VEŽBE IZ MATEMATIKE

Novi Sad,
2020.

Sadržaj

1 Analitička geometrija **3**

2 Zadaci za samostalni rad **21**

1. Analitička geometrija

- **Rastojanje između tačaka** $A(x_1, y_1, z_1)$ i $B(x_2, y_2, z_2)$ jednako je intenzitetu vektora $\overrightarrow{AB}$ tj.

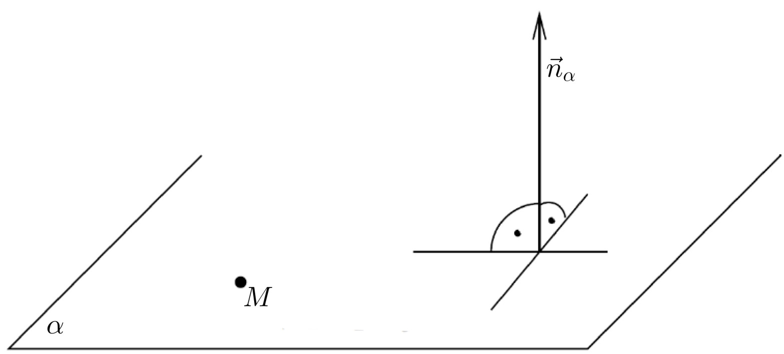
$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

- Koordinate tačke C za koju važi da je $\overrightarrow{AC} = \lambda \cdot \overrightarrow{CB}$ $(\lambda \neq -1)$ su

$$C(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}).$$

Sredina duži AB je tačka $S(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2})$.

Ravan



- **Skalarna jednačina ravni** α kojoj pripada tačka $M(x_1, y_1, z_1)$ i koja je normalna na nenula vektor $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ je

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

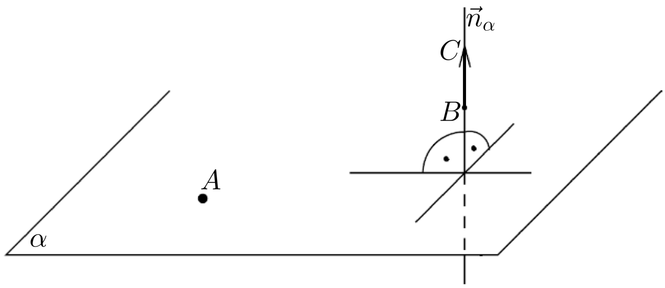
Vektor $\vec{n}_\alpha$ se zove **vektor normale** ravni α. Za vektor normale ravni važan je samo pravac, a ne intenzitet i smer .

- **Opšti oblik jednačine ravni** je

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Zadatak 1.1. Napisati jednačinu ravni α koja sadrži tačku $A(2,3,0)$ i normalna je na vektor $\overrightarrow{BC}$, gde je $B(1,1,-1)$ i $C(0,0,3)$.

Rešenje.



Vektor normale ravni α je kolinearan vektoru $\overrightarrow{BC} = (-1,-1,4) = -(1,1,-4)$. Možemo uzeti da je vektor normale ravni α vektor

$$\vec{n}_\alpha = (1,1,-4).$$

Jednačina ravni α koja sadrži tačku A i normalna je na vektor $\vec{n}_\alpha$ je

$$\alpha : 1(x-2) + 1(y-3) - 4(z-0) = 0,$$

tj.

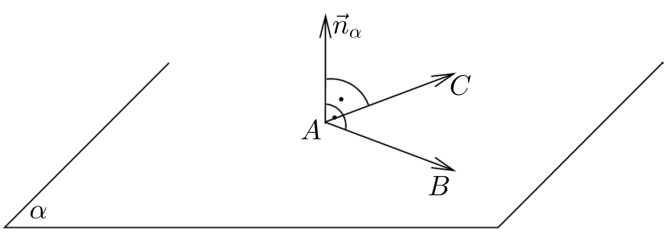
$$\alpha : x + y - 4z - 5 = 0.$$

Zadatak 1.2. a) Napisati jednačinu ravni α koja sadrži tačke $A(-1,6,3)$, $B(3,-2,-5)$ i $C(0,1,0)$.

b) Ispitati da li tačke $D(1,1,3)$ i $E(1,5,0)$ pripadaju ravni α.

c) Odrediti realan parametar p tako da tačka $F(1,p,3)$ pripada ravni α.

