preostaje dokazati $Mod(S) \subseteq \mathcal{K}$.
  Neka je $\mathfrak{M}$ model t. d. $\mathfrak{M} \models S$. Treba dokazati $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$.
- U tu svrhu, konstruiramo $\mathfrak{M}$ od nekih modela iz $\mathcal{K}$ koristeći totalne bisimulacije i ultraprodukte.

Skica dokaza na primjeru ∃-definabilnosti

- (⇒) Totalna bisimulacija očito čuva ispunjivost. Ostala svojstva slijede iz elementarnosti.
- (⇐) Neka $\mathcal{K}$ ima navedena svojstva.
  Neka je $S = \{\exists x ST_x(\varphi) : \varphi$ ispunjiva u svim modelima iz $\mathcal{K}\}$.
  Tada je $\mathcal{K} \subseteq Mod(S)$. Preostaje dokazati $Mod(S) \subseteq \mathcal{K}$.
  Neka je $\mathfrak{M}$ model t. d. $\mathfrak{M} \models S$. Treba dokazati $\mathfrak{M} \in \mathcal{K}$.
- U tu svrhu, konstruiramo $\mathfrak{M}$ od nekih modela iz $\mathcal{K}$ koristeći totalne bisimulacije i ultraprodukte.
- Za konstrukciju bisimulacije tipično se koristi modalna ekvivalencija saturiranih modela. Ultraprodukti (nad prebrojivo nepotpunim ultrafilterima) su saturirani, a preostali uvjet teorema (zatvorenost komplementa na ultrapotencije) dozvoljava pretpostavku da je $\mathfrak{M}$ saturiran.