

NEKE ZNAČAJNE NEPREKIDNE SLUČAJNE PROMENLJIVE

Raspodele „sa imenom“

- Slučajne promenljive koje opisuju klase tipskih verovatnosnih eksperimenata su dobile ime i posebno su proučavane
- U njima figurišu parametri, čije vrednosti određujemo iz konkretnih primera
- Kada odredimo ime i parametre, određene su funkcija gustine, funkcija raspodele, numeričke karakteristike
- Neprekidne raspodele „sa imenom“: uniformna, eksponencijalna, normalna, Studentova, Pirsonova hi-kvadrat, gama, Pareto, Vejbulova...

Uniformna raspodela $\mathcal{U}(a,b)$

- Slučajna promenljiva ima uniformnu raspodelu sa parametrima a i b ako je verovatnoća ravnomerno raspoređena na intervalu (a,b) , a događaj da sl. pr. uzima vrednosti izvan ovog intervala je nemoguć.
- To znači da verovatnoća $P(c < X < d)$ zavisi samo od dužine intervala (c,d) (za intervale takve da je $a < c < d < b$), a ne i od njegovog položaja.
- Parametri a i b predstavljaju granice intervala na kome je funkcija gustine slučajne promenljive različita od 0.
- Primer: generator slučajnih brojeva

Napomena: postoje i diskretna i neprekidna uniformna raspodela, ali mi ovde pod uniformnom podrazumevamo samo neprekidnu.

Uniformna raspodela $\mathcal{U}(a,b)$

- Funkcija gustine:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b); \end{cases}$$

- Funkcija raspodele:

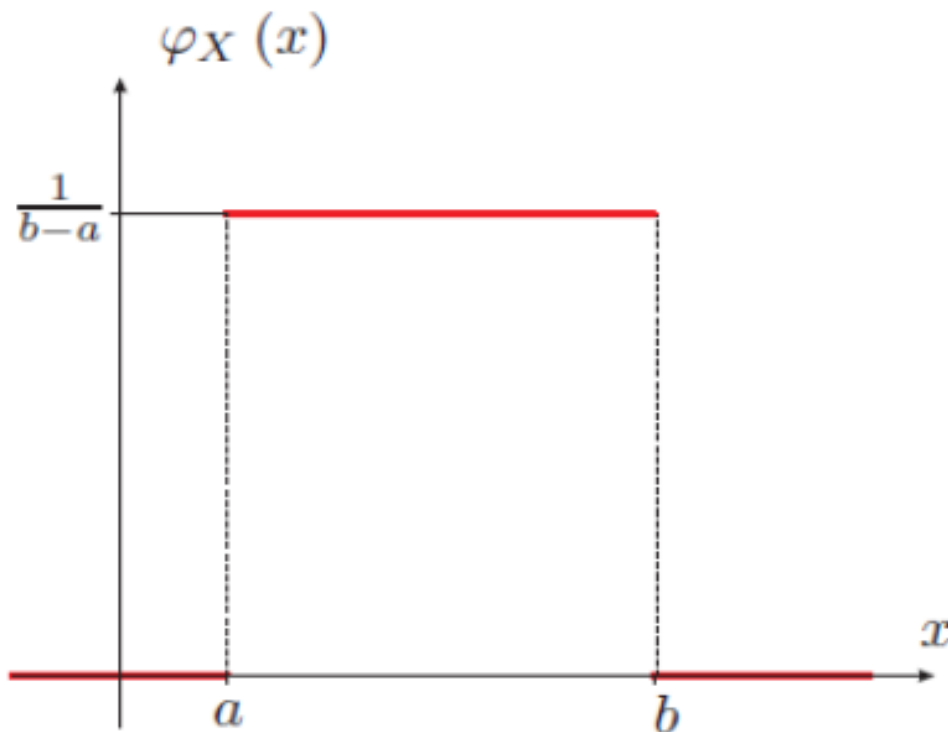
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

- Može se pokazati da za ovakvu funkciju gustine, matematičko očekivanje i disperzija kod uniformne raspodele iznose:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Grafik gustine za $\mathcal{U}(a,b)$

