VEŽBE IZ MATEMATIKE

Novi Sad,
2020.

1. Diferencijalne jednačine

-Arhitektura-

1.1. Diferencijalne jednačine prvog reda

Jednačine oblika $F(x, y, y') = 0$
-opšte rešenje je familija funkcija (krivih) $y = y(x, C)$, gde je $C \in \mathbb{R}$ proizvoljno
-partikularno rešenje je funkcija $y = y(x, C_0)$, gdje je $C_0 \in \mathbb{R}$ unapred utvrđena konstanta

Zadatak 1.1. Naći opšte rešenje diferencijalnih jednačina:
$a) y' = \dfrac{-x - xy}{y + xy}$; $\quad b) y(x^2 - 1)y' = -x(y^2 - 1)$; $\quad c)(e^x + 1)y' = \dfrac{e^{2x}}{y}$

Rešenje: U pitanju su **jednačine koje razdvajaju promenljive**. Razdvajaćemo promenljivu x na jednu stranu, a promenljivu y na drugu stranu i zatim integralimo.
$a)$

$$y' = \frac{-x}{1+x} \cdot \frac{1+y}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{1+x} \cdot \frac{1+y}{y}$$

$$\frac{y}{1+y} dy = \frac{-x}{1+x} dx$$

$$\int \frac{y+1-1}{y+1} dy = -\int \frac{x+1-1}{x+1} dx$$

$$\int dy - \int \frac{dy}{y+1} = -\int dx + \int \frac{dx}{x+1}$$

$$y - \ln|y+1| = -x + \ln|x+1| + C$$

$b)$

$$y(x^2-1)\frac{dy}{dx} = -x(y^2-1)$$

$$\frac{y}{y^2-1} dy = \frac{-x}{x^2-1} dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{2y}{y^2-1} dy = \frac{-1}{2}\int \frac{2x}{x^2-1} dx$$

$$\ln|y^2-1| = -\ln|x^2-1| + C$$

$$\ln|y^2-1| + \ln|x^2-1| - C$$

$$\ln|(y^2-1)(x^2-1)| = C$$

$$|y^2-1||x^2-1| = e^C$$

$c)$

$$(e^x+1)\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{y}$$

$$ydy = \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$$
$$\int ydy = \int \frac{e^x \cdot e^x}{e^x+1}dx$$
$$\frac{y^2}{2} = \int \frac{t-1}{t}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t}$$
$$\frac{y^2}{2} = e^x + 1 - \ln(e^x+1) + C$$

Zadatak 1.2. Naći opšte rešenje diferencijalnih jednačina
$a) y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$; $\quad b) y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$.

Rešenje: U ovom zadatku date su **homogene diferencijalne jednačine** koje ćemo rešavati uvođenjem smene $\frac{y}{x} = u$.

a) Uvođenjem smene $\frac{y}{x} = u$, odnosno $y = x \cdot u$ sledi da je $y' = u + xu'$.

$$u + xu' = u - u^2 \quad \text{tj. } xu' = -u^2$$
$$x\frac{du}{dx} = -u^2$$
$$-\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$$
$$-\int \frac{du}{u^2} = \int \frac{dx}{x}$$
$$\frac{1}{u} = \ln|x| + C, \quad C = \ln|C_1|$$
$$\frac{1}{u} = \ln|C_1 x|$$
$$u = \frac{1}{\ln|C_1 x|}$$
$$y = \frac{x}{\ln|C_1 x|}$$

b)

$$y' = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{y}{x}}$$
$$u + xu' = \frac{u^2-1}{2u}$$
$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^2 - 1 - 2u^2}{2u} = -\frac{u^2+1}{2u}$$
$$\frac{2u}{u^2+1}du = -\frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{2u}{u^2+1}du = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln\left(u^2+1\right) = -\ln|x| + C, \quad C = \ln|C_1|$$

$$\ln\left(u^2+1\right) = \ln\left|\frac{C_1}{x}\right|$$

$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = \frac{C_1}{x}$$

Zadatak 1.3. Rešiti početni problem $xy' - y = x\sin\dfrac{y}{x}$, $y(1) = 2$.

