Mehatronika
Matematika 3
`TEORIJA - drugi deo`

`Ime i prezime:` ______________________________
`Broj indeksa:` ______________________________

Novi Sad, 15. 04. 2018

1. **Izračunati, po definiciji $\mathcal{L}\{e^{8t}\}$.**

   Za $Re(s) > 8$, dobijamo

   $\mathcal{L}\{e^{8t}\} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-st}e^{8t}dt = \lim\limits_{T\to\infty}\int\limits_0^{T} e^{-(s-8)t}dt = -\frac{1}{s-8}\lim\limits_{T\to\infty} e^{-(s-8)t}\Big|_{t=0}^{t=T} dt = -\frac{1}{s-8}\lim\limits_{T\to\infty}(e^{-(s-8)T} - 1) = \frac{1}{s-8}.$

   (Treba primetiti da je $\lim\limits_{T\to\infty} e^{-(s-8)T} = 0$ za $Re(s) > 8$, inače funkcija divergira u $+\infty$.)

2. **Odrediti inverznu Laplasovu transformaciju funkcije** $F(s) = \frac{s}{(s+2)(s+i)(s-2i)}$.

   Neka je
   $$\frac{s}{(s+2)(s+i)(s-2i)} = \frac{a}{s+2} + \frac{b}{s+i} + \frac{c}{s-2i}.$$
   Množenjem prethodne jednakosti sa $s+2$ dobijamo
   $$\frac{s}{(s+i)(s-2i)} = a + \frac{b(s+2)}{s+i} + \frac{c(s+2)}{s-2i}.$$
   Ako sada pustimo da $s \to -2$, onda je
   $$\lim_{s\to-2}\frac{s}{(s+i)(s-2i)} = a + \lim_{s\to-2}\frac{b(s+2)}{s+i} + \lim_{s\to-2}\frac{c(s+2)}{s-2i}.$$
   što je ekvivalentno sa
   $$\lim_{s\to-2}\frac{s}{(s+i)(s-2i)} = a.$$

   Ponavljajući sličan postupak još dva puta (množenjem sa $(s+i)$ i $s\to -i$, a zatim množenjem sa $(s-2i)$ i $s \to 2i$), dobijamo

   $$\begin{aligned} a &= \lim_{s\to-2}\frac{s}{(s+i)(s-2i)} = \frac{-2}{(-2+i)(2-2i)} = \frac{1}{1-3i} \\ b &= \lim_{s\to-i}\frac{s}{(s+2)(s-2i)} = \frac{-i}{(-i+2)(-3i)} = \frac{1}{6-3i} \\ c &= \lim_{s\to2i}\frac{s}{(s+2)(s+i)} = \frac{2i}{(2i+2)(3i)} = \frac{1}{3+3i}. \end{aligned}$$

   Sada je

   $$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s+i)(s-2i)}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left(\{\frac{a}{s+2} + \frac{b}{s+i} + \frac{c}{s-2i}\right\} \\ &= a\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} + b\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+i}\right\} + c\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2i}\right\} \\ &= \frac{1}{1-3i}e^{-2t} + \frac{1}{6-3i}e^{-it} + \frac{1}{3+3i}e^{2ti}. \end{aligned}$$

3. **Rešiti početni problem** $y'(x) + y(x) = 1$, $y(0) = 2$.

   <u>Prvi način</u>:
   Ako datu jednačinu posmatramo kao linearnu diferencijalnu jednačinu, onda uvodimo smenu
   $$y(x) = u(x)v(x), \quad y'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$
   Tako dobijamo

   $u'v + uv' + uv = 1$
   $u'v + u(v' + v) = 1$

$v' + v = 0$	$u'v = 1$
$\frac{dv}{dx} = -v$	$u'e^{-x} = 1$
$\frac{dv}{v} = -dx$	$u' = e^x$
$\ln\lvert v\rvert = -x$	$u = e^x + C$
$v = e^{-x}$	

   Znači, $y(x) = u(x)v(x) = e^{-x}(e^x + C) = 1 + Ce^{-x}$.
   Zamenom početnog uslova, $2 = 1 + Ce^0 \Leftrightarrow C = 1$ i rešenje početnog problema je $y(x) = 1 + e^{-x}$.

