# ANALITIČKA GEOMETRIJA

20. oktobar 2020

# Tačka

U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu položaj proizvoljne tačke $M(x, y, z)$ određen je vektorom $\overrightarrow{OM}$, gde je $O$ koordinatni početak.

Vektor $\overrightarrow{OM}$ je vektor položaja tačke $M$ (ili radijus vektor) i označava se sa $\vec{r}_M$, ili sa $\vec{r}$ ako je jasno o kojoj tački se radi.

Vektor $\vec{r}_M = \overrightarrow{OM}$ se na jedinstven način može razložiti na komponente preko vektora $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, tj.

$$\vec{r}_M = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$

# Tačka

Neka su $M_1$ i $M_2$ dve tačke Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema čiji su vektori položaja $\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$, redom.

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

## Definicija

*Dužina duži $M_1 M_2$, u oznaci $d(M_1, M_2)$, jednaka je intenzitetu vektora $\overrightarrow{M_1 M_2}$.*

## Teorema

*Dužina duži određene tačkama $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i $M_2(x_2, y_2, z_2)$ je*

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

**Jednačina ravni kroz tri tačke**

Teorema

*Jednačina ravni koja sadrži tačke* $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *i* $M_3(x_3, y_3, z_3)$ *je*

$$(\overrightarrow{M_1M} \times \overrightarrow{M_1M_2}) \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0,$$

*gde je* $M(x, y, z)$ *proizvoljna tačka ravni* $\alpha$.

**Dokaz:** vektori $\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3} = 0$ su komplanarni pa je njihov mešoviti proizvod jednak nuli.

Dakle, jednačina ravni kroz tri tačke $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ i $M_3(x_3, y_3, z_3)$ može napisati i u obliku

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Ako kofaktore elemenata prve vrste označimo redom sa

$$A = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

$$B = -\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},$$

$$C = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix},$$

razvijanjem po prvoj vrsti gornje determinante se jednačina ravni može zapisati kao

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

# Ravan

Koeficijenti $A, B, C$ predstavljaju koordinate vektorskog proizvoda

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_3} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}.$$

Vektor $\overrightarrow{n} = (A, B, C)$ je normalan na ravan u kojoj leže vektori $\overrightarrow{M_1 M_2}$ i $\overrightarrow{M_1 M_3}$, tj. na ravan čiju jednačinu posmatramo.
Naziva se *vektor normale ravni* i to može da bude bilo koji nenula vektor čiji je pravac normalan na posmatranu ravan.

**Teorema**

*Neka je $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ vektor normale ravni $\alpha$ i $M_0(x_0, y_0, z_0)$ tačka koja pripada ravni $\alpha$. Tada je*

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

*jednačina ravni $\alpha$, gde je $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$.*

## Primer

*Pokazati da tačka $T(-1,1,0)$ ne leži u ravni $\alpha$ određenoj tačkama $A(1,0,0)$, $B(1,2,1)$ i $C(0,0,1)$.*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= \overrightarrow{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \overrightarrow{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \overrightarrow{k}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (2,-1,2).
\end{aligned}$$

$\alpha : 2(x-1)-(y-0)+2(z-0)=0$, tj. $\alpha : 2x-y+2z-2=0$.

$2\cdot(-1)-1+2\cdot 0-2=-5\neq 0$, pa $T\notin\alpha$.

## Primer

*Neka je ravan* $\alpha$ *data u opštem obliku tj.*

$$\alpha : Ax + By + Cz + D = 0$$

*i* $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Ako $D = 0$ onda je jednačina ravni

$$\alpha : Ax + By + Cz = 0 \tag{1}$$

i tačka $O(0, 0, 0)$ zadovoljava navedenu jednakost tako da ravan prolazi kroz koordinatni početak.
Vektor normale $xy$-ravni je vektor $\vec{k} = (0, 0, 1)$ i ova ravan prolazi kroz koordinatni početak $O(0, 0, 0)$, pa se zamenom u (1) dobija da je jednačina $xy$-ravni

$$z = 0.$$

Slično, $xz$-ravan ima vektor normale $\vec{j} = (0, 1, 0)$ i prolazi kroz koordinatni početak $O(0, 0, 0)$, pa je njena jednačina

$$y = 0.$$

Ravan čiji vektor normale je vektor $\vec{i} = (1, 0, 0)$ i koja prolazi kroz koordinatni početak $O(0, 0, 0)$ je $yz$-ravan i njena jednačina je

$$x = 0.$$

Ravan oblika

$$By + Cz + D = 0$$

ima vektor normale $\vec{n} = (0, B, C)$. Iz $\vec{i} \cdot \vec{n} = 0$, sledi da je ova ravan paralelna sa $x$-osom.