Rešenje: Istom smenom $y = xu$, odnosno $y' = u + xu'$ dolazimo do

$$y' - \frac{y}{x} = \sin\frac{y}{x}$$

$$u + xu' - u = \sin u$$

$$\int\frac{du}{\sin u} = \int\frac{dx}{x}$$

$$\ln \mathrm{tg}\frac{u}{2} = \ln Cx$$

$$\mathrm{tg}\frac{u}{2} = Cx$$

$$\frac{y}{2x} = \mathrm{arctg}Cx$$

$$y = 2x\cdot\mathrm{arctg}Cx$$

Treba da važi $2 = 2\mathrm{arctg}C$, tj. $\mathrm{arctg}C = 1$ pa sledi da je $C = \dfrac{\pi}{4}$ i time smo dobili rešenje $y = 2x\cdot\mathrm{arctg}\dfrac{\pi x}{4}$

ubaciti zadatak

Zadatak 1.4. Rešiti diferencijalne jednačine: $a) y' - y = e^x, \quad b) y' = x^2 - \dfrac{y}{x}$.

Rešenje: U ovom zadatku date su nam **linearne diferencijalne jednačine**. To su jednačine oblika $y' + f(x)y = g(x)$, gde su f, g neprekidne funkcije. Postupak za njihovo rešavanje: uvodimo smenu $y = u\cdot v$ čime dobijamo $u'v + uv' + f(x)uv = g(x)$, tj. $u'v + (v' + f(x)v)\,u = g(x)$. Nepoznatu funckije $v(x)$ tražimo iz uslova $v' + f(x)v = 0$ što je jednačina koja razdvaja promenljive.

$a)$ Uvodeći pomenutu smenu dobijamo

$$u'v + uv' - uv = e^x$$

Iz islova $v' - v = 0$ sledi

$$\frac{dv}{dx} = v \implies \int\frac{dv}{v} = \int dx$$

odakle sledi da je $\ln|v| = x$, odnosno $v = e^x$. Vraćamo u početnu jednačinu i tražimo funkciju $u(x)$.

$$u'\cdot e^x = e^x \implies \frac{du}{dx} = 1$$

Dobijamo da je $u = x + C$ i konačno $y = e^x(x + C)$ je opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine.

$b)$

$$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = x^2$$

$$u'v + \left(v' + \frac{v}{x}\right) u = x^2$$

Iz uslova $v' + \frac{v}{x} = 0$ dobijamo funkciju $v(x)$.

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = -\ln|x|$$

$$v = \frac{1}{x}$$

Vraćamo u polaznu jednačinu i tražimo funkciju $u(x)$.

$$\frac{u'}{x} = x^2$$

$$\int du = \int x^3 dx$$

$$u = \frac{x^4}{4} + C$$

Time je opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine $y = \frac{1}{x}\left(\frac{x^4}{4} + C\right)$.

Zadatak 1.5. Rešiti početni problem $y' + \frac{y}{x} = 1$, $y(2) = 2$.

Rešenje: Uvodimo smenu $y = uv$,

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = 1$$

$$u'v + \left(v' + \frac{v}{x}\right) u = 1$$

Tražimo nepoznatu funkciju $v(x)$ ćemo pronaći iz uslova

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\ln v = -\ln x, \quad v = \frac{1}{x}$$

Dalje sledi da je

$$u' \cdot \frac{1}{x} = 1$$

$$du = xdx$$

$$u = \frac{x^2}{2} + C$$

Konačno

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{2} + \frac{C}{x}$$

Treba da važi: $\frac{2}{2} + \frac{C}{2} = 2$, odnosno $\frac{C}{2} = 1$ pa je $C = 2$ i funkcija $y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ je partikularno rešenje početnog problema.

Zadatak 1.6. Rešiti diferencijalne jednačine $a) y' - \frac{2}{x}y = 2x\sqrt{y}$, $\quad b) xy' + y = xy^2 \ln x$.