Drugi način:

Ako primetimo da data jednačina razdvaja promenljive, onda je rešavamo na sledeći način (uzimajući u obzir da je $y \neq 1$):

$$\begin{aligned} y' = 1 - y \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{1-y} = dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{1-y} = \int dx \Leftrightarrow -\ln|1-y| = x + C_1 \Leftrightarrow \ln|1-y| = -x - C_1 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - y = \pm e^{-x-C_1} \Leftrightarrow 1 - y = -Ce^{-x} \Leftrightarrow y = 1 + Ce^{-x} \end{aligned}$$

Početni uslov se zamenjuje na isti način kao u prethodnom slučaju.

(Primetimo da je $\{\pm e^{-C_1} : C_1 \in \mathbb{R}\} = \{\pm C_1' : C_1' \in \mathbb{R}_0^+\} = \{C'' : C'' \in \mathbb{R}\} = \{-C : C \in \mathbb{R}\}$, zbog čega umesto $\pm e^{-C_1}$ pišemo $-C$.)

4. **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y^{(5)}(x) - 2y^{(3)}(x) + y'(x) = 0$.

Karakteristična jednačina (dobijena smenom $y = e^{kx}$) je oblika:

$$\begin{aligned} k^5 - 2k^3 + k = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad k(k^4 - 2k^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow k(k^2-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k(k-1)^2(k+1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad k_1 = 0, k_{2,3} = 1, k_{4,5} = -1 \end{aligned}$$

Odatle je

$$y(x) = C_1 + C_2e^x + C_3xe^x + C_4e^{-x} + C_5xe^{-x}.$$

5. **Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine** $y''(x) + 4y(x) = 5$, **metodom varijacije konstanti.**

Odgovarajuća homogena diferencijalna jednačina: $y''(x) + 4y(x) = 0$.
Karakteristična jednačina: $k^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 2i, k_2 = -2i$.
Rešenje odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine: $y_h(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$
Rešenje polazne diferencijalne jednačine je oblika $y(x) = C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x$ gde su funkcije $C_1(x)$ i $C_2(x)$ rešenja sistema diferencijalnih jednačina

$$\begin{array}{rcrcl} C_1'(x)\cos 2x & + & C_2'(x)\sin 2x & = & 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x & + & 2C_2'(x)\cos 2x & = & 5 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcll} C_1'(x)\cos 2x & + & C_2'(x)\sin 2x & = & 0 & /\cdot 2\sin 2x \\ -2C_1'(x)\sin 2x & + & 2C_2'(x)\cos 2x & = & 5 & /\cdot \cos 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} 2C_1'(x)\sin 2x\cos 2x & + & 2C_2'(x)\sin^2 2x & = & 0 \\ -2C_1'(x)\sin 2x\cos 2x & + & 2C_2'(x)\cos^2 2x & = & 5\cos 2x \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rcrcl} C_1'(x)\cos 2x & + & C_2'(x)\sin 2x & = & 0 \\ & & C_2'(x) & = & \frac{5}{2}\cos 2x \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} C_1'(x)\cos 2x & + & C_2'(x)\sin 2x & = & 0 \Rightarrow C_1'(x)\cos 2x + \frac{5}{2}\cos 2x \sin 2x = 0 \Rightarrow C_1(x) = -\frac{5}{2}\int \sin 2x dx = \frac{5}{4}\cos 2x + C_1 \\ & & C_2(x) & = & \frac{5}{2}\int \cos 2x dx = \frac{5}{4}\sin 2x + C_2 \end{array}$$

Znači,

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1(x)\cos 2x + C_2(x)\sin 2x = (-\tfrac{1}{2}\cos 2x + C_1)\cos 2x + (\tfrac{5}{4}\sin 2x + C_2)\sin 2x \\ &= C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \tfrac{5}{4}\cos^2 2x + \tfrac{5}{4}\sin^2 2x = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \tfrac{5}{4} \end{aligned}$$