Rešenje.



a) Kako tačke A, B i C pripadaju ravni α, vektor normale ravni α je normalan na vektore $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, gde je $\overrightarrow{AB} = (4, -8, -8)$ i $\overrightarrow{AC} = (1, -5, -3)$. Vektor normale ravni α je kolinearan sa vektorom

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -8 & -8 \\ 1 & -5 & -3 \end{vmatrix} = (-16, 4, -12) = -4(4, -1, 3).$$

Možemo uzeti da je vektor normale ravni α

$$\vec{n}_\alpha = (4, -1, 3).$$

Jednačina ravni α koja sadrži tačku A i ima vektor normale $\vec{n}_\alpha$ je

$$\alpha : 4(x + 1) - 1(y - 6) + 3(z - 3) = 0,$$

tj.

$$\alpha : 4x - y + 3z + 1 = 0.$$

b) Uvrštavajući koordinate tačke D u jednačinu ravni α imamo da je

$$4 - 1 + 9 + 1 = 13 \neq 0,$$

tako da tačka D ne pripada ravni α. Analogno, za tačku E imamo da je $4 - 5 + 0 + 1 = 0$ i tačka E pripada ravni α.

c) Kako tačka F treba da pripada ravni α, koordinate tačke F treba da zadovoljavaju jednačinu ravni α, tj. treba da važi

$$4 - p + 9 + 1 = 0.$$

Rešavanjem navedene jednačine dobijamo da je $p = 14$, tj. tražena tačka je

$$F(1, 14, 3).$$

Međusobni položaj dve ravni

Date su ravni

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{i} \quad \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Vektor normale ravni α je $\vec{n}_\alpha = (A_1, B_1, C_1)$, a $\vec{n}_\beta = (A_2, B_2, C_2)$ je vektor normale ravni β .

- Ravni su **paralelne** ako su im vektori normala kolinearni $\vec{n}_\alpha = \lambda\vec{n}_\beta$, $(\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ i ako je $D_1 \neq \lambda\, D_2$.
- Ravni se **poklapaju** ako su im vektori normala kolinearni $\vec{n}_\alpha = \lambda\vec{n}_\beta$, $(\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\})$ i ako je $D_1 = \lambda\, D_2$.
- Ako vektori $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ nisu kolinearni ($\vec{n}_\alpha \neq \lambda\vec{n}_\beta$) ravni α i β se **seku.**

  Ugao φ između ravni α i β je ugao između vektora $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ pri čemu je $0 \leq \measuredangle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \leq \frac{\pi}{2}$, što znači da je

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Zadatak 1.3. Date su ravni $\alpha : 2x + py + z = 3$ i $\beta : 6x + 8y + 3z = 15$. Odrediti realan parametar p tako da

a) ravan α bude paralelna sa ravni β.

b) ravan α bude normalna na ravan β.

Rešenje.

a) Da bi ravan α bila paralelna sa ravni β, vektori njihovih normala

$$\vec{n}_\alpha = (2, p, 1) \quad \text{i} \quad \vec{n}_\beta = (6, 8, 3)$$

treba da budu kolinearni, tj. treba da postoji $m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ tako da je

$$\vec{n}_\beta = m \cdot \vec{n}_\alpha$$

$$(6, 8, 3) = m(2, p, 1) \Leftrightarrow (6, 8, 3) = (2m, mp, m).$$

Na osnovu definicije jednakosti dva vektora dobijamo sistem jednačina

$$6 = 2m, \quad 8 = mp, \quad 3 = m$$

čijim rešavanjem dobijamo da je $p = \dfrac{8}{3}$.

b) Da bi ravan α bila normalna na ravan β, vektori njihovih normala treba da budu normalni ($\vec{n}_\alpha \perp \vec{n}_\beta$), tj.

$$\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta = 0, \quad \text{odnosno} \quad 12 + 8p + 3 = 0.$$

Rešavajući navedenu jednačinu dobijamo da je $p = -\dfrac{15}{8}$.

Zadatak 1.4. Napisati jednačinu ravni β koja sadrži tačku $B(-2, 7, 3)$ i paralelna je sa ravni $\alpha : x - 4y + 5z - 1 = 0$.