Rešenje: U ovom zadatku imamo **Bernulijevu diferencijalnu jednačinu**. To je jednačina oblika $y' + f(x)y = g(x)y^\alpha$, gde je $\alpha \in \mathbb{R}$, a f, g su neprekidne funkcije (za $\alpha = 0$ ili $\alpha = 1$ u pitanju je linearna diferencijalna jednačina).

Postupak za rešavanje: uvodimo smenu $z(x) = y^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ i time ćemo doći do linearne diferencijalne jednačine koju smo već naučili da rešimo

$a)$ U ovom slučaju α je $\frac{1}{2}$ pa je smena koju koristimo $z = y^{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{y}$. Tada je $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y' \implies y' = 2\sqrt{y}z'$.

$$\frac{2y'}{\sqrt{y}} - \frac{2}{x}\sqrt{y} = 2x$$

$$z' - \frac{1}{x}z = x$$

što jeste linearna diferencijalna jednačina. Koristimo smenu $z = uv$.

$$u'v + uv' - \frac{1}{x}uv = x$$

Iz uslova $v' - \frac{v}{x} = 0$ dobićemo funkciju $v(x)$.

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|v| = \ln|x|$$

$$v = x$$

Nakon vraćanja u linearnu jednačinu dobijamo

$$u' \cdot x = x$$

$$\int du = \int dx$$

$$u = x + C$$

Sledi da je $z = x(x+C)$, odnosno $y = (x(x+C))^2$ je opšte rešenje diferencijalne jednačine.

b) U ovom slučaju $\alpha = 2$, smena: $z = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$, pa je $z' = -\frac{1}{y^2}y'$.

$$xy' + y = xy^2 \ln x / : xy^2$$

$$\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{xy} = \ln x$$

$$-z' + \frac{z}{x} = \ln x$$

$$z' - \frac{z}{x} = -\ln x$$

Smena: $z = uv$

$$u'v + uv' - \frac{uv}{x} = -\ln x$$

$$u'v + \left(v' - \frac{v}{x}\right) u = -\ln x$$

Funkciju v ćemo naći iz uslova

$$v' - \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x}$$

$$v = x$$

Ostaje da odredimo funkciju $u(x)$

$$xu' = -\ln x$$

$$\int du = -\int \frac{\ln x dx}{x}$$

$$u = -(\ln x)^2 + C$$

Tada je $z = -x\left((\ln x)^2 + C\right)$, odnosno $y = \dfrac{-1}{x\left((\ln x)^2 + C\right)}$.

1. Izračunati neodređene integrale

   a) [5 poena] $\displaystyle\int \frac{2x - \sqrt{x} - 2}{2x + 2\sqrt{x}}\, dx$. b) [5 poena] $\int e^{-x} \sin x dx$.

2. [5 poena] Izračunati površinu koju ograničavaju kriva $y = x^2 + x + 2$ i prava $x + y - 2 = 0$.

3. [5 poena] Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$.

4. [5 poena] Odrediti rešenje diferencijalne jednačine $y'' + 4y' + 4y = (2x+1)\sin x$.

Arhitektura i urbanizam
Matematika, zadaci za III kolokvijum, 29. I 2019.

1. Izračunati neodređene integrale

   a) $\int x\cos 5x dx$, b) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{2(1+\cos x)}dx$, c) $\displaystyle\int \frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}dx$.

2. Odrediti površinu ravnog lika ograničenog pravom $y=-x$ i parabolom $y=x^2-6$.

3. Odrediti opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine $y'+y\dfrac{1}{x}=x^3$.

4. Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine $y''-5y'+4y=xe^{2x}$.

1.2. Diferencijalne jednačine višeg reda

Jednačine oblika $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ gde je $n \geq 2$.

Zadatak 1.7. Rešiti diferencijalne jednačine:
$a) y'' = e^{2x}$; $\quad b) x^2 y'' = (y')^2$; $\quad c) 2yy'' = (y')^2 + 1$

Rešenje: Ove jednačine ćemo rešiti snižavajući stepen.