Slično, ravan oblika
$$Ax + Cz + D = 0$$
je ravan paralelna sa $y$-osom, dok je ravan oblika
$$By + Cz + D = 0$$
paralelna sa $z$-osom.
Za $A = D = 0$ dobija se jednačina ravni
$$By + Cz = 0,$$
tj. ravan koja je paralelna sa $x$-osom i koja sadrži koordinatni početak $O(0, 0, 0)$. Dakle, ta ravan sadrži $x$-osu.
Jednačina ravni koja sadrži $y$-osu je
$$Ax + Cz = 0,$$
dok je jednačina ravni koja sadrži $z$-osu
$$Ax + By = 0.$$

Za $A = B = 0$ dobija se ravan

$$Cz + D = 0$$

čiji je vektor normale $\vec{n} = (0, 0, C)$ kolinearan vektoru $\vec{k} = (0, 0, 1)$, tako da je ova ravan paralelna sa $xy$-ravni. Slično, ravan paralelna sa $xz$-ravni je oblika

$$By + D = 0,$$

dok je ravan

$$Ax + D = 0$$

paralelna sa $yz$-ravni.

Za $A = B = D = 0$ dobija se jednačina ravni

$$Cz = 0,$$

tj. jednačina $z = 0$, tj. jednačina $xy$-ravni. Slično, za $A = C = D = 0$ dobija se jednačina ravni

$$By = 0,$$

tj. jednačina $xz$-ravni, a za $B = C = D = 0$ dobija se jednačina ravni

$$Ax = 0,$$

tj. jednačina $yz$-ravni. $\square$

# Međusobni položaj dve ravni

Neka su $\alpha_1$ i $\alpha_2$ dve ravni date u opštem obliku

$$\begin{aligned} \alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

i neka su $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ vektori normala ravni $\alpha_1$ i $\alpha_2$, redom.

Ako su vektori $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ kolinearni, tj. ako postoji skalar $\lambda$ takav da je

$$\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2 = (\lambda A_2, \lambda B_2, \lambda C_2)$$

jednačine ravni $\alpha_1$ i $\alpha_2$ date sa (2) mogu se napisati u obliku

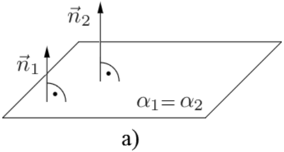
$$\begin{array}{lccccccccc} \alpha_1 : & \lambda A_2x & + & \lambda B_2y & + & \lambda C_2z & + & D_1 & = & 0 \\ \alpha_2 : & A_2x & + & B_2y & + & C_2z & + & D_2 & = & 0. \end{array} \tag{3}$$

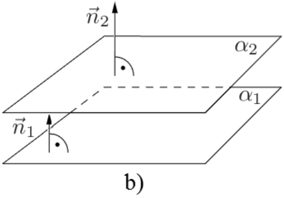
# Međusobni položaj dve ravni

Množenjem druge jednačine sistema (3) sa $-\lambda$ i dodavanjem prvoj jednačini sistema dobija se sistem jednačina

$$\begin{aligned} D_1 - \lambda D_2 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Ako je $D_1 = \lambda D_2$ (i $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$) sistem (4) je dvostruko neodređen. Ravni imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka, tj. *poklapaju se* (slika a)). Ako je $D_1 \neq \lambda D_2$ (i $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$) sistem (4) je nemoguć, tj. ravni nemaju zajedničkih tačaka, tj. *paralelne su* (slika b)).



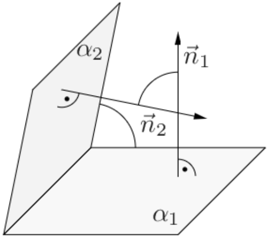



# Međusobni položaj dve ravni

Ako je $\vec{n}_1 \neq \lambda \vec{n}_2$ u sistemu (2) može da se eliminiše jedna nepoznata. Sistem je jednostruko neodređen i ima beskonačno mnogo rešenja, tj. ravni imaju beskonačno mnogo zajedničkih tačaka pri čemu postoje tačke ravni $\alpha_1$ koje ne pripadaju ravni $\alpha_2$ i postoje tačke ravni $\alpha_2$ koje ne pripadaju ravni $\alpha_1$. Dakle, *ravni $\alpha_1$ i $\alpha_2$ se seku po pravoj*.