Rešenje.

Kako tražena ravan β treba da bude paralelna sa datom ravni α, vektori normala su im kolinearni, tako da možemo uzeti da je

$$\vec{n}_\beta = \vec{n}_\alpha = (1, -4, 5).$$

Jednačina ravni β, koja sadrži tačku $B(-2, 7, 3)$ i ima vektor normale $\vec{n}_\beta$, je:

$$\beta : 1(x + 2) - 4(y - 7) + 5(z - 3) = 0,$$

tj.

$$\beta : x - 4y + 5z + 15 = 0.$$

Zadatak 1.5. Napisati jednačinu ravni γ koja sadrži koordinatni početak i normalna je na ravni $\alpha : 2x - y + 5z + 3 = 0$ i $\beta : x + 3y - z - 7 = 0$.

Rešenje.

Ravan γ je normalna na ravni α i β, tako da je vektor normale ravni γ kolinearan vektorskom proizvodu vektora $\vec{n}_\alpha = (2, -1, 5)$ i $\vec{n}_\beta = (1, 3, -1)$. Kako je

$$\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-14, 7, 7) = -7(2, -1, -1),$$

za vektor normale ravni γ može se uzeti

$$\vec{n}_\gamma = (2, -1, -1).$$

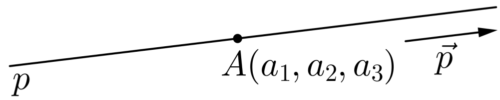
Tražena jednačina ravni γ, sa vektorom normale $\vec{n}_\gamma$, koja sadrži koordinatni početak $O(0, 0, 0)$ je

$$\gamma : 2(x - 0) - 1(y - 0) - 1(z - 0) = 0,$$

tj.

$$\gamma : 2x - y - z = 0.$$

Prava



- **Kanonički oblik jednačine prave** p koja sadrži tačku $A(a_1, a_2, a_3)$ i koja je paralelna vektoru $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ je

$$p : \frac{x - a_1}{p_1} = \frac{y - a_2}{p_2} = \frac{z - a_3}{p_3}.$$

  Vektor $\vec{p}$ se naziva **vektor pravca** prave p. Za vektor pravca prave važan je samo pravac, a ne intezitet i smer.

- **Parametarski oblik jednačine prave** p je

$$p : \quad x = a_1 + tp_1, \;\; y = a_2 + tp_2, \;\; z = a_3 + tp_3,$$

  gde je t realan parametar.

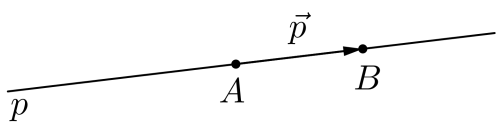
Zadatak 1.6. Napisati jednačinu prave p koja sadrži tačku $A(1, 2, -3)$ i ima vektor pravca $\vec{p} = (2, 1, 0)$.

Rešenje.

$$p : \frac{x - 1}{2} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 3}{0}.$$

Zadatak 1.7. Napisati jednačinu prave p koja sadrži tačke $A(3, 2, -1)$ i $B(0, 3, 5)$.

Rešenje.



Vektor pravca prave p je kolinearan vektoru $\overrightarrow{AB} = (0, 3, 5) - (3, 2, -1) = (-3, 1, 6)$. Dakle, $\vec{p} = (-3, 1, 6)$.

Kako npr. tačka $A(3, 2, -1)$ pripada pravoj p, dobijamo da je jednačina prave

$$p : \frac{x - 3}{-3} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 1}{6}.$$

Međusobni položaj dve prave

Neka je prava p određena tačkom $A(a_1, a_2, a_3)$ i vektorom pravca $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, a prava q tačkom $B(b_1, b_2, b_3)$ i vektorom pravca $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$.

- Ako je $\vec{q} = \lambda\vec{p}$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i ako tačka A prave p ne pripada pravoj q, onda su prave p i q **paralelne.**

- Ako je $\vec{q} = \lambda\vec{p}$ za neko $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i ako tačka A prave p pripada pravoj q, onda se prave p i q **poklapaju**.

- Ako vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ nisu kolinearni ($\vec{q} \neq \lambda\vec{p}$) i $\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = 0$, tada se prave p i q **seku**.