$a)$ Direktnom integracijom ćemo doći do rešenja.

$$y' = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

$$y = \int \left(\frac{1}{2} e^{2x} + C \right) dx = \frac{1}{4} e^{2x} + Cx + D$$

$b)$ Jednačina ne sadrži promenljivu y. Sa z ćemo označiti "najniži"izvod funkcije y. U našem slučaju $y' = z(x)$. Tada je $y'' = z'$. Jednačina postaje

$$x^2 z' = z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2}{x^2}$$

$$\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - C$$

$$z = \frac{x}{1 + Cx}$$

Odnosno, dobili smo da je $y' = \dfrac{x}{1 + Cx}$, dalje je

$$y = \frac{1}{C} \int \frac{Cx + 1 - 1}{1 + Cx} dx = \frac{1}{C} \left(\int dx - \int \frac{dx}{1 + Cx} \right) = \frac{1}{C} \left(x - \frac{1}{C} \ln|1 + Cx| + C_1 \right)$$

$c)$ Data jednačina sada ne sadrži promenljivu x. Smena koja rešava problem je $y' = p(y)$. Time y postaje nezavisno promenljiva. Tada važi

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = p' \cdot y' = p' \cdot p.$$

Jednačina postaje

$$2yp'p = p^2 + 1$$

$$2p \frac{dp}{dy} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{y}$$

$$\int \frac{2pdp}{p^2 + 1} = \int \frac{dy}{y}$$

$$\ln(p^2 + 1) = \ln y + \ln C$$

$$p^2 + 1 = Cy$$

Ako vratimo smenu dobijamo $(y')^2+1=Cy$, odnosno $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{Cy-1}$. Koristeći smenu $Cy-1=t \implies Cdy=dt$ rešavamo integral

$$\int \frac{dy}{\sqrt{Cy-1}} = \int t^{-\frac{1}{2}} dt = 2t + C = 2\sqrt{Cy-1}+C$$

Konačno sledi da je

$$2\sqrt{Cy-1}+C=x$$

Rešenje može ostati u tom obliku, a može se i dovesti do $Cy=\left(\dfrac{x-C}{2}\right)^2+1.$

• Homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

Rešavamo jednačine oblika $y''+a_1y'+a_2y=0$

Partikularno rešenje je oblika $y=e^{ax}$. Opšte rešenje tražimo u obliku $y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}$ gde su $c_1,c_2\in\mathbb{R}$ koeficijenti, a k_1,k_2 su rešenja karakteristične jednačine $k^2+a_1k+a_2=0$. U slučaju da karakteristična jednačina ima jedan dvostruki koren, rešenje diferencijalne jednačine tražimo u obliku $y=c_1e^{kx}+c_2xe^{kx}$, gde je k taj koren.

U slučaju da karakteristična jednačina ima kompleksna rešenja $\alpha\pm\beta i$, rešenje diferencijalne jednačine je oblika $y=c_1e^{\alpha x}\cos\beta x+c_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Zadatak 1.8. Rešiti diferencijalne jednačine:
$a)y''+3y'+2y=0;\quad b)y''+4y=4y';\quad c)y''+y'+y=0.$

Rešenje: a) Karakteristična jednačina je $k^2+3k+2=0$ čija su rešenja $k_1=-1,k_2=-2$.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine je $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.

b) Karakteristična jednačina $k^2-4k+4=0$ tj. $(k-2)^2=0$, pa je $k=2$ dvostruki koren.

Opšte rešenje jednčine je $y=c_1e^{2x}+c_2xe^{2x}$.

c) Karakteristična jednačina je $k^2+k+1=0$, čija su rešenja $k_{1,2}=\dfrac{-1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine je $y=c_1e^{\frac{-1}{2}x}\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+c_2e^{\frac{-1}{2}x}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}$

• Nehomogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima

-metod jednakih koeficijenata

Rešavamo jednačine oblika $y''+a_1y'+a_2y=f(x)$. Rešenje će biti oblika $y=y_h+y_p$, gde je y_h homogeno a y_p partikularno rešenje. Za specijalan oblik funkcije $f(x)$ možemo naći partikularno rešenje koristeći metod jednakih koeficijenata.

