Mehatronika
Matematika 3
`TEORIJA - prvi deo`

`Ime i prezime:` ____________________________
`Broj indeksa:` ____________________________

Novi Sad, 15. 04. 2018

1. **Nacrtati nivo krive funkcije $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$ koje prolaze kroz tačku $(2,3)$.**

   Jednačina nivo krive funkcije $f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$ je oblika $f(x,y) = c$ za neku konstantu $c \in \mathbb{R}$. Kako nivo kriva prolazi kroz tačku $(2,3)$, onda važi
   $$f(2,3) = c \Leftrightarrow 2^2 - (3-1)^2 = c \Leftrightarrow c = 0.$$
   Tako dobijamo da su jednačine nivo krivih za koje je $c = 0$ sledećeg oblika
   $$x^2 - (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = (y-1)^2 \Leftrightarrow y - 1 = x \vee y - 1 = -x \Leftrightarrow y = x + 1 \vee y = -x + 1.$$
   Treba primetiti da samo prava $y = x + 1$ sadrži tačku $(2,3)$.

2. **Napisati totalni diferencijal drugog reda funkcije $f(x,y) = y \sin xy$ u tački $(0,2)$.**

   $$\begin{array}{lcll} f_x & = & y^2 \cos xy & \\ f_y & = & \sin xy + xy \cos xy & \\ f_{xx} & = & -y^3 \sin xy & f_{xx}(0,2) = 0 \\ f_{xy} & = & 2y \cos xy - xy^2 \sin xy & f_{xy}(0,2) = 4 \\ f_{yy} & = & x \sin xy + x \cos xy - x^2 y \sin xy & f_{yy}(0,2) = 0 \quad d^2 f(0,2) = f_x x(0,2) dx^2 + 2 f_{xy} dx dy + f_{yy}(0,2) dy^2 = 8 dx dy \end{array}$$

3. **Približno izračunati vrednost $\sqrt{4.01^2 + 2.98^2}$.**

   Posmatramo funkciju $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, tačku $(x,y) = (4,3)$ i priraštaje argumenata $\Delta x = dx = 0.01, \Delta y = dy = -0.02$.

   Totalni diferencijal prvog reda funkcije f je
   $$dz(x,y) = f_x dx + f_y dy = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dy \Rightarrow dz(4,3) = \frac{4}{5} dx + \frac{3}{5} dy$$
   Sada je
   $$\Delta z(4,3) \approx dz(4,3) \Leftrightarrow f(4 + 0.01, 3 - 2.98) - f(4,3) = dz(4,3) \Leftrightarrow f(4 + 0.01, 3 - 2.98) = f(4,3) + dz(4,3).$$
   Znači,
   $$\sqrt{4.01^2 + 2.98^2} \approx \sqrt{4^2 + 3^2} + \frac{4}{5} \cdot 0.01 - \frac{3}{5} 0.02 = 5 + 0.008 - 0.012 = 4.996.$$

4. **Izračunati integral funkcije $\vec{F}(\vec{r}) = 2\vec{r}$ duž krive $L = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t), t \in [0, 4\pi]\}$ koja je orijentisana u smeru koji odgovara rastu parametra t.**

   Parametrizacija:
   $$\begin{array}{lcllcl} x(t) & = & \cos t & \dot{x}(t) & = & -\sin t \\ y(t) & = & \sin t & \dot{y}(t) & = & \cos t \\ z(t) & = & t & \dot{z}(t) & = & 1 \end{array}$$
   Integral vektorske funkcije:
   $$\begin{aligned} \int_L \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r} &= \int_0^{4\pi} (x(t), y(t), z(t)) \cdot (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) dt = \int_0^{4\pi} (\cos t, \sin t, t) \cdot (-\sin t, \cos t, 1) dt \\ &= \int_0^{4\pi} (-\sin t \cos t + \sin t \cos t + t) dt = \int_0^{4\pi} t dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{4\pi} = 8\pi^2. \end{aligned}$$

5. **Izračunati zapreminu lopte $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 9\}$ pomoću trostrukog integrala.**

   $$\begin{array}{lcll} x - 1 & = & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \in [0,3] \\ y - 1 & = & \rho \sin \varphi \sin \theta & \varphi \in [0, 2\pi] \\ z - 1 & = & \rho \cos \theta & \theta \in [0, \pi] \end{array}$$
   $$\begin{aligned} \Delta V &= \left| \iiint_V dx dy dz \right| = \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \rho^2 d\rho \\ &= -\cos \theta \Big|_0^{\pi} \cdot \varphi \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{3} \rho^3 \Big|_0^3 = -(-1-1) \cdot 2\pi \cdot \frac{27}{3} = 36\pi. \end{aligned}$$