  Ugao φ između pravih p i q je ugao između njihovih vektora pravaca, pri čemu je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, što znači da je
  $$\cos\varphi = \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|}.$$

- Ako vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ nisu kolinearni ($\vec{q} \neq \lambda\vec{p}$) i $\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) \neq 0$, tada su prave p i q **mimoilazne**.

Zadatak 1.8. Ispitati međusobni položaj pravih. Ako se seku naći tačku preseka.

a) $p: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{6}, \qquad q: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-6}{12}.$

b) $p: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{6}, \qquad q: \dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z+5}{-12}.$

c) $p: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{1}, \quad q: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z-4}{2}.$

d) $p: \dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+1}{-1}, \quad q: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z+2}{1}.$

Rešenje.

a)
$$p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{6}, \qquad q: \frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{12}.$$

$\vec{p} = (2, 1, 6)$, $P(0, 1, 0) \in p$,

$\vec{q} = (4, 2, 12)$,

$\vec{q} = 2\vec{p} \Rightarrow$ prave p i q su ili paralelne ili se poklapaju.

Koordinate tačke P zadovoljavaju jednačinu prave q jer je
$$\frac{0-2}{4} = \frac{1-2}{2} = \frac{0-6}{12}$$
$\Rightarrow P \in q \Rightarrow$ prave p i q poklapaju.

b)

$$p: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{6}, \qquad q: \frac{x-2}{-4} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+5}{-12}.$$

$\vec{p} = (2,1,6)$, $P(0,1,0) \in p$,

$\vec{q} = (-4,-2,-12)$,

$\vec{q} = -2\vec{p} \Rightarrow$ prave p i q su ili paralelne ili se poklapaju.

Koordinate tačke P ne zadovoljavaju jednačinu prave q jer je

$$\frac{0-2}{-4} \neq \frac{1-3}{-2} \neq \frac{0+5}{-12}$$

$\Rightarrow P \notin q \Rightarrow$ prave p i q su paralelne.

c)

$$p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1}, \qquad q: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2}$$

$\vec{p} = (1,3,1)$, $P(2,2,3) \in p$,

$\vec{q} = (1,4,2)$, $Q(2,3,4) \in q$,

$\vec{q} \neq \alpha\vec{p} \Rightarrow$ prave p i q se ili seku ili se mimoilaze.

$\overrightarrow{PQ} = (2,3,4) - (2,2,3) = (0,1,1)$,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow p \text{ i } q \text{ se seku.}$$

$S(x,y,z)$ - tačka preseka pravih p i q.

$$p: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{1} = t \quad \Rightarrow \quad p: x = t+2,\ y = 3t+2,\ z = t+3.$$

$$q: \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{2} = k \quad \Rightarrow \quad q: x = k+2,\ y = 4k+3,\ z = 2k+4.$$

Tačka S zadovoljava jednačinu prave p i prave q, tj. važi:

$$t + 2 = k + 2$$

$$3t + 2 = 4k + 3$$

$$t + 3 = 2k + 4.$$

Rešenje ovog sistema je $k = t = -1$. Tada je $x = 1$, $y = -1$ i $z = 2$, tj. tražena tačka preseka je

$$S(1,-1,2).$$

d)

$$p: \frac{x-3}{4} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-1}, \qquad q: \frac{x}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z+2}{1}.$$

$\vec{p} = (4, 1, -1),\ P(3, 3, -1) \in p,$

$\vec{q} = (2, 0, 1),\ Q(0, 0, -2) \in q,$

$\vec{q} \neq \alpha\vec{p} \Rightarrow$ prave p i q se ili seku ili se mimoilaze.

$\overrightarrow{PQ} = (0, 0, -2) - (3, 3, -1) = (-3, -3, -1),$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = \begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \Rightarrow p \text{ i } q \text{ se mimoilaze.}$$

Zadatak 1.9. Napisati jednačinu prave q koja sadrži tačku $A(1, -1, 0)$ i paralelna je sa pravom $p : \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{5}$.

Rešenje.

Kako je $p \parallel q$, može se uzeti da je $\vec{q} = \vec{p} = (3, -2, 5)$.

$$q : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{5}.$$

Međusobni položaj prave i ravni

Neka je $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ vektor normale ravni α i $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ vektor pravca prave p. Neka je $A(a_1, a_2, a_3)$ tačka prave p.

