DIFERENCIJALNE JEDNAČINE - opšti pojmovi i diferencijalne jednačine prvog reda

10. decembar 2020

Opšti pojmovi, definicije

- Diferencijalna jednačina - jednačina koja sadrži bar jedan izvod nepoznate funkcije jedne ili više promenljivih.
- Obična diferencijalna jednačina - nepoznata funkcija je funkcija jedne promenljive, parcijalna diferencijalna jednačina - nepoznata funkcija je funkcija više promenljivih.
- Red diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji se javlja.

Opšti pojmovi, definicije

- Opšti oblik jednačine n-tog reda:

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \quad n \geq 0.$$

- Normalni oblik jednačine n-tog reda:

$$y^{(n)} = F(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

- Funkcija $y = f(x)$, definisana i n puta diferencijabilna u intervalu (a, b) je rešenje jednačine n-tog reda u opštem, tj. normalnom obliku, ako je za svako $x \in (a, b)$

$$G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)) = 0,$$

odnosno

$$f^{(n)} = F(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)).$$

- Rešenje je u implicitnom obliku ako je dato vezom $g(x, y) = 0$, npr. $x^2 + y^2 = r^2$ je implicitno rešenje jednačine $x + yy' = 0$.

Opšti pojmovi, definicije

- Početni (Košijev) problem - Pronaći rešenje jednačine

$$G(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

koje zadovoljava početni uslov

$$y(x_0) = \alpha_0, \quad y'(x_0) = \alpha_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1},$$

pri čemu je x_0 proizvoljna tačka posmatranog intervala, $\alpha_i \in \mathbb{R}$ su proizvoljni brojevi, $i = 0, \ldots, n-1$.

- Granični problem - Problem drugog reda: naći rešenje jednačine $y = y(x)$ jednačine

$$y'' = F(x, y, y')$$

nad intervalom $[a, b]$ koje zadovoljava granični uslov

$$y(a) = A, \quad y(b) = B.$$

Opšti pojmovi, definicije

Modeli: izvod $\frac{dy}{dx}$ predstavlja veličinu promene funkcije $y(x)$ u zavisnosti od x, a sve što se u prirodi dešava je promena

- $y' = ky$, $y = y(x)$, k-proizvoljna konstanta - Maltusov zakon rasta populacije

$N(t)$ - broj jedinki posmatrane populacije u trenutku t; ako smatramo da je veličina promene populacije srazmerna broju jedinki dobijamo matematički model rasta populacije:

$$N'(t) = kN(t), \quad k = const.$$

Tada je $N(t)$ rešenje početnog problema

$$N'(t) = kN(t), \quad N(t_0) = N_0 :$$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} = kN \quad &\Rightarrow \quad \frac{dN}{N} = kdt \Rightarrow \int \frac{dN}{N} = \int kdt \Rightarrow \ln N(t) = kt + c \\ &\Rightarrow \quad N(t) = e^{kt+c} \Rightarrow N(t) = c_1 e^{kt} \end{aligned}$$

$t = t_0 \Rightarrow N(t_0) = c_1 e^{kt_0}$, tj. $c_1 = N_0 e^{-kt_0}$,
pa je rešenje posmatranog početnog problema $\quad N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$.

Opšti pojmovi, definicije

Ukoliko matematički model pojave zadovoljava osobine:

- postoji rešenje početnog problema,
- rešenje početnog problema je jedinstveno,
- rešenje početnog problema neprekidno zavisi od početnih uslova

kaže se da je problem korektno postavljen u smislu Adamara.

- Kvalitativna analiza - ne samo nalaženje rešenja, već i proučavanje njegovih osobina na osnovu posmatrane jednačine
- ključna tačka postupka rešavanja bila je integracija, odatle se termin integrala diferencijalne jednačine koristi za njeno rešenje

Diferencijalne jednačine prvog reda

- Opšti oblik

$$G(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

- Normalni oblik

$$y' = F(x, y) \tag{2}$$

- x je promenljiva, $y = y(x)$ je nepoznata funkcija, y' je izvod po promenljivoj, F, G poznate funkcije.
- $y = f(x)$, definisana i diferencijabilna nad (a, b) je rešenje jednačine (1) odnosno (2) ako za svako $x \in (a, b)$ važi da je

$$G(x, f(x), f'(x)) = 0,$$

odnosno

$$f'(x) = F(x, f(x)).$$

Teorema o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja

Neka je $F(x,y)$ neprekidna u zatvorenoj oblasti $G : \begin{cases} a \le x \le b \\ \alpha \le y \le \beta \end{cases}$ i neka postoji $K > 0$ tako da u oblasti G važi

$$|F(x,y_2) - F(x,y_1)| \le K\,|y_2 - y_1| \text{ (Lipšicov uslov).}$$

Tada postoji jedinstveno rešenje početnog problema

$$y' = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (x_0,y_0) \in G,$$

koje je definisano nad intervalom $[a', b'] \subset [a,b]$.

