VEŽBE IZ MATEMATIKE

Novi Sad,

2020.

Vežbe

-Arhitektura-

Slobodni vektori

Slobodni vektor je skup svih orijentisanih duži koje su međusobno paralelne, podudarne i isto orijentisane. Slobodne vektore obeležavamo sa $\overrightarrow{AB}$ ili $\overrightarrow{a}$.

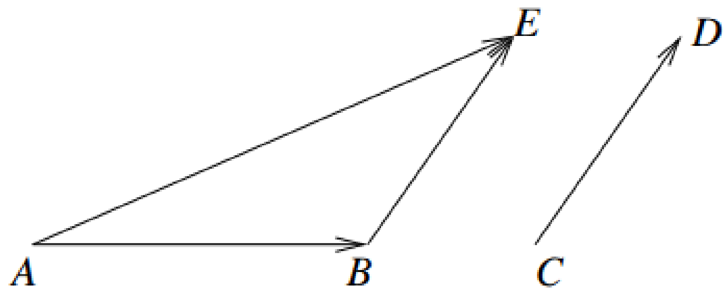
- Intenzitet vektora $\overrightarrow{AB}$ je merni broj duži AB i označava se sa $|\overrightarrow{AB}|$.
- Pravac vektora $\overrightarrow{AB}$ je pravac određen tačkama A i B.
- Smer vektora $\overrightarrow{AB}$, $(A \neq B)$ je od tačke A do tačke B.
- Vektor čiji je intenzitet jednak 1 naziva se jedinični vektor.
- Vektori su jednaki ako su im jednaki pravac, smer i intenzitet.
- Vektor kod kojeg je A = B zvaćemo nula vektor i označavati sa $\overrightarrow{0}$ ili 0.

  Intenzitet nula vektora je 0, a pravac i smer se ne definišu.
- Vektor koji ima isti pravac i intenzitet kao vektor $\overrightarrow{AB}$, a suprotan smer, je vektor $\overrightarrow{BA}$ i naziva se suprotan vektor vektora $\overrightarrow{AB}$.

U skupu V definišemo operaciju sabiranja vektora + na sledeći način:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE},$$

gde je $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$.



Slika 1: sabiranje vektora

• Ugao ϕ između vektora $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ je ugao $\angle AOB$ pri čemu se dogovorno uzima da je $0 \leq \phi \leq \pi$.

• Proizvod vektora $\overrightarrow{a} \neq \overrightarrow{0}$ i skalara $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ je vektor $\lambda \cdot \overrightarrow{a}$ koji ima

a) isti pravac kao i vektor $\overrightarrow{a}$,

b) intenzitet $|\lambda| \cdot |\overrightarrow{a}|$ i

c) isti smer kao i vektor $\overrightarrow{a}$ ako je $\lambda > 0$, a suprotan ako je $\lambda < 0$.

Ako je $\overrightarrow{a} = 0$ ili $\lambda = 0$, tada je $\lambda \cdot \overrightarrow{a} = 0$.

• Dva vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ su kolinearna ako i samo ako imaju isti pravac. Nula vektor je kolinearan sa svakim vektorom.

• Nula vektor je normalan na svaki vektor.

• Za tri ne nula vektora kažemo da su komplanarni ako i samo ako su paralelni sa jednom ravni.

• Skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, u oznaci $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ definiše se sa

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$$

Osobine skalarnog proizvoda:

a) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$,

b) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$,

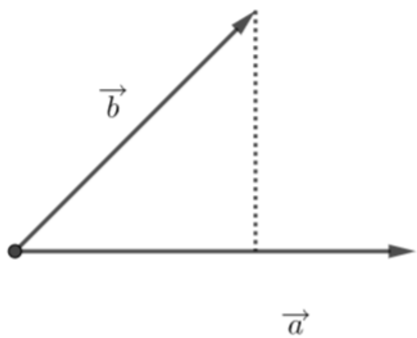
c) $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$, (uslov normalnosti, ortogonalnosti),

d) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \;\; \alpha(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = (\alpha \overrightarrow{a}) \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \cdot (\alpha \overrightarrow{b})$,

e) $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$.

f) Za proizvoljne vektore $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$
$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

• Neka je $\overrightarrow{a} \neq 0$. Tada je projekcija vektora $\overrightarrow{b}$ na vektor $\overrightarrow{a}$ definisana sa: $pr_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{b} = |b| \cdot \cos\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$.