- Ako je $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ i ako tačka A pripada ravni α, tada prava p **pripada** ravni α.
- Ako je $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ i ako tačka A ne pripada ravni α, tada je prava p **paralelna** ravni α.
- Ako je $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$, tada prava p **seče** ravan α.

Zadatak 1.10. Ispitati međusobni položaj ravni $\alpha : 2x - y + z - 6 = 0$ i prave p, ako je

a) $p : \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-4}{1}$,

b) $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-6}{-1}$,

c) $p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{1}$.

Ako se ravan α i prava p seku, naći tačku preseka.

Rešenje.

$\vec{n}_\alpha = (2, -1, 1)$.

a)

$$p : \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$$

$\vec{p} = (-1, -1, 1)$, $A(1, -1, 4) \in p$

$\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = -2 + 1 + 1 = 0 \Rightarrow$ prava p je ili paralelna sa ravni α ili pripada ravni α.

$A(1, -1, 4) \notin \alpha$ jer je $2 \cdot 1 - (-1) + 4 - 6 = 1 \neq 0 \Rightarrow$ prava p je paralelna sa ravni α.

b)

$$p : \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-6}{-1}$$

$\vec{p} = (1, 1, -1)$, $A(0, 0, 6) \in p$

$\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 2 - 1 - 1 = 0 \Rightarrow$ prava p je ili paralelna sa ravni α ili pripada ravni α.

$A(0, 0, 6) \in \alpha$ jer je $2 \cdot 0 - 0 + 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ prava p pripada ravni α.

c)
$$p : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{1}$$

$\vec{p} = (2, 3, 1)$,

$\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 4 - 3 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ prava p seče ravan α.

$S(x, y, z)$ - tačka preseka prave p i ravni α.

$p : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+1}{1} = t \;\Rightarrow\; p : x = 2t,\; y = 3t + 1,\; z = t - 1.$

Kada se parametarski oblik jednačine prave p zameni u jednačinu ravni $\alpha : 2x - y + z - 6 = 0$, dobijamo
$$2 \cdot 2t - (3t + 1) + t - 1 - 6 = 0,$$
tj. $t = 4$. Tada je $x = 8, y = 13, z = 3$, odnosno zajednička tačka prave p i ravni α je
$$S(8, 13, 3).$$

Zadatak 1.11. Napisati jednačinu prave p koja sadrži tačku $A(0, 1, -2)$ i normalna je na ravan $\alpha : 3x - y + z - 1 = 0$.

Rešenje.

Kako je $p \perp \alpha$, može se uzeti da je $\vec{p} = \vec{n}_\alpha = (3, -1, 1)$.
$$p : \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}.$$

Zadatak 1.12. Odrediti realan parametar a tako da prava
$$p : \frac{x}{-1} = \frac{y-8}{4} = \frac{z-1}{a}$$

a) seče pravu $q : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1}$;

b) bude paralelna ravni $\alpha : x - y + 3z - 5 = 0$;

c) bude normalna na ravan $\beta : x - 4y + 2z - 1 = 0$.

Rešenje.

a) $\vec{p} = (-1, 4, a)$, $P(0, 8, 1) \in p$,

$\vec{q} = (1, 1, 1)$, $Q(0, 0, 0) \in q$,

$\overrightarrow{PQ} = (0, 0, 0) - (0, 8, 1) = (0, -8, -1)$,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = \begin{vmatrix} 0 & -8 & -1 \\ -1 & 4 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -8a - 3 = 0 \text{ za } a = -\frac{3}{8}.$$

b) $\vec{p} = (-1, 4, a)$,

$\vec{n}_\alpha = (1, -1, 3)$,

$\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = -1 - 4 + 3a = 0$ za $a = \dfrac{5}{3}$.

c) $\vec{p} = (-1, 4, a)$,

$\vec{n}_\beta = (1, -4, 2)$,

$p \perp \beta \Rightarrow \vec{p} \parallel \vec{n}_\alpha$,

$\vec{p} = -\vec{n}_\alpha$, tj. $(-1, 4, a) = -(1, -4, 2)$ za $a = -2$.