$$a' = \max\left\{a, x_0 - \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 - \frac{y_0 - \alpha}{M}\right\},$$
$$b' = \min\left\{b, x_0 + \frac{\beta - y_0}{M}, x_0 + \frac{y_0 - \alpha}{M}\right\},$$
$$M = \sup_{(x,y)\in G} |f(x,y)| > 0$$

Jednačina koja razdvaja promenljive

Normalni oblik: $\boxed{y' = f(x)g(y)}$

Teorema

Ako je $f(x)$ neprekidna nad $a < x < b$, a $g(y)$ neprekidna i različita od 0 nad $\alpha < y < \beta$ tada postoji jedinstveno rešenje jednačine $y' = f(x)g(y)$ koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in (\alpha, \beta)$ i definisano je na nekoj okolini x_0. Rešenje je dato sa

$$y(x) = G^{-1}\left(G(y_0) + \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right),$$

pri čemu je $G(u)$ primitivna funkcija za $\frac{1}{g(u)}$ nad (α, β).

Opšte rešenje pod uslovom $g(y) \neq 0$ je dato obrascem

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + c.$$

Homogena diferencijalna jednačina

Normalni oblik: $\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$, $f(t)$ je neprekidna funkcija nad (a, b);

smenom: $\frac{y}{x} = u$, $y' = u + xu'$ svodi se na jednačinu $u' = \frac{f(u) - u}{x}$ koja razdvaja promenljive.

Napomena

Opšte rešenje uz pretpostavku $f(u) - u \neq 0$ dato je obrascem

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln cx \quad \left(u = \frac{y}{x}\right), \quad y = y(x),$$

a partikularno se dobija određivanjem c iz početnog uslova $y(x_0) = y_0$. Gornji integral mora da postoji nad posmatranim intervalom!

Homogena diferencijalna jednačina

Primer

Jednačina $y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, *gde su* $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ *realni brojevi, a* $f(t)$ *neprekidna funkcija nad intervalom* (a, b), *svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive ili na homogenu.*

- Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, jednačina se smenom

$$a_1x + b_1y + c_1 = t \text{ ili } a_2x + b_2y + c_2 = t$$

svodi na jednačinu koja razdvaja promenljive.

- Ako je $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, smenom

$$x = X + \alpha, \quad y = Y + \beta$$

gde su α i β (jedinstvena!) rešenja sistema

$$\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 &= 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 &= 0 \end{aligned}$$

dobija se

$$\begin{aligned} Y' = y' &= f\left(\frac{a_1X + a_1\alpha + b_1Y + b_1\beta + c_1}{a_2X + a_2\beta + b_2Y + b_2\beta + c_2}\right) \\ &= f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) \\ &= g\left(\frac{Y}{X}\right). \end{aligned}$$

Linearna diferencijalna jednačina

Opšti oblik: $\boxed{y' + f(x)\; y = g(x)}$

Teorema

Ako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad intervalom (a, b) tada postoji jedinstveno rešenje linearne diferencijalne jednačine koje zadovoljava početni uslov $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a, b)$, $y_0 \in \mathbb{R}$ i definisano je nad (a, b) u obliku

$$y(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt} \left(y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{x_0}^{t} f(u)du} g(t)dt \right).$$

- smena: $y(x) = u(x) \cdot v(x)$

Bernulijeva jednačina

Opšti oblik: $\boxed{y' + f(x)\ y = g(x)y^{\alpha}, \alpha \in \mathbb{R}}$

- $\alpha = 0$ - linearna diferencijalna jednačina
- $\alpha = 1$ - jednačina koja razdvaja promenljive

- smena: $z(x) = (y(x))^{-\alpha+1}, \quad z'(x) = (1-\alpha)y^{-\alpha}(x)y'(x)$

Svodi se na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$z'(x) + (1-\alpha)\, f(x)\, z(x) - (1-\alpha)\, g(x) = 0$$

Ako su $f(x)$ i $g(x)$ neprekidne nad (a, b), tada kroz svaku tačku (x_0, z_0), gde je $x_0 \in (a, b)$, $z_0 \in \mathbb{R}$, prolazi jedinstveno rešenje definisano nad (a, b). Kako se zbog $\alpha \in \mathbb{R}$ mora pretpostaviti da je $y > 0$, rešenje je u opštem slučaju definisano na najvećem podintervalu (a_1, b_1) od (a, b) kom pripada x_0 i u kom je $z(x) > 0$.