*Ugao između dve ravni $\alpha_1$ i $\alpha_2$ koje se seku* jednak je uglu između njihovih vektora normala $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$. Na osnovu definicije skalarnog proizvoda vektora sledi

$$\cos \sphericalangle(\vec{n}_1 \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}.$$



# Jednačina prave

**Teorema**

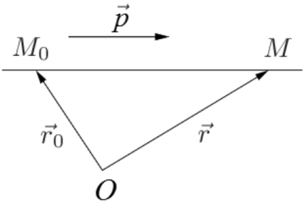
*Neka prava $p$ sadrži tačku $M_0$ i paralelna je vektoru $\vec{p}$. Tada postoji skalar $\lambda$ za koji proizvoljna tačka $M$ prave $p$ zadovoljava vektorsku jednačinu*

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{p}, \tag{5}$$

*gde je $\vec{r}$ vektor položaja tačke $M$ i $\vec{r_0}$ vektor položaja tačke $M_0$.*

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \vec{r_0} + \overrightarrow{M_0M}.$$

Vektori $\overrightarrow{M_0M}$ i $\vec{p}$ paralelni, te postoji skalar $\lambda$ takav da je $\overrightarrow{M_0M} = \lambda \vec{p}$. Dakle, $\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda \vec{p}$



# Jednačina prave

Jednačina (5) predstavlja *vektorski oblik jednačine prave p*.
Vektor $\vec{p}$ naziva se *vektor pravca prave p.*

Uvrštavanjem $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ u (5) dobija se

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(p_1, p_2, p_3),$$

tj.

$$(x, y, z) = (x_0 + \lambda p_1, y_0 + \lambda p_2, z_0 + \lambda p_3),$$

odakle se dobijaju tri skalarne jednačine

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda p_1 \\ y &= y_0 + \lambda p_2 \\ z &= z_0 + \lambda p_3. \end{aligned} \tag{6}$$

Jednačine (6) predstavljaju *parametarski oblik jednačine prave*.

Za $p_1 \neq 0$, $p_2 \neq 0$ i $p_3 \neq 0$ iz (6) sledi

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \lambda, \quad \frac{y - y_0}{p_2} = \lambda \quad \text{i} \quad \frac{z - z_0}{p_3} = \lambda.$$

Eliminisanjem parametra $\lambda$ dobija se

$$\frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}. \tag{7}$$

Jednačine (7) predstavljaju *kanonski oblik jednačine prave*.

**Napomena:** Ako je npr. $p_1 = 0$, tada razlomak $\dfrac{x - x_0}{0}$ predstavlja simbolički zapis za koji je $x - x_0 = 0$.

# Jednačina prave kroz dve tačke

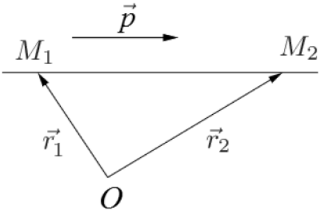
**Teorema**

*Neka su $\vec{r}_1$ i $\vec{r}_2$ vektori položaja tačaka $M_1$ i $M_2$, redom. Tada je*

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \tag{8}$$

*jednačina prave koja prolazi kroz tačke $M_1$ i $M_2$.*

Vektor pravca $\vec{p}$ tražene prave kolinearan je sa vektorom $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, tako da se može uzeti da je $\vec{p} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.




Uvrštavanjem vektora $\vec{p}$ i vektora položaja $\vec{r}_1$ tačke $M_1$ u (5) dobija se (8) - *vektorski oblik jednačine prave kroz dve tačke*.

# Jednačina prave kroz dve tačke

Za $\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$ je

$$\vec{r_2} - \vec{r_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

vektor pravca prave koja prolazi kroz tačke $M_1$ i $M_2$ čiji su vektori pravaca $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ redom, pa se uvrštavanjem u (7) dobija

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{9}$$

tj. *jednačina prave kroz dve tačke u kanonskom obliku*. Odavde se jednostavno dobija *jednačine prave kroz dve tačke u parametarskom obliku*

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \lambda(x_2 - x_1) \\ y &= y_1 + \lambda(y_2 - y_1) \\ z &= z_0 + \lambda(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

# Prava kao presek dve ravni

Neka su

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

i

$$\beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

ravni koje se ne poklapaju i koje nisu paralelne. Tada je $\vec{n}_1 \neq \lambda\vec{n}_2$, gde su $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ vektori normala ravni $\alpha$ i $\beta$ redom. Tada je sistem jednačina

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

jednostruko neodređen, a njegov skup rešenja geometrijski predstavlja skup vektora položaja svih tačaka prave preseka ravni $\alpha$ i $\beta$.