Zadatak 1.13. Napisati jednačinu ravni α koju određuju prave

$$p : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{0} \quad \text{i} \quad q : \frac{x+2}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

Rešenje.

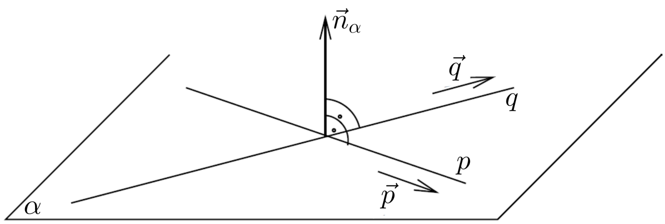
Potrebno je prvo odrediti u kakvom su međusobnom položaju prave p i q.

$\vec{p} = (1, -1, 0)$, $P(0, 2, -1) \in p$,

$\vec{q} = (3, -1, -1)$, $Q(-2, 2, 0) \in q$,

$\overrightarrow{PQ} = (-2, 2, 0) - (0, 2, -1) = (-2, 0, 1)$,

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{prave } p \text{ i } q \text{ se seku.}$$



Kako je $\vec{n}_\alpha \perp \vec{p}$ i $\vec{n}_\alpha \perp \vec{q}$, može se uzeti da je $\vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{q}$. Dakle,

$$\vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 2).$$

Kako prava p treba da pripada traženoj ravni, sve tačke te prave se nalaze u ravni α, tako da i $P(0, 2, -1) \in \alpha$.

$$\alpha : 1(x-0) + 1(y-2) + 2(z+1) = 0,$$

tj.

$$\alpha : x + y + 2z = 0.$$

Zadatak 1.14. Napisati jednačinu ravni α koju određuju prave

$$p : \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{0} \quad \text{i} \quad q : \frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{0}.$$

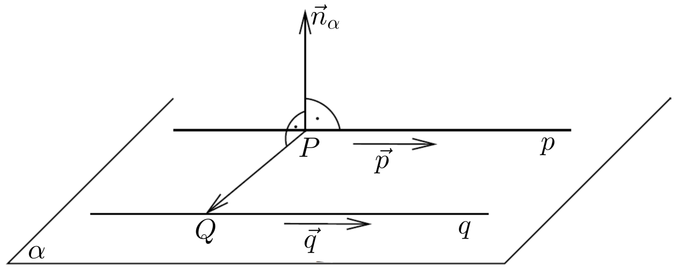
Rešenje.

Potrebno je prvo odrediti u kakvom su međusobnom položaju prave p i q.

$\vec{p} = (1, -1, 0),\ P(0, 2, -1) \in p,$

$\vec{q} = (2, -2, 0),\ Q(-2, 2, 0) \in q,$

$\vec{q} = 2\vec{p}$ i tačka $P(0, 2, -1)$ ne pripada pravoj $q \Rightarrow$ prave p i q su paralelne.



Da bismo odredili vektor normale ravni α, treba naći još jedan vektor koji se nalazi u toj ravni, a koji nije paralelan sa vektorom $\vec{p}$. Traženi vektor je $\overrightarrow{PQ} = (-2, 2, 0) - (0, 2, -1) = (-2, 0, 1)$.

$\vec{n}_\alpha \perp \vec{p}$ i $\vec{n}_\alpha \perp \overrightarrow{PQ} \Rightarrow \vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \overrightarrow{PQ}$.

$$\vec{n}_\alpha = \vec{p} \times \overrightarrow{PQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, -2).$$

$P(0, 2, -1) \in \alpha$.

$$\alpha : -1(x - 0) - 1(y - 2) - 2(z + 1) = 0,$$

tj.