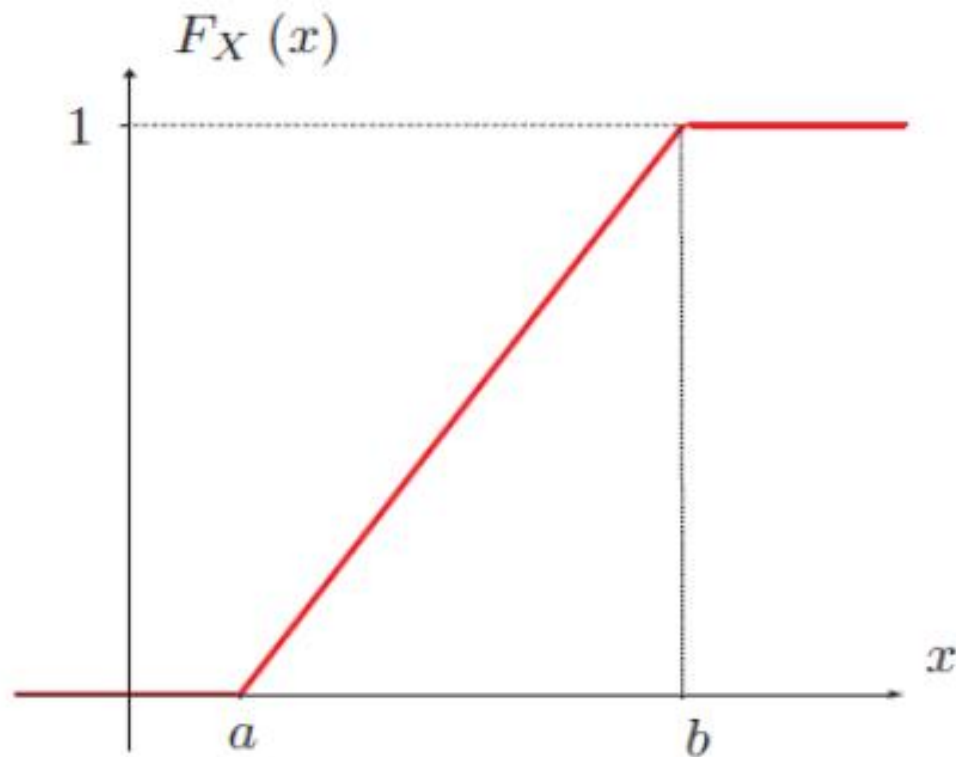
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a,b), \\ 0, & x \notin (a,b); \end{cases}$$



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{U}(a,b)$.

Grafik funkcije raspodele za $\mathcal{U}(a,b)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & a < x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{U}(a, b)$.

Eksponeñcijalna raspodela $\mathcal{E}(a)$

- Eksponeñcijalna raspodela je neprekidni analogon geometrijske raspodele.
- Ovakvu raspodelu uglavnom imaju slučajne promenljive koje se odnose na proteklo vreme do realizacije nekog događaja.
- Skup vrednosti je interval $[0, \infty)$.
- U raspodeli figuriše realni parametar $a > 0$.
- Primeri: proteklo vreme do kvara nekog električnog uređaja, vreme do raspada radioaktivne čestice, vreme do sledećeg zemljotresa koji će se osetiti u NS, ...

Eksponeñcijalna raspodela $\mathcal{E}(a)$

- Funkcija gustine:

$$\varphi_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

- Funkcija raspodele:

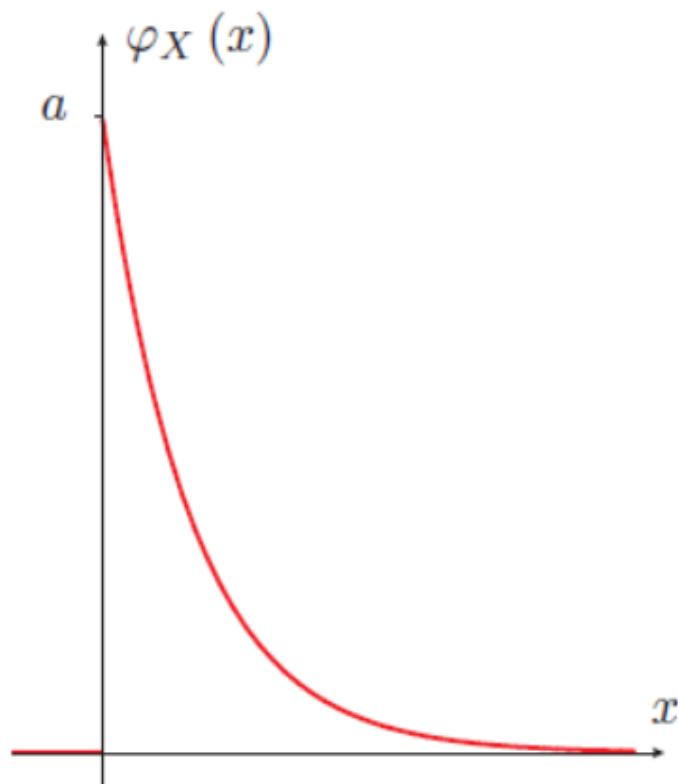
$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- Može se pokazati da za ovakvu funkciju gustine, matematičko očekivanje i disperzija kod eksponencijalne raspodele iznose:

$$E(X) = \frac{1}{a} \qquad D(X) = \frac{1}{a^2}$$

Grafik gustine za $\mathcal{E}(a)$

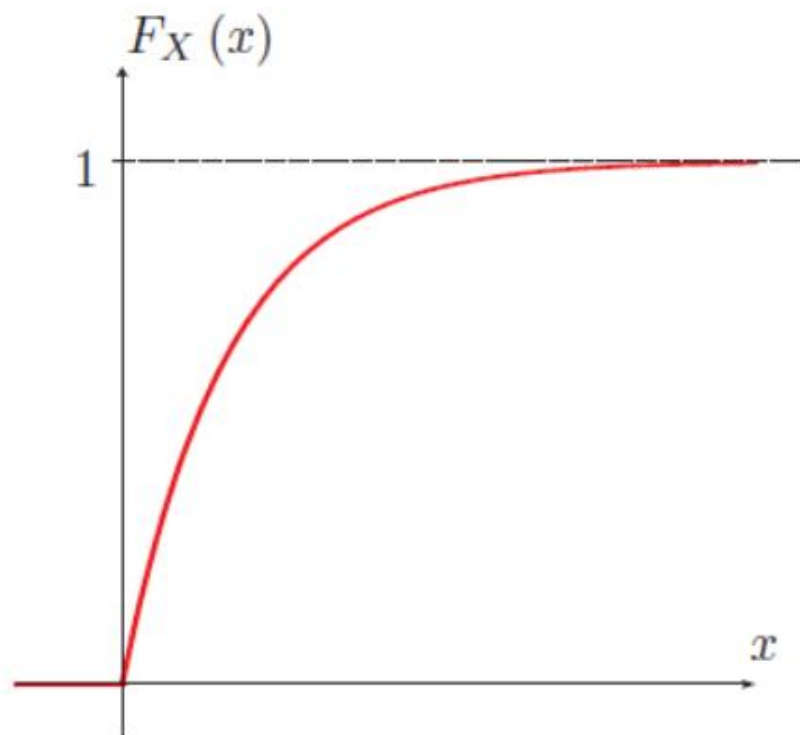
$$\varphi_X(x) = \begin{cases} ae^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{E}(a)$.

Grafik funkcije raspodele za $\mathcal{E}(a)$

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{E}(a)$.

Normalna (Gausova) raspodela $\mathcal{N}(m, \sigma)$

- Normalna raspodela je najznačajnija od svih raspodela „sa imenom“
- Ovakvu raspodelu imaju obeležja kod kojih su najzastupljenije prosečne (srednje) vrednosti, a verovatnoća postepeno opada kako se udaljavamo ka ekstremnim vrednostima.
- Skup vrednosti je interval $(-\infty, \infty)$.
- U raspodeli figurišu dva parametra: $m \in \mathbb{R}$ (srednja vrednost) i $\sigma > 0$ (odstupanje)
- Primeri: visina i težina populacije, koeficijent inteligencije, krvni pritisak, prosečna ocena studenata nekog fakulteta, masa industrijskih proizvoda, greška merenja,...

Normalna raspodela $\mathcal{N}(m, \sigma)$

- Funkcija gustine:

$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$

- Funkcija raspodele:

