INDUSTRIJSKO INŽENJERSTVO **_Ispit iz Matematike 2,_ 14.07.2014.**

1. (a) Izračunati $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+5x+5}$. (b) Izračunati vrednost prvog izvoda funkcije $f(x) = \dfrac{x^2-x}{\sin x}$ u tački $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
2. Ispitati funkciju $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ i nacrtati njen grafik.
3. Izračunati $I = \int \ln x\, dx$.
4. Izračunati zatvorenu površinu između krive $y = x^2 - 1$ i prave $y = x + 1$.
5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - 5y = 5x$.


INDUSTRIJSKO INŽENJERSTVO **_Ispit iz Matematike 2,_ 14.07.2014.**

1. (a) Izračunati $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+5x+5}$. (b) Izračunati vrednost prvog izvoda funkcije $f(x) = \dfrac{x^2-x}{\sin x}$ u tački $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
2. Ispitati funkciju $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ i nacrtati njen grafik.
3. Izračunati $I = \int \ln x\, dx$.
4. Izračunati zatvorenu površinu između krive $y = x^2 - 1$ i prave $y = x + 1$.
5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - 5y = 5x$.

INDUSTRIJSKO INŽENJERSTVO **_Ispit iz Matematike 2,_ 14.07.2014.**

1. (a) Izračunati $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+5x+5}$. (b) Izračunati vrednost prvog izvoda funkcije $f(x) = \dfrac{x^2-x}{\sin x}$ u tački $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
2. Ispitati funkciju $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ i nacrtati njen grafik.
3. Izračunati $I = \int \ln x\, dx$.
4. Izračunati zatvorenu površinu između krive $y = x^2 - 1$ i prave $y = x + 1$.
5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - 5y = 5x$.

INDUSTRIJSKO INŽENJERSTVO **_Ispit iz Matematike 2,_ 14.07.2014.**

1. (a) Izračunati $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+3x+2}{x^3+x^2+5x+5}$. (b) Izračunati vrednost prvog izvoda funkcije $f(x) = \dfrac{x^2-x}{\sin x}$ u tački $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
2. Ispitati funkciju $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1}$ i nacrtati njen grafik.
3. Izračunati $I = \int \ln x\, dx$.
4. Izračunati zatvorenu površinu između krive $y = x^2 - 1$ i prave $y = x + 1$.
5. Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y' - 5y = 5x$.

**REŠENJA:**

1.

2. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-1} = \dfrac{x^3}{(x-1)(x+1)}$,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-2x^4}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2-1)^2},$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(4x^3-6x)(x^2-1)^2 - 4x(x^4-3x^2)(x^2-1)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{2x\big((2x^2-3)(x^2-1)-2(x^4-3x^2)\big)}{(x^2-1)^3} \\ &= \frac{2x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}. \end{aligned}$$

(a) *Domen funkcije*: očigledno je domen funkcije $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(b) *Parnost/neparnost funkcije*: funkcija $f$ je neparna jer je

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x),$$

te je funkciju dovoljno ispitivati za $x \geq 0$ jer je grafik centralno-simetričan u odnosu na koordinatni početak.

(c) *Nule i znak funkcije*:

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$

| | | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x^3$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $x+1$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Dakle, $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty,-1)\cup(0,1)$, i $f(x) > 0$ za $x \in (-1,0)\cup(1,\infty)$.

(d) *Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije*: kako u

$$f'(x) = \frac{x^2(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x^2-1)^2},$$

važi da je $x^2 \geq 0$ i $(x^2-1)^2 > 0$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$, dobijamo

$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right) > 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x < -\sqrt{3} \vee x > \sqrt{3}\right).$

Dakle,

* funkcija $f$ je monotono rastuća za $x \in \left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},\infty\right)$;
* funkcija $f$ je monotono opadajuća za $x \in \left(-\sqrt{3},\sqrt{3}\right)$;
* u $-\sqrt{3}$ funkcija $f$ ima lokalni maksimum gde je $f\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$, a u $\sqrt{3}$ funkcija $f$ ima lokalni minimum pri čemu je $f\left(\sqrt{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(e) *Konveksnost / konkavnost funkcije*: kako u

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x-1)^3(x+1)^3}$$

važi da je $x^2+3 > 0$ za sve $x \in \mathcal{D}_f$, dobijamo

| | | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x$ | $-$ | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x+1)^3$ | $-$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $(x-1)^3$ | $-$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $+$ | $-$ | $+$ |

Prema tome, funkcija $f$ je konveksna za $x \in (-1,0)\cup(1,\infty)$, a konkavna za $x \in (-\infty,-1)\cup(0,1)$, pri čemu su $-1$, $0$ i $1$ prevojne tačke.

(f) *Vertikalne asimptote funkcije*: neprekidna funkcija $f$ vertikalne asimptote može imati u tačkama $-1$ i $1$ (u rubovima svog domena). Kako je

$$\lim_{x\to-1} f(x) = \lim_{x\to-1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{\pm 0} = \pm\infty,$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{\pm 0} = \pm\infty,$$

tako da su prave $x=-1$ i $x=1$ s obe strane vertikalne asimptote funkcije $f$.

(g) *Horizontalna / kosa asimptota funkcije*: Kako je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} \frac{:x^2}{:x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{1-\frac{1}{x^2}} = \begin{cases} +\infty & , \quad x\to+\infty \\ -\infty & , \quad x\to-\infty \end{cases},$$

funkcija nema ni levu ni desnu horizontalnu asimptotu. Kako je

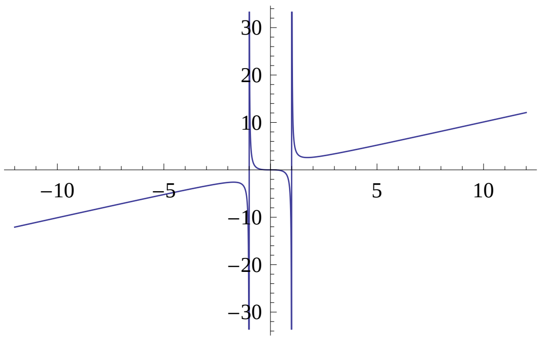
$$n = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2-1} \frac{:x^2}{:x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x^2}} = 1,$$

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x)-nx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-(x^2-1)x}{x^2-1} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2-1} \frac{:x}{:x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x-\frac{1}{x}} = 0,$$

sledi da je prava $y=x$ i leva i desna kosa asimptota funkcije.

(h) *Grafik funkcije*:




4. Kvadratna funkcija $y=x^2-1$ je konveksna, tako da će, u delu gde ona i prava $y=x+1$ obrazuju zatvorenu površinu, prava biti „iznad"krive. Nalazimo presečne tačke krive i prave:

$$x^2-1=x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \{-1,2\},$$

te je tražena površina

$$P = \int_{-1}^{2} \left((x+1)-(x^2-1)\right)dx = \int_{-1}^{2} \left((x+1)-(x^2-1)\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{2} + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{2} + 2x \Big|_{-1}^{2} = -\frac{8}{3} - \frac{1}{3} + 2 - \frac{1}{2} + 4 + 2 = \frac{9}{2}.$$

5.