$$\alpha : x + y + 2z = 0.$$

Zadatak 1.15. Odrediti ortogonalnu projekciju tačke $A(1,-4,-1)$ na pravu

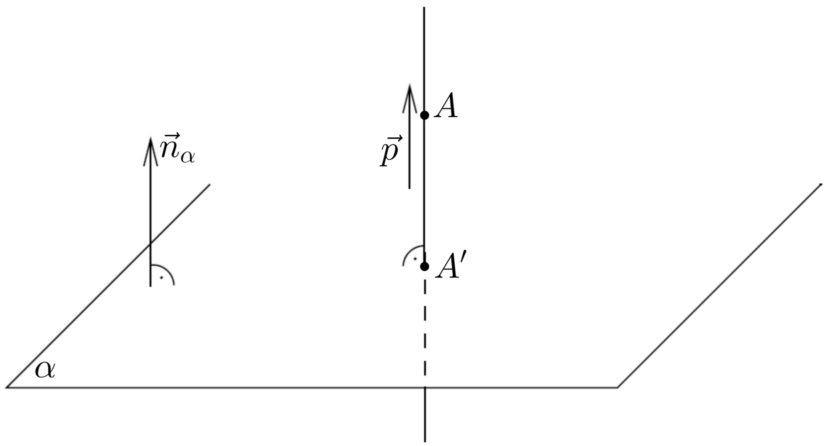
$$p: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-1}.$$

Rešenje.

Neka je A' ortogonalna projekcija tačke A na pravu p.

- Ako $A \in p$, onda je $A \equiv A'$.
- Ako $A \notin p$, postavlja se ravan α normalna na pravu p koja sadrži tačku A. Tada je $\alpha \cap p = \{A'\}$.

$A(1,-4,-1) \notin p \Rightarrow$ postavlja se ravan α koja sadrži tačku A i normalna je na pravu p.



$\vec{n}_\alpha = \vec{p} = (2,2,-1)$,

$\alpha : 2(x-1) + 2(y+4) - 1(z+1) = 0$,

$\alpha : 2x + 2y - z + 5 = 0$.

$A'(x,y,z)$ se dobija u preseku prave p i ravni α.

$$p: \frac{x+1}{2} = \frac{y+3}{2} = \frac{z}{-1} = t \quad \Rightarrow \quad p: x = 2t-1,\ y = 2t-3,\ z = -t.$$

Zamenjujući parametarski oblik jednačine prave p u jednačinu ravni α dobija se

$$2(2t-1) + 2(2t-3) - (-t) + 5 = 0,$$
$$9t - 3 = 0,$$
$$t = \frac{1}{3}.$$

Za $t = \frac{1}{3}$ je $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{7}{3}$, $z = -\frac{1}{3}$, tj. $A'(-\frac{1}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{1}{3})$.

Zadatak 1.16. Odrediti ortogonalnu projekciju tačke $A(1,-4,-1)$ na ravan

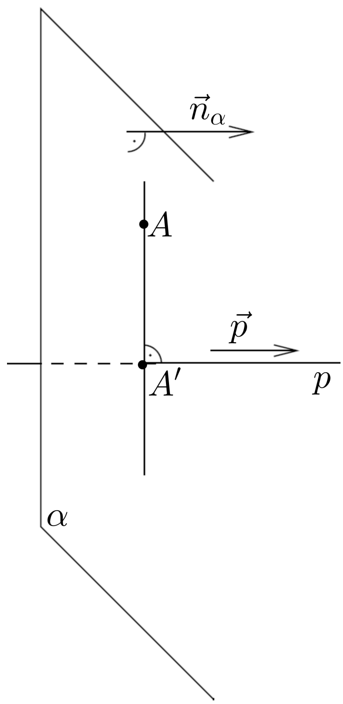
$$\alpha : 3x + 5y - 2z = 4.$$

Rešenje.

Neka je A' ortogonalna projekcija tačke A na ravan α.

- Ako $A \in \alpha$, onda je $A \equiv A'$.
- Ako $A \notin \alpha$, postavlja se prava p normalna na ravan α koja sadrži tačku A. Tada je $\alpha \cap p = \{A'\}$.

$A(1,-4,-1) \notin \alpha \Rightarrow$ postavlja se prava p koja sadrži tačku A i normalna je na ravan α.



$\vec{p} = \vec{n}_\alpha = (3, 5, -2)$,

$p : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z+1}{-2}$,

$A'(x, y, z)$ se dobija u preseku prave p i ravni α.