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$

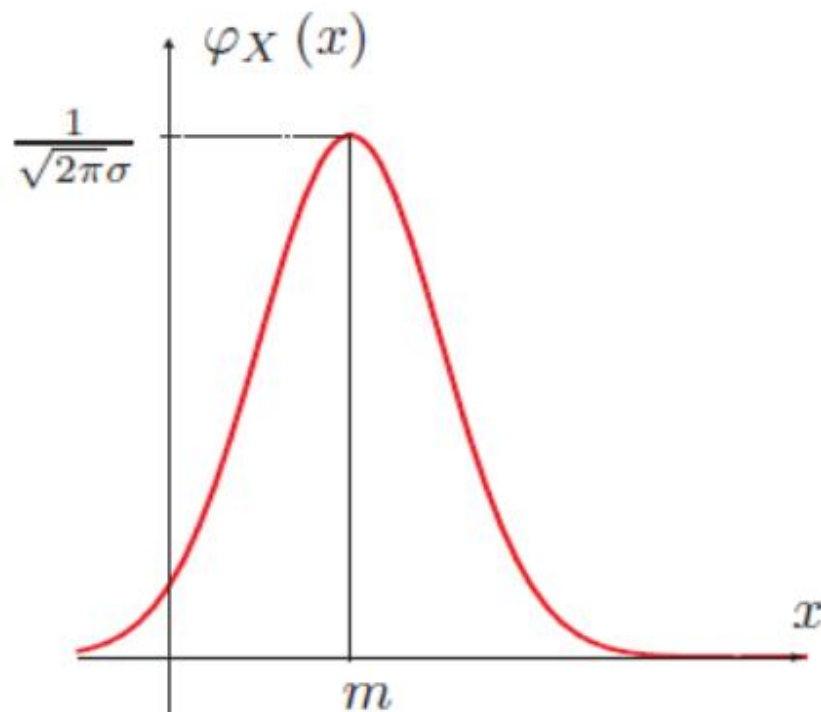
- Može se pokazati da za ovakvu funkciju gustine, matematičko očekivanje i disperzija kod normalne raspodele iznose:

$$E(X) = m$$

$$D(X) = \sigma^2$$

Grafik gustine za $\mathcal{N}(m, \sigma)$

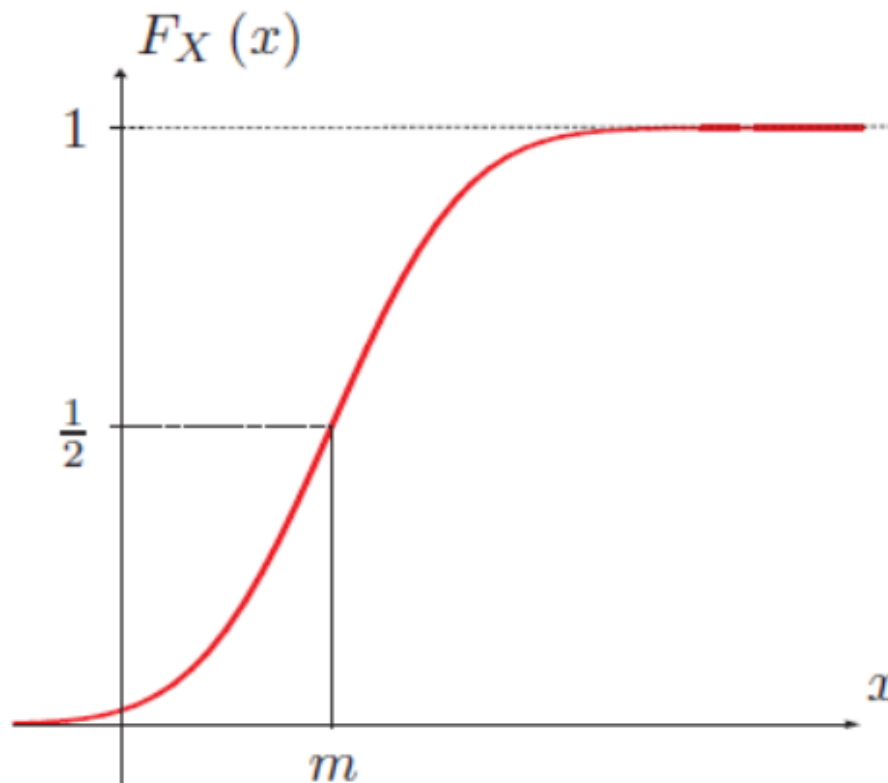
$$\varphi_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$$



Gustina slučajne promenljive $X : \mathcal{N}(m, \sigma)$.

Grafik funkcije raspodele za $\mathcal{N}(m, \sigma)$

$$F_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt.$$



Funkcija raspodele sluč. prom. $X : \mathcal{N}(m, \sigma)$.