Ako je $f(x)=e^{ax}\left(P_m(x)\cos bx+Q_n(x)\sin bx\right)$ tada je

$$y_p=x^re^{ax}\left(T_N(x)\cos bx+R_N(x)\sin bx\right),$$

gde su T_N,P_N nepoznati polinomi stepena $N=\max\{m,n\}$, r je višestrukost korena $a+bi$ u karakterističnoj jednaini(ako $a+bi$ nije rešnje onda je $r=0$).

Zadatak 1.9. Rešiti diferencijalne jednačine
$a) y''-4y'+3y=e^{2x}$; $b) y''+9y=2x^2-4+e^x$; $c) y''+5y'+6y=(x-1)\cos x$.

Rešenje: $a)$ Prvo rešavamo homogenu jednačinu $y''-4y'+3y=0$, tako što postavljamo karakterističnu jednačinu $k^2-4k+3=0$. Rešenja su $k_1=3, k_2=1$. Time smo dobili $y_h=c_1e^{3x}+c_2e^x$.
Funkciju $f(x)=e^{2x}$ izjednačavamo sa $e^{ax}\left(P_m(x)\cos bx+Q_n(x)\sin bx\right)$, odakle vidimo da je nama $a=2, b=0, P_m=1, Q_n=0$. Broj $2+0\cdot i+2$ nije rešenje karakteristične jednačine, pa je $r=0$, $N=1$. Partikularno rešenje je

$$y_p=e^{2x}\left(A\cos 0+B\sin 0\right)=Ae^{2x}.$$

$y'_p=2Ae^{2x}, y''_p=4Ae^{2x}$.
Uvrštavamo partikularno rešenje u diferencijalnu jednačinu

$$4Ae^{2x}-8Ae^{2x}+3Ae^{2x}=e^{2x}$$

$$-Ae^{2x}=e^{2x}$$

$$A=-1$$

Dakle, partikularno rešenje je $y_p=-e^{2x}$, a opšte rešenje diferencijalne jednačine je $y=c_1e^{3x}+c_2e^x-e^{2x}$.

$b)$ Karakteristična jednaǐna $k^2+9=0 \implies k_1=3, k_2=-3$. Rešenje homogenog dela je $y_h=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}$.

Funkciju $f(x)$ ćemo rastaviti na dva dela $f_1(x)=2x^2-4$, $f_2(x)=e^x$, i time ćemo dobiti y_{p_1} i y_{p_2}.

$f_1(x)=2x^2-4: a=0, b=0, P_m(x)=2x^2-4, Q_n(x)=0$, r će biti 0, a $N=2$. Partikularno rešenje je oblika $y_{p_1}=Ax^2+Bx+C$, $y'_{p_1}=2Ax+B$, $y''_{p_1}=2A$

$$2A+9Ax^2+9Bx+9C=2x^2-4$$

Sledi da je $9A=2, 9B=0, 9C+2A=-4$, tj. $A=\dfrac{2}{9}, B=0, C=\dfrac{-4-\frac{4}{9}}{9}=\dfrac{-40}{81}$.

$f_2(x)=e^x: a=1, b=0, P_m(x)=1, Q_n(x)=0$, $r=0$, $N=1$

Partikularno rešenje $y_{p_2}=Ae^x, y'_{p_2}=Ae^x, y''_{p_2}=Ae^x$.

$Ae^x+9Ae^x=e^x$, tj. $A=\dfrac{1}{10}$.

Opšte rešenje sistema je $y=y_h+y_{p_1}+y_{p_2}=c_1e^{3x}+c_2e^{-3x}+\dfrac{2}{9}x^2-\dfrac{40}{81}+\dfrac{1}{10}e^x$.

$c)$ Karakteristična jednačina: $k^2+5k+6=0 \implies k_1=-3, k_2=-2$.
Rešenje homogenog dela:
$y_h=c_1e^{-3x}+c_2e^{-2x}$.