# Međusobni položaj pravih

Neka su prava $p$ određena tačkom $M_1(x_1, y_1, z_1)$ i vektorom pravca $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ i prava $q$ određena tačkom $M_2(x_2, y_2, z_2)$ i vektorom pravca $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ date jednačinama u kanonskom obliku

$$p : \frac{x - x_1}{p_1} = \frac{y - y_1}{p_2} = \frac{z - z_1}{p_3},$$

$$q : \frac{x - x_2}{q_1} = \frac{y - y_2}{q_2} = \frac{z - z_2}{q_3}.$$

Jednačine pravih $p$ i $q$ u vektorskom obliku su

$$p : \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda\vec{p} \quad \text{i} \quad q : \vec{r} = \vec{r}_2 + \theta\vec{q}.$$

Ako su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ kolinearni, prave $p$ i $q$ mogu da se poklapaju ili da su paralelne. Ako vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ nisu kolinearni, prave $p$ i $q$ mogu da se seku ili da su mimoilazne. U ovom slučaju je $\vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{0}$.

# Prave koje se poklapaju

Ako su vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ kolinearni, prave $p$ i $q$ se *poklapaju* ako vektor položaja $\vec{r}_2$ tačke $M_2$ koja pripada pravoj $q$ zadovoljava i jednačinu prave $p$, tj. postoji skalar $\lambda$ takav da je $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \lambda\vec{p}$, odakle je

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \lambda\vec{p},$$

tj. i vektori $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ i $\vec{p}$ su kolinearni. Dakle, prave $p$ i $q$ se poklapaju ako postoje skalari $\lambda_1$ i $\lambda_2$ takvi da je

$$\vec{q} = \lambda_1\vec{p} \quad \text{i} \quad \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \lambda_2\vec{p}.$$

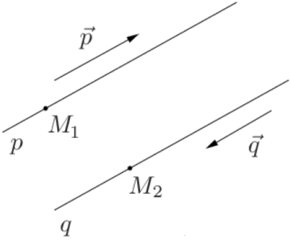
**Primer**

*Pokazati da se prave* $p : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{6}$ *i* $q : \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{12}$ *poklapaju.*

# Paralelne prave

Prave $p$ i $q$ su *paralelne* ako imaju kolinearne vektore pravaca $\vec{p}$ i $\vec{q}$ i vektor položaja $\vec{r}_2$ tačke $M_2$ koja pripada pravoj $q$ ne zadovoljava jednačinu prave $p$, tj. za svako $\lambda$ je $\vec{r}_2 \neq \vec{r}_1 + \lambda\vec{p}$, tj. $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 \neq \lambda\vec{p}$. Dakle, prave $p$ i $q$ su paralelne ako

$$\exists\lambda_1 \quad \vec{q} = \lambda_1\vec{p} \quad \text{i} \quad \forall\lambda_2 \quad \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \neq \lambda_2\vec{p}.$$




## Primer

Pokazati da su prave $p : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{6}$ i $q : \frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{-12}$ paralelne.

# Prave koje se seku

Ako za vektore $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\vec{r_2} - \vec{r_1}$, gde su $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ vektori polažaja tačke na pravoj $p$ i pravoj $q$ redom, a $\vec{p}$ i $\vec{q}$ su njihovi vektori pravaca važi

$$(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_1}) = 0 \quad \text{i} \quad \vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{0}$$

prave $p$ i $q$ leže u istoj ravni i *seku se*.

*Presečna tačka* pravih $p$ i $q$ određuje se rešavanjem sistema jednačina

$$p : \vec{r} = \vec{r_1} + \lambda \vec{p} \quad \text{i} \quad q : \vec{r} = \vec{r_2} + \theta \vec{q},$$

koji se svodi na

$$\vec{r_1} + \lambda \vec{p} = \vec{r_2} + \theta \vec{q}.$$

# Prave koje se seku

Za $\vec{r_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{r_2} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ i $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ dobija se

$$(x_1 + \lambda p_1, y_1 + \lambda p_2, z_1 + \lambda p_3) = (x_2 + \theta q_1, y_2 + \theta q_2, z_2 + \theta q_3),$$

tj. sistem jednačina

$$x_1 + \lambda p_1 = x_2 + \theta q_1 \quad \wedge \quad y_1 + \lambda p_2 = y_2 + \theta q_2 \quad \wedge \quad z_1 + \lambda p_3 = z_2 + \theta q_3$$

koji ima jedinstveno rešenje po $\lambda$ i $\theta$.