• Vektorski proizvod vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ je vektor, u oznaci $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$, određen na sledeći način:

a) $|\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot |\sin\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})|$,

b) $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{a}$ i $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{b}$,

c) vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}$ čine desni sistem vektora.

Osobine vektorskog proizvoda:

a) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = -(\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{a})$,

b) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \alpha(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) = (\alpha \overrightarrow{a}) \times \overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \times (\alpha \overrightarrow{b})$,

c) $\overrightarrow{a} \| \overrightarrow{b} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = 0$ (uslov paralelnosti),

d) $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{a} = 0$,

e) Intenzitet vektorskog proizvoda dva nekolinearna vektora jednak je površini paralelograma koji je konstruisan nad tim vektorima.

f) Za proizvoljne vektore $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

• Mešoviti proizvod vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ je skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}$, tj. $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})$.

Osobine mešovitog proizvoda:

a) Vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ su komplanarni $\Leftrightarrow \overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = 0$ (uslov komplanarnosti),

b) Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda tri nekomplanarna vektora jednaka je zapremini paralelopipeda koji je konstruisan nad vektorima $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ kao ivicama.

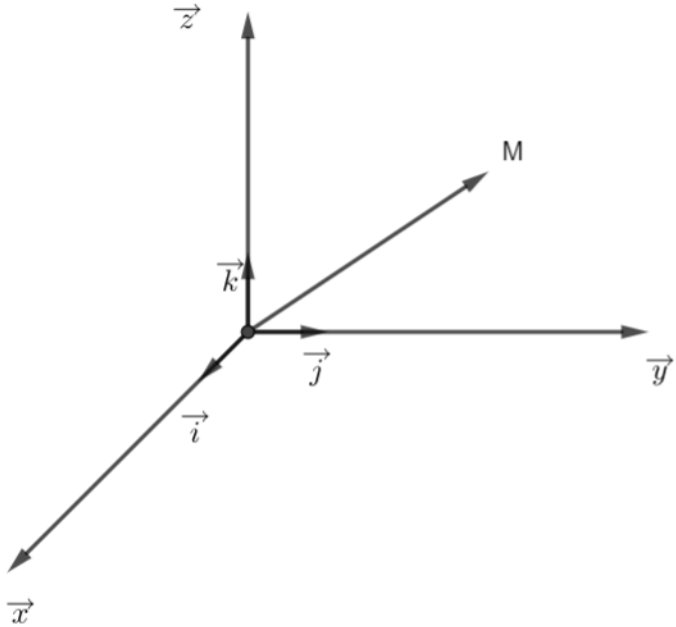
c) Za proizvoljne vektore $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$ i $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$

$$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

• Dekartov (pravougli) koordinatni sistem u prostoru je određen, ako su

- Date tri prave koje se obično nazivaju x, y i z i svake dve se seku pod pravim uglom u tački $0(0,0,0)$.
- Na svakoj od datih pravih izabran je jedan smer i nazvan pozitivan.
- Na pozitivnim smerovima pravih x, y i z izabrane su tačke $E_1(1,0,0)$, $E_2(0,1,0)$ i $E_3(0,0,1)$ redom.

Prava x se naziva x-osa ili apscisa. Prava y se naziva y-osa ili ordinata. Prava z se naziva z-osa ili aplikata. Tačka O se naziva koordinatni početak.
Uvedimo oznake $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{OE_1}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{OE_2}$ i $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{OE_3}$.
Vektori $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, sa koordinatnim početkom O, čine desni sistem vektora, što znači da rotacija vektora $\overrightarrow{i}$, ka vektoru $\overrightarrow{j}$, oko tačke O, u ravni određenoj vektorima $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$, ima najkraći put u smeru suprotnom kretanju kazaljke na satu, gledano sa krajnje tačke vektora $\overrightarrow{k}$. Svakoj tački $M(x,y,z)$ u prostoru odgovara vektor $\overrightarrow{OM}$ koji se zove vektor položaja tačke M i on ima oblik $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ U daljem tekstu vektor položaja tačke M označavaćemo sa $\overrightarrow{OM} = (x,y,z)$. Vektor $\overrightarrow{AB}$, određen tačkama $A(x_1,y_1,z_1)$ i $B(x_2,y_2,z_2)$ ima oblik $\overrightarrow{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$