Normalna (Gausova) raspodela $\mathcal{N}(m, \sigma)$

- Značajnost normalne raspodele se ogleda u tome što:
 1. Mnoga obeležja imaju ovu raspodelu
 2. Raspodele nekih obeležja konvergiraju ka normalnoj pod određenim uslovima
- Izračunavanje se razlikuje od ostalih raspodela, jer je funkcija raspodele „nezgodan“ integral

Napomena: Carl Friedrich Gaus (1777-1855) je nemački matematičar poznat i kao *Princ matematičara*. Smatra se najboljim matematičarem svih vremena (maths GOAT)



Određivanje verovatnoća kod $\mathcal{N}(m, \sigma)$

- Verovatnoće kod normalne raspodele se određuju pomoću **tablice Gausove raspodele**, koja sadrži izračunate vrednosti funkcije raspodele
- Tablica se odnosi samo na **standardizovanu normalnu raspodelu $\mathcal{N}(0, 1)$**
- Ostale normalne raspodele $\mathcal{N}(m, \sigma)$ se standardizacijom transformišu u $\mathcal{N}(0, 1)$
- Slučajna promenljiva sa $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom se obično zove Z , a njena **funkcija raspodele** se označava **$\Phi(z)$** .

$$Z: \mathcal{N}(0, 1) \quad \Phi(z) = P(Z < z)$$

Tablica Gausove $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodele

Deo tablice:

Gausova normalna raspodela $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7703	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8079	.8106	.8133
.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015

Primer: $\Phi(0.62) = 0.7324$, $\Phi(1.18) = 0.8810$

Tablica Gausove $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodele

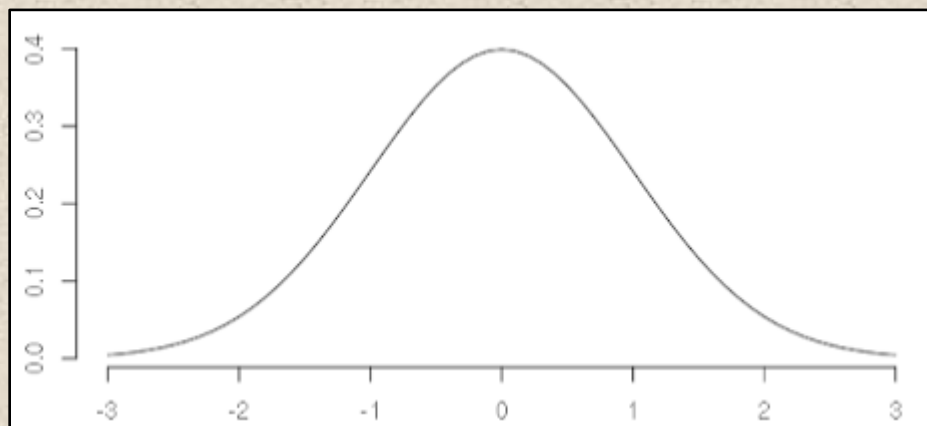
- Iz tablice se mogu pročitati vrednosti $\Phi(z)$ za z od 0 do 3.49
- Vrednosti $\Phi(z)$ za ostale $z \in \mathbb{R}$ određujemo na osnovu ovih pravila:

$$1. \quad z > 3.49 \Rightarrow \Phi(z) \approx 1$$

$$2. \quad z < 0.00 \Rightarrow \Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$$

- posledica pravila 1. i 2. : $z < -3.49 \Rightarrow \Phi(z) \approx 0$

- **Gausova kriva**
(„bell curve“)
objašnjava pravila



$\mathcal{N}(0, 1)$ raspodela

Primer: Slučajna promenljiva Z ima $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelu. Izračunati verovatnoće $P(Z < 1.78)$, $P(Z > -0.5)$, $P(|Z| < 1)$, $P(Z = 3)$ i $P(2Z - 5 > 4)$.

- $P(Z < 1.78) = \Phi(1.78) = 0.9625$
- $P(Z > -0.5) = 1 - \Phi(-0.5) = 1 - (1 - \Phi(0.5)) = \Phi(0.5) = 0.6915$
- $P(|Z| < 1) = P(-1 < Z < 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1))$
 $= 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0.8413 - 1 = 0.6826$
- $P(Z = 3) = 0$
- $P(2Z - 5 > 4) = P(2Z > 9) = P(Z > 4.5) = 1 - \Phi(4.5) \approx 1 - 1 \approx 0$