Uvrštavanjem dobijene vrednosti parametra $\lambda$ u jednačinu prave $p$ dobija se tačka preseka pravih $p$ i $q$.

# Ugao između dva prave koje se seku

Svake dve prave koje se seku obrazuju dva ugla, jedan je manji ili jednak od pravog ugla, dok je drugi veći ili jednak sa njim. Uvek se uzima da je ugao između dve prave koje se seku iz intervala $(0, \frac{\pi}{2}]$. *Ugao između pravih p i q koje se seku*, u oznaci $\sphericalangle(p, q)$, jednak je uglu između vektora koji su kolinearni njihovim vektorima pravaca $\vec{p}$ i $\vec{q}$ za koji je kosinus nenegativan. Za ugao $\sphericalangle(p, q) \in (0, \frac{\pi}{2}]$, ugao između pravih $p$ i $q$ koje se seku, na osnovu definicije skalarnog proizvoda vektora sledi da je

$$\cos \sphericalangle(p, q) = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}|\ |\vec{q}|}.$$

Prave $p$ i $q$ su *uzajamno normalne* ako je $\sphericalangle(p, q) = \frac{\pi}{2}$, tj. $\cos \sphericalangle(p, q) = 0$, tj. ako i samo ako je

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 0.$$

## Primer

*Pokazati da se prave* $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ *i* $q : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$ *seku, odrediti njihovu presečnu tačku i ugao* $\sphericalangle(p, q)$ *između pravih* $p$ *i* $q$.

Vektori pravca pravih $p$ i $q$ su $\vec{p} = (1, 3, 1)$ i $\vec{q} = (1, 4, 2)$ nisu kolinearni prave $p$ i $q$ nisu paralelne, niti se poklapaju.
$\overrightarrow{PQ} = (0, 1, 1)$.
Mešoviti proizvod vektora $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ jednak je nuli, pa su vektori $\vec{p}$, $\vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ komplanarni tako da se prave $p$ i $q$ seku.
Zajednička tačka $S(x, y, z)$ pravih $p$ i $q$ zadovoljava jednačinu prave $p$ i jednačinu prave $q$, tj. važi:

$$x = 2 + t = 2 + k, \quad y = 2 + 3t = 3 + 4k, \quad z = 3 + t = 4 + 2k.$$

Rešavanjem sistema jednačina dobija se $k = t = -1$, $x = 1$, $y = -1$ i $z = 2$, tj. tačka preseka je $S(1, -1, 2)$.

# Prave koje se seku

Iz

$$\cos \sphericalangle(p, q) = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}|\ |\vec{q}|} = \frac{|(1, 3, 1) \cdot (1, 4, 2)|}{|(1, 3, 1)|\ |(1, 4, 2)|} = \frac{16}{\sqrt{11}\sqrt{21}} = \frac{16\sqrt{231}}{11},$$

sledi

$$\sphericalangle(p, q) = \arccos \frac{16\sqrt{231}}{11}.$$

# Miloilazne prave

Ako vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ nisu kolinearni ($\vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{0}$) i

$$(\vec{p} \times \vec{q}) \cdot (\vec{r_2} - \vec{r_1}) \neq 0$$

gde su $\vec{r_1}$ i $\vec{r_2}$ vektori položaja tačke na pravoj $p$ i pravoj $q$ redom, a $\vec{p}$ i $\vec{q}$ su njihovi vektori pravaca, prave $p$ i $q$ ne leže u istoj ravni i one su *mimoilazne*.

Za mimoilazne prave $p$ i $q$ postoji *zajednička normala* $n$. Neka su prave $p$ i $q$ date u vektorskom obliku, tj.

$$p : \vec{r} = \vec{r_1} + \lambda_1 \vec{p} \quad \text{i} \quad q : \vec{r} = \vec{r_2} + \lambda_2 \vec{q}.$$

Zajednička normala $n$ je normalna na pravu $p$ i na pravu $q$, tako da se za vektor pravca $\vec{n}$ zajedničke normale pravih $p$ i $q$ može uzeti vektorski proizvod vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$, tj.