Šta je jednostruko povezana oblast?

Definicija

Ako je $D = I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ *i ako je* $\vec{r} : I \to X_0$ *neprekidna funkcija, tada skup tačaka*

$$L = \{\tau(t) : t \in I\}$$

zovemo kriva ili luk u prostoru, odnosno hodograf vektorske funkcije $\vec{r}$.

- Ako je $M((x(a), y(a), z(a)) \equiv N(x(b), y(b), z(b))$ za krivu L kažemo da je zatvorena, tj. da je luk L zatvoren.
- Ako sve tačke krive L leže u jednoj ravni, onda kažemo da je L ravna kriva.

Jednačina totalnog diferencijala

$$\boxed{P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0}$$

je jednačina totalnog diferencijala ako postoji funkcija $F(x, y)$ takva da je

- $dF(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$
- $\dfrac{\partial F}{\partial x} = P(x,y),\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$

Teorema

Neka su $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ neprekidne u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G i $Q(x_0,y_0) \neq 0$. Da bi jednačina $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ bila jednačina totalnog diferencijala potrebno je i dovoljno da bude za svako $(x,y) \in G$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y).$$

Ako oblast nije jednostruko povezana, tvrđenje ne mora da važi!

Integracioni množitelj

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) \neq \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

Da li postoji funkcija $h(x,y) \neq 0$ takva da je diferencijalna jednačina

$$\boxed{h(x,y)P(x,y)dx + h(x,y)Q(x,y)dy = 0}$$

jednačina totalnog diferencijala, tj. $\dfrac{\partial(hP)}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial(hQ)}{\partial x}(x,y)$?

$$\frac{1}{h}\left(P\frac{\partial h}{\partial y} - Q\frac{\partial h}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$h(x,y)$ - integracioni množitelj (funkcija koja ima u otvorenoj jednostruko povezanoj oblasti G neprekidne parcijalne izvode, zadovoljava gornji uslov i različita je od nule u G)

Klero-ova jednačina

$$\boxed{y = xy' + f(y')}$$

Tvrđenje

neka funkcija $f(t)$ ima nad intervalom (a, b) neprekidan drugi izvod koji je različit od nule i neka je $\varphi(t)$ inverzna funkcija od $-f'(t)$. Tada su rešenja jednačine $y = xy' + f(y')$ funkcije

- $y = xc + f(c), \quad c \in (a, b)$ *(c je konstanta)*
- $y = x\varphi(x) + f(\varphi(x)) \quad$ *(tzv. singularno rešenje)* *definisano nad intervalom (α, β), gde je $\alpha = \inf\limits_{t\in(a,b)} \{-f'(t)\}$ ako infimum postoji, u suprotnom je $\alpha = -\infty$ i $\beta = \sup\limits_{t\in(a,b)} \{-f'(t)\}$ ako supremum postoji, u suprotnom je $\beta = \infty$*
- *svaka kriva sastavljena od proizvoljnog luka AB krive i na nju nastavljenih tangenata u tačkama A i B.*

Lagranžova jednačina

$$\boxed{y = xf(y') + g(y')}$$

Uzmimo $p = y'$, tj. $dy = pdx$. Dobijamo $y = xf(p) + g(p)$, a odavde diferenciranjem $pdx = dy = (xf'(p) + g'(p))dp + f(p)dx$, tj. $(f(p) - p)dx + (xf'(p) + g'(p))dp = 0$.

- $f(p) - p \neq 0 \Rightarrow \dfrac{dx}{dp} + \dfrac{f'(p)}{f(p) - p}x + \dfrac{g'(p)}{f(p) - p}$, što je linearna jednačina, iz koje dobijamo $x = x(p)$, što sa $y(p) = x(p)f(p) + g(p)$ predstavlja rešenje Lagranžove jednačine u parametarskom obliku.
- Ako jednačina $f(p) - p = 0$ ima rešenja i ako je jedno rešenje $p = c$, tada je rešenje jednačine i $y = cx + g(c)$.
- Ako je $f(p) - p = 0$ za svako p, Lagranžova jednačina postaje $y = xy' + g(y')$ (Klero-ova).

(ovo je spec. slučaj opšteg postupka uvođenja parametra)