• Za proizvoljne vektore $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3)$ i $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3)$ i skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ važi:

a) $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3,$

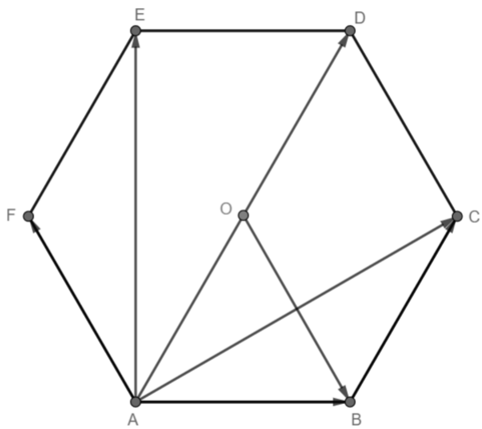
b) $\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3),$

c) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

d) $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Zadatak 0.1. U ravni je dat pravilan šestougao $ABCDEF$ sa centrom u O. Izraziti $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF}$ preko $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{BC}$.

Rešenje.



Kako je $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC}$, sledi da je

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} =$
$2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BO} = -\overrightarrow{OB}$.

Zadatak 0.2. Dati su vektori $\overrightarrow{a} = 8\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}$

Izračunati:

a) intenzitet vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

b) $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ i $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$

c) skalarni proizvod vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

d) vektorski proizvod vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

e) ugao između vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$

f) projekciju vektora $\overrightarrow{a}$ na vektor $\overrightarrow{b}$ i obrnuto.

Rešenje.

$\overrightarrow{a} = 8\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - 2\overrightarrow{k} = (8, 2, -2)$, $\overrightarrow{b} = 4\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j} = (4, -4, 0)$

a) $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{64 + 4 + 4} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$,

$|\overrightarrow{b}| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

b) $2\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} = 2(8, 2, -2) - (4, -4, 0) = (16, 4, -4) - (4, -4, 0) = (12, 8, -4) = 12\overrightarrow{i} + 8\overrightarrow{j} - 4\overrightarrow{k}$

$3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b} = 3(8, 2, -2) + 2(4, -4, 0) = (32, -2, -6)$
$= 32\overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} - 6\overrightarrow{k}$

c) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 8 \cdot 4 + 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 0 = 32 - 8 = 24$

d) $$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 8 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & 0 \end{vmatrix} = -8\overrightarrow{i} - 8\overrightarrow{j} - 40\overrightarrow{k} = (-8, -8, -40)$$

e) $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cos \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$

$$\Rightarrow \cos \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|} = \frac{24}{6\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{3}$$

f) $pr_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{a} = |a| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 6\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 3\sqrt{2}$

$pr_{\overrightarrow{a}} \overrightarrow{b} = |b| \cdot \cos \angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{2}$.

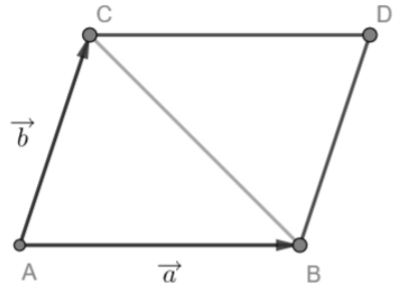
Zadatak 0.3. Naći vektor koji je normalan na vektore $\overrightarrow{a} = (4, -3, 1)$ i $\overrightarrow{b} = (5, -2, -3)$

Rešenje. $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{a}$ i $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \perp \overrightarrow{b}$,

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 4 & -3 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 11\overrightarrow{i} + 17\overrightarrow{j} + 7\overrightarrow{k} = (11, 17, 7)$$

Zadatak 0.4. Izračunati površinu trougla ABC ako je $A(1,2,5)$, $B(3,1,-1)$ i $C(0,1,0)$.

Rešenje.



$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P_p$$
$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3,1,-1) - (1,2,5) = (2,-1,-6)$$
$$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (0,1,0) - (1,2,5) = (-1,-1,-5)$$
$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} P_p = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 2 & -1 & -6 \\ -1 & -1 & -5 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} |(-1,16,3)| =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{1+256+9} = \frac{1}{2}\sqrt{266}$$

Zadatak 0.5. Odrediti površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\overrightarrow{a} = (3,1,5)$ i $\overrightarrow{b} = (1,2,-3)$

Rešenje. $P = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{matrix} \right\| = |(-13,14,5)|$

$= \sqrt{169+196+25} = \sqrt{390} = 10\sqrt{39}$

Zadatak 0.6. Odrediti α tako da $\overrightarrow{p} = \alpha\overrightarrow{a} + 17\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{q} = 3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$ budu uzajamno normalni ako je $|\overrightarrow{a}| = 2, |\overrightarrow{b}| = 5$ i $\angle(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$