$f(x)=(x-1)\cos x=e^{ax}\left(P_m(x)\cos bx+Q_n(x)\cos bx\right)$ Kod nas je $a=0, b=1, P_m(x)=x-1, Q_n(x)=0$, $r=0$, $N=1$. Tada je partikularno rešenje $y_p=(Ax+B)\cos x+(Cx+D)\sin x$. Važi $y'_p=A\cos x-(Ax+B)\sin x+C\sin x+(Cx+D)\cos x=(A+Cx+D)\cos x+(C-Ax-B)\sin x$

i $y_p'' = C\cos x - (Cx + A + D)\sin x - A\sin x + (C - Ax - B)\cos x = (-Ax + 2C - B)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x$. Uvrštavamo u diferencijalnu jednačinu:

$$(-Ax + 2C - B)\cos x + (-Cx - 2A - D)\sin x + 5(A + Cx + D)\cos x +$$

$$+5(C - Ax - B)\sin x + 6(Ax + B)\cos x + 6(Cx + D)\sin x = (x - 1)\cos x$$

$$(5Ax+5Cx+5A+5B+5D+2C)\cos x+(5Cx-5Ax-2A+5C+5D-5B)\sin x = (x-1)\cos x$$

Sledi:

$$5Ax + 5Cx + 5A + 5B + 5D + 2C = x - 1 \quad \text{i}$$

$$5Cx - 5Ax - 2A + 5C + 5D - 5B = 0$$

Sistem jednačina koji dobijamo

$$\begin{array}{rcr} 5A + \quad 5C & = & 1 \\ 5A + 5B + 2C + 5D & = & -1 \\ -5A + \quad 5C & = & 0 \\ -2A - 5B + 5C + 5D & = & 0 \end{array}$$

-varijacija konstanti

Ako su nam poznata partikularna rešenja y_1, y_2 homogene diferencijalne jednačine, opšte rešenje nehomogene diferencijalne jednačine možemo zapisati kao $y = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$ gde su $c_1(x), c_2(x)$ funkcije određene sistemom jednačina

$$\begin{array}{llcc} c_1'(x)y_1 & +c_2'y_2 & = & 0 \\ c_1'(x)y_1' & +c_2'(x)y_2' & = & f(x) \end{array}$$

Zadatak 1.10. Rešiti diferencijalne jednačine varijacijom konstanti
$a) y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}; \quad b) y'' - 4y' + 3y = e^{2x}.$

Rešenje:

a) Karakteristična jednačina $k^2 - 2k + 1 = 0$ tj. $k = 1$ je dvostruko rešenje. $y = c_1(x)e^x + xc_2(x)e^x$. Funkcije $c_1(x)$ i $c_2(x)$ ćemo dobiti iz uslova

$$\begin{array}{ccccc} c_1'e^x & + & c_2'xe^x & = & 0 \\ c_1'e^x & + & c_2'(x+1)e^x & = & \frac{e^x}{x} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} c_1' & + & c_2'x & = & 0 \\ c_1' & + & c_2'(x+1) & = & \frac{1}{x} \end{array}$$

Kada od druge jednačine oduzmemo prvu dobijamo $c_2'(x) = \dfrac{1}{x}$. Tada sledi da je $c_1'(x) = -1$.

Integracijom dobijamo da je $c_2(x) = \ln|x|$ i $c_1(x) = -x$.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine:

$$y = -xe^x + xe^x \ln|x|.$$

b) Karakteristična jednačina: $k^2 - 4k + 3 = 0$ čija su rešenje $k_1 = 1, k_2 = 3$. Rešenje je $y = c_1(x)e^x + c_2(x)e^{3x}$. Varijacijom konstanti ćemo naći funkcije $c_1(x), c_2(x)$.

$$\begin{array}{ccccc} c_1'e^x & + & c_2'e^{3x} & = & 0 \\ c_1'e^x & + & 3c_2'e^{3x} & = & e^{2x} \end{array}$$

Prvo jednačinu pomoženu sa -1 dodamo drugoj pa dobijamo $2c_2'e^{3x} = e^{2x}$, odnosno $c_2'(x) = \dfrac{1}{2}e^{-x}$. Kada vratimo u prvu jednačinu sledi da je
$c_1'(x) = -\dfrac{e^x}{2}$, odnosno $c_1(x) = -\frac{e^x}{2}$.

Opšte rešenje diferencijalne jednačine je

$$y = -\frac{e^x}{2} \cdot e^{2x} - \frac{e^{-x}}{2}e^{3x}$$