Standardizacija $\mathcal{N}(m, \sigma)$ raspodele

- Videli smo kako iz tablice Gausove raspodele čitamo verovatnoće sl. pr. Z sa standardizovanom $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodelom
- Šta je sa ostalim izborima parametara m i σ , tj. sa opštim oblikom normalne raspodele $\mathcal{N}(m, \sigma)$?
- Ne postoje tablice za svaku $\mathcal{N}(m, \sigma)$ raspodelu, umesto toga sl. promenljive standardizujemo tj. transformišemo tako da možemo koristiti tablice $\mathcal{N}(0, 1)$ raspodele.

standardizacija

$$X: \mathcal{N}(m, \sigma) \Rightarrow X^* = \frac{X - m}{\sigma} : \mathcal{N}(0, 1)$$

$\mathcal{N}(m, \sigma)$ raspodela

Primer: Za određenu populaciju je utvrđeno da visina ima normalnu raspodelu sa srednjom vrednošću $m=176\text{cm}$ i odstupanjem $\sigma=6.5\text{cm}$. Izračunati verovatnoću da slučajno odabrana osoba iz te populacije a) bude viša od 190 cm; b) bude visoka između 170 i 180 cm.

- Neka je X visina slučajno odabrane osobe. $X:\mathcal{N}(176, 6.5)$

- Standardizujemo X i dobijamo $X^* = \frac{X-176}{6.5} : \mathcal{N}(0, 1)$

a)
$$P(X > 190) = P\left(\frac{X-176}{6.5} > \frac{190-176}{6.5}\right) = P(X^* > 2.15) = 1 - \Phi(2.15) = 1 - 0.9842 = 0.0158$$

b)
$$P(170 < X < 180) = P\left(\frac{170-176}{6.5} < \frac{X-176}{6.5} < \frac{180-176}{6.5}\right) = P(-0.92 < X^* < 0.61) = \Phi(0.61) - (1 - \Phi(0.92)) = 0.55$$

Centralne granične teoreme

- O značaju normalne raspodele govori sledeće tvrđenje
- Posmatrajmo niz nezavisnih slučajnih promenljivih X_i , $i=1,2,\dots$ koje imaju istu (proizvoljnu) raspodelu
- Neka je $E(X_i)=m$ i $D(X_i)=\sigma^2$ za $i=1,2,\dots$
- Iako pojedinačne X_i mogu imati proizvoljne raspodele, njihov zbir $\sum_{i=1}^n X_i$ se ponaša u skladu sa normalnom raspodelom za dovoljno veliko n .

$$\mathbf{P}\left(\frac{\sum X_i - nm}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \Phi(x), \text{ kada } n \rightarrow \infty$$

Centralna granična teorema

- U praksi, ova teorema se primenjuje kada je $n \geq 30$.

Moavr-Laplasova teorema

- Specijalni slučaj CGT je Moavr-Laplasova teorema
- Ona govori o vezi između binomne raspodele (koja je u stvari zbir n Bernulijevih) i normalne raspodele.
- Neka X ima $\mathcal{B}(n, p)$ raspodelu, i neka je $q=1-p$.

$$\mathbf{P}\left(\frac{X-np}{\sqrt{npq}} < x\right) \rightarrow \Phi(x), \text{ kada } n \rightarrow \infty$$

Moavr-Laplasova teorema

- ML teorema omogućava aproksimaciju binomne raspodele pomoću standardizovane normalne raspodele (za veliko n)
- Neformalno:

$$X: \mathcal{B}(n, p) \Rightarrow X^* = \frac{X-np}{\sqrt{npq}} : \mathcal{N}(0, 1)$$

ML teorema - primer

- **Primer:** U nekoj seriji od 5000 proizvoda, verovatnoća da je neki proizvod neispravan je 0.08. Pomoću ML teoreme izračunati verovatnoću da među njima bude manje od 350 neispravnih.
- Neka je X broj neispravnih proizvoda. $X: \mathcal{B}(5000, 0.08)$
- ML teorema: $X^* = \frac{X - 5000 * 0.08}{\sqrt{5000 * 0.08 * 0.92}} = \frac{X - 400}{19.18} : \mathcal{N}(0, 1)$

$$P(X < 350) = P\left(\frac{X - 400}{19.18} < \frac{350 - 400}{19.18}\right) = P(X^* < -2.61) \\ \approx \Phi(-2.61) = 1 - \Phi(2.61) = 1 - 0.9955 = 0.0045$$

- Verovatnoća da u datoj seriji bude manje od 350 neispravnih proizvoda je približno 0.45%.