

TRANSFORMACIJE SLUČAJNIH PROMENLJIVIH I NUMERIČKE KARAKTERISTIKE

Primeri transformacije

- Videli smo već da slučajne promenljive mogu da se **transformišu**, stvarajući na taj način nove slučajne promenljive.
- **Primer 1:** standardizacija slučajne promenljive X sa normalnom raspodelom $\mathcal{N}(m, \sigma)$ je transformacija $\frac{X-m}{\sigma}$ kojom nastaje nova sl. promenljiva X^* sa standardizovanom $\mathcal{N}(0,1)$ raspodelom.
- **Primer 2:** zbir n sl. promenljivih X_i je transformacija kojom nastaje nova sl. promenljiva $\sum_{i=1}^n X_i$ za koju pod određenim uslovima važi centralna granična teorema

Transformacija slučajne promenljive

Uvedimo sada formalno pojam transformacije:

- Neka je X slučajna promenljiva, i g funkcija koja preslikava $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ (uopšteno: $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$)
- Slučajna promenljiva

$$Y = g(X)$$

je transformacija slučajne promenljive X .

- Specijalno, transformacija $Y = aX + b$, za $a, b \in \mathbb{R}$ je **linearna transformacija**.
- Kod diskretnih sl. pr. transformišemo zakon raspodele; kod neprekidnih sl. pr. funkciju raspodele

Primer

Diskretna slučajna promenljiva X je data zakonom raspodele:

$$X: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$$

Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive $Y=X^2+3$

- Zakon raspodele transformisane slučajne promenljive formiramo tako što transformišemo vrednosti, i potom novim vrednostima pridružujemo verovatnoće.
- Vrednosti za Y : $(-1)^2+3=4$, $0^2+3=3$, $1^2+3=4$, $2^2+3=7$
- Zakon raspodele za Y : $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$

$$P(Y=3)=P(X=0)$$

$$P(Y=4)=P(X=1)+P(X=-1)$$

$$P(Y=7)=P(X=2)$$

Primer

Neprekidna slučajna promenljiva X je data funkcijom raspodele:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x \varphi_X(t) dt = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{4} x^2, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Odrediti raspodelu slučajne promenljive $Y=2X+1$

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y < y) = P(2X + 1 < y) = P(X < \frac{y-1}{2}) = \\ &= \begin{cases} 0, & \frac{y-1}{2} \leq 0 \\ \frac{1}{4} \left(\frac{y-1}{2}\right)^2, & 0 < \frac{y-1}{2} \leq 2 \\ 1, & \frac{y-1}{2} > 2 \end{cases} = \begin{cases} 0, & y \leq 1, \\ \frac{(y-1)^2}{16}, & 1 < y \leq 5, \\ 1, & y > 5. \end{cases} \end{aligned}$$

Brojne karakteristike sl. pr.

- Videli smo da zakon raspodele (kod diskretnih), tj. gustina i funkcija raspodele (kod neprekidnih) sadrže potpunu informaciju o slučajnoj promenljivoj koju predstavljaju
- Nekada je, posebno u praksi, dovoljno imati delimičnu informaciju o karakteristikama raspodele, posebno o **srednjoj vrednosti** (centru) i **rasipanju** oko centra.
- Na ove pokazatelje raspodele ukazuju numeričke karakteristike slučajne promenljive:
 1. **Matematičko očekivanje $E(X)$**
 2. **Disperzija $D(X)$**

Matematičko očekivanje $E(X)$

- Matematičko očekivanje $E(X)$ slučajne promenljive X predstavlja srednju, očekivanu, prosečnu vrednost, tj. centar rasipanja slučajne promenljive

- Kod diskretnih slučajnih promenljivih:

$$E(X) = \sum_i x_i p(x_i)$$

- Kod neprekidnih slučajnih promenljivih:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

- Videli smo da, kod diskretnih sl. pr., $E(X)$ ne mora da bude moguća vrednost (npr. za $X: \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ $E(X)=0.5$)

Osobine matematičkog očekivanja

- Iz definicije matematičkog očekivanja se lako može dokazati da $E(X)$ zadovoljava sledeće osobine:

1. $E(c) = c$, gde je c konstanta
2. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$
3. $E(cX) = cE(X)$
4. $E(XY) = E(X)E(Y)$, ako su X i Y nezavisne sl. pr.

- Uz pomoć ovih osobina, moguće je direktno izračunati matematičko očekivanje kod linearne transformacije sl. pr.

Primer

Primer: Slučajna promenljiva X ima $\mathcal{B}(24,0.3)$ raspodelu a slučajna promenljiva Y ima $\mathcal{U}(20,80)$ raspodelu.

Izračunati a) $E(X)$, b) $E(10X-16)$, c) $E(Y)$ i d) $E((100-Y)/2)$.

a) Kod binomne raspodele $E(X) = np = 24 \cdot 0.3 = 7.2$

b) Prema osobinama matematičkog očekivanja

$$\begin{aligned} E(10X-16) &= E(10X) - E(16) = 10E(X) - 16 \\ &= 10 \cdot 7.2 - 16 = 56 \end{aligned}$$

c) Kod uniformne raspodele $E(Y) = \frac{a+b}{2} = \frac{20+80}{2} = 50$

d) $E((100-Y)/2) = \frac{1}{2} E(100-Y) = \frac{1}{2}(100 - E(Y)) = 25$

Matematičko očekivanje kod transformacije

- Neka je data sl. pr. X čije je matematičko očekivanje $E(X)$, i neka je **$Y=g(X)$ transformacija** sl. tr. X . Tada je

- Kod diskretnih slučajnih promenljivih:

$$E(Y) = \sum_i g(x_i)p(x_i)$$

- Kod neprekidnih slučajnih promenljivih:

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx$$

- Specijalno, kada je $Y=X^n$ vrednosti $E(X^n)$ se zovu **momenti n-tog reda** slučajne promenljive X .

Disperzija $D(X)$

- Disperzija $D(X)$ slučajne promenljive X predstavlja meru odstupanja vrednosti slučajne promenljive od srednje vrednosti.

- Definicija disperzije:

$$D(X) = E((X - E(X))^2)$$

- Ekvivalentan izraz za izračunavanje:

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

- $E(X^2)$ predstavlja moment drugog reda sl. pr. X
- Numerička karakteristika $\sqrt{D(X)}$ se zove **standardno odstupanje** slučajne promenljive X .

Osobine disperzije

- Iz definicije disperzije se može dokazati da $D(X)$ zadovoljava sledeće osobine:

1. $D(c) = 0$, gde je c konstanta
2. $D(X) \geq 0$
3. $D(cX) = c^2 D(X)$
4. $D(X+Y) = D(X) + D(Y)$, ako su X i Y nezavisne sl. pr.
5. $D(X+c) = D(X)$

- Uz pomoć ovih osobina, moguće je direktno izračunati disperziju kod linearne transformacije sl. pr.

Primer

Primer: Slučajna promenljiva X ima $\mathcal{B}(24,0.3)$ raspodelu a slučajna promenljiva Y ima $\mathcal{U}(20,80)$ raspodelu.

Izračunati a) $D(X)$, b) $D(10X-16)$, c) $D(Y)$ i d) $D((100-Y)/2)$.

a) Kod binomne raspodele $D(X) = npq = 24 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 5.04$

b) Prema osobinama disperzije

$$D(10X-16) = D(10X) = 100D(X) = 504$$

c) Kod uniformne raspodele $D(Y) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{3600}{12} = 300$

d) $D((100-Y)/2) = \frac{1}{4} D(100-Y) = \frac{1}{4} (-1)^2 D(Y) = 75$