Rešenje. Koristimo osobinu skalarnog proizvoda:

$\overrightarrow{p} \perp \overrightarrow{q} \Leftrightarrow \overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = 0$

$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = (\alpha\overrightarrow{a} + 17\overrightarrow{b})(3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}) = 3\alpha|\overrightarrow{a}|^2 - \alpha\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} + 51\overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a} - 17|\overrightarrow{b}|^2$

$$= 3\alpha \cdot 4 + (51 - \alpha)\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - 17 \cdot 25 = 12\alpha + (51 - \alpha) \cdot 2 \cdot 5\cos\frac{2\pi}{3} - 425$$

$$= 12\alpha + (51 - \alpha) \cdot 10 \cdot (-\frac{1}{2}) - 425 = 12\alpha + 5\alpha - 255 - 425$$

$= 17\alpha - 680$

$\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{q} = 0 \Leftrightarrow 17\alpha - 680 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 40$

Zadatak 0.7. Izračunati zapreminu paralelopipeda određenog vektorima $\overrightarrow{a} = (1, 2, 0)$, $\overrightarrow{b} = (2, 1, 3)$ i $\overrightarrow{c} = (0, 1, 1)$.

Rešenje. Koristimo osobinu mešovitog proizvoda: Apsolutna vrednost mešovitog proizvoda jednaka je zapremini paralelopipeda konstruisanog nad odgovarajućim vektorima.

$$V = |\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})| = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = |1 - 3 - 4| = |-6| = 6$$

Zadatak 0.8. Ispitati da li su vektori $\overrightarrow{a} = (-1, 3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (2, -3, 4)$ i $\overrightarrow{c} = (-3, 12, 6)$ komplanarni.

Rešenje. Koristimo osobinu mešovitog proizvoda:

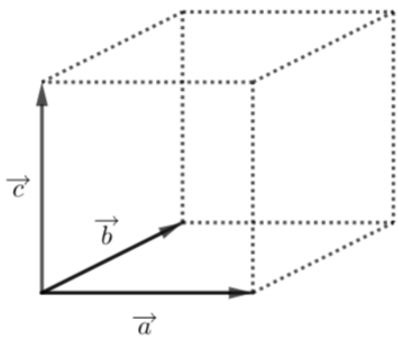
Vektori $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$ su komplanarni ako i samo ako $\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = 0$

$$\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \Rightarrow \text{Vektori } \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$$

nisu komplanarni.

Zadatak 0.9. Izračunati visinu prizme čije ivice su određene vektorima $\overrightarrow{a} = (3, 2, -5)$, $\overrightarrow{b} = (1, -1, 4)$ i $\overrightarrow{c} = (1, -3, 1)$ ako je osnovica određena sa $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Rešenje.



$$V = B \cdot H \Rightarrow H = \frac{V}{B}$$

$$V = |\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c})| = \left\| \begin{matrix} 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{matrix} \right\| = |-3+8+15-5+36-2| = 49$$

$$B = |\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}| = \left\| \begin{matrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 4 \end{matrix} \right\| = |(3, -17, 5)|$$

$$= \sqrt{9 + 289 + 25} = \sqrt{323}$$

$$H = \frac{49}{\sqrt{323}}$$

1. Zadaci za samostalni rad

Zadatak 1.1. Dati su vektori:

a) $a = (4, -3, 1)$ i $b = (5, -2, -3)$

b) $a = (3, -2, 1)$ i $b = (4, -7, -3)$

Naći vektorski proizvod vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$.

Zadatak 1.2. Odrediti mešoviti proizvod vektora $\overrightarrow{a} = (-1, 3, 2)$, $\overrightarrow{b} = (2, -3, 4)$ i $\overrightarrow{c} = (-3, 12, 6)$.

Zadatak 1.3. Ispitati da li su vektori $\overrightarrow{a} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{b} = (1, 0, -1)$ i $c = (0, 2, 4)$ komplanarni. Ako jesu izraziti vektor $\overrightarrow{a}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\overrightarrow{b}$ i $\overrightarrow{c}$.

Literatura

[1] T. Grbić, J. Pantović, S. Likavec, N. Sladoje, T. Lukić, Lj. Teofanov: Zbirka rešenih zadataka iz Matematike 1, FTN, Novi Sad, 2001.