$$\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{0}.$$

# Miloilazne prave

Neka je $\alpha_1$ ravan koja sadrži pravu $p$ i zajedničku normalu $n$ mimoilaznih pravih $p$ i $q$. Vektor normale $\vec{n}_1$ ravni $\alpha_1$ je normalan na vektore pravaca prave $n$ i prave $p$ tako da je

$$\vec{n}_1 = \vec{n} \times \vec{p}.$$

Uvrštavanjem $\vec{n} = \vec{p} \times \vec{q}$ u datu jednakost dobija se

$$\vec{n}_1 = (\vec{p} \times \vec{q}) \times \vec{p}.$$

Ravan $\alpha_1$ sadrži pravu $p$ pa samim tim i tačku prave $p$ čiji je vektor položaja $\vec{r}_1$. Dakle, ravan $\alpha_1$ je određena tačkom čiji je vektor položaja $\vec{r}_1$ i vektorom normale $\vec{n}_1$.
Slično, neka je $\alpha_2$ ravan koja sadrži pravu $q$ i zajedničku normalu $n$ mimoilaznih pravih $p$ i $q$.
Presek ravni $\alpha_1$ i $\alpha_2$ je *zajednička normala pravih $p$ i $q$.*

Date su prava $p$ i ravan $\alpha$, gde je $\vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)$ vektor položaja tačke $M_0$ prave $p$, $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ vektor pravca prave $p$ i $\vec{n} = (A, B, C)$ vektor normale ravni $\alpha$.

Ako je $\vec{p} \perp \vec{n}$, tj. $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$, i $M_0 \in \alpha$ *prava $p$ pripada ravni $\alpha$.*
Uslovi $\vec{p} \cdot \vec{n} = 0$ i $M_0 \in \alpha$ su ekvivalentni sa

$$p_1 A + p_2 B + p_3 C = 0 \quad \wedge \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Ako je $\vec{p} \perp \vec{n}$ i $M_0 \notin \alpha$ *prava $p$ je paralelna ravni $\alpha$.* U ovom slučaju važi

$$p_1 A + p_2 B + p_3 C = 0 \quad \wedge \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

Ako $\vec{p}$ i $\vec{n}$ nisu normalni, tj.

$$p_1A + p_2B + p_3C \neq 0,$$

*prava p i ravan $\alpha$ se seku*. Kaže se i da *prava p prodire ravan $\alpha$*. U ovom slučaju prava $p$ i ravan $\alpha$ imaju jednu zajedničku tačku koja se naziva *tačka prodora*.
Zamenom $x, y$ i $z$ iz parametarskog oblika jednačine prave

$$x = x_0 + \lambda p_1, \quad y = y_0 + \lambda p_2, \quad z = z_0 + \lambda p_3$$

u opšti oblik jednačine ravni $Ax + By + Cz + D = 0$ dobija se

$$A(x_0 + \lambda p_1) + B(y_0 + \lambda p_2) + C(z_0 + \lambda p_3) + D = 0$$

odakle je

$$\lambda = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Ap_1 + Bp_2 + Cp_3}.$$

Uvrštavanjem dobijene vrednosti parametra $\lambda$ u parametarski oblik jednačine prave dobijaju se koordinate tačke prodora $P$.

# Primeri

## Primer

*Ispitati međusobni položaj ravni* $\alpha : 2x - y + z - 6 = 0$ *i prave* $p$, *ako je*

1. $p : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-4}{-2}.$
2. $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-6}{-1}.$
3. $p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{1}.$
4. $p : \dfrac{x+2}{-2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z+1}{-1}.$

*Ako se prava i ravan seku odrediti tačku prodora.*

Rastojanje tačke $T$ od prave $P$ jednako je intenzitetu vektora $\overrightarrow{TQ}$, gde je tačka $Q$ tačka prodora prave $p$ kroz ravan koja prolazi kroz tačlu $T$ i normalna je na pravu $p$.

**Primer**

*Odrediti rastojanje tačke* $T(2,1,5)$ *od prave* $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+2}{-1}$.

# Primeri

**Primer**

*Data je tačka* $A(-1,-4,4)$ *i ravan* $\alpha : 2x+5y-3z=4$. *Izračunati rastojanje tačke* $A$ *od ravni* $\alpha$.

**Primer**

*Napisati jednačinu ravni* $\alpha$ *koja sadrži prave* $p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}$ *i* $q : \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$.

**Primer**

*Napisati jednačinu ravni* $\alpha$ *koja sadrži prave* $p : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{6}$ *i* $q : \frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{-12}$.