$p : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z+1}{-2} = t \quad \Rightarrow \quad p : x = 3t+1,\ y = 5t-4,\ z = -2t-1.$

Zamenjujući parametarski oblik jednačine prave p u jednačinu ravni α dobija se

$$3(3t+1) + 5(5t-4) - 2(-2t-1) = 4,$$

$$38t = 19,$$

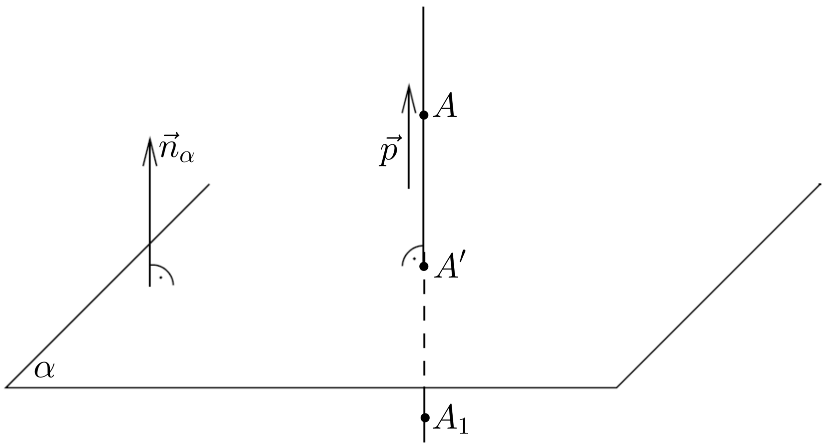
$$t = \frac{1}{2}.$$

Za $t = \frac{1}{2}$ je $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -2$, tj. $A'(\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, -2)$.

Zadatak 1.17. Naći tačku A_1 simetričnu tački $A(2, -1, 3)$ u odnosu na ravan $\alpha : 4x + 3y + 5z = 120$. Odrediti rastojanje tačke A od ravni α.

Rešenje.

Prvo ćemo odrediti ortogonalnu projekciju tačke A na ravan α.



$A(2, -1, 3) \notin \alpha \Rightarrow$ postavlja se prava p koja sadrži tačku A i normalna je na ravan α. Tada je:

$\vec{p} = \vec{n}_\alpha = (4, 3, 5)$,

$p : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{5}$,

$A'(x, y, z)$ se dobija u preseku prave p i ravni α.

$p : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-3}{5} = t \quad \Rightarrow \quad p : x = 4t + 2,\ y = 3t - 1,\ z = 5t + 3.$

Zamenjujući parametarski oblik jednačine prave p u jednačinu ravni α dobija se

$$4(4t + 2) + 3(3t - 1) + 5(5t + 3) = 120,$$

$$50t = 100,$$

$$t = 2.$$

Za $t = 2$ je $x = 10$, $y = 5$, $z = 13$, tj. $A'(10, 5, 13)$.

Tačka $A'(10,5,13)$ je sredina duži AA_1, gde je $A(2,-1,3)$, a $A_1(x,y,z)$. Tada je

$$\frac{x+2}{2} = 10, \quad \frac{y-1}{2} = 5, \quad \frac{z+3}{2} = 13,$$

odnosno $x = 18$, $y = 11$, $z = 23$. Dakle, $A_1(18,11,23)$ je tražena tačka.

Rastojanje tačke A od ravni α, u oznaci $\mathrm{d}(A,\alpha)$ je dužina vektora

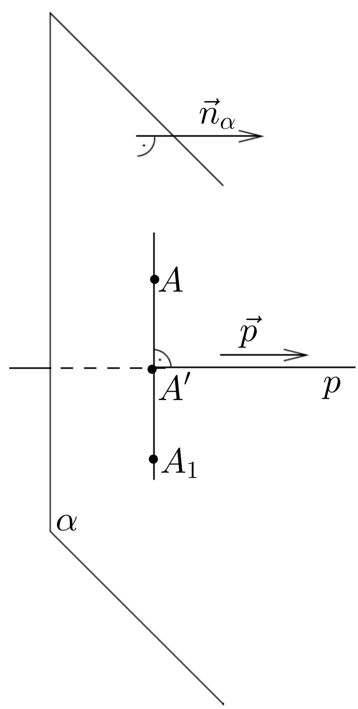
$$\overrightarrow{AA'} = (10,5,13) - (2,-1,3) = (8,6,10).$$

Dakle, $\mathrm{d}(A,\alpha) = \sqrt{8^2+6^2+10^2} = 10\sqrt{2}$.

Zadatak 1.18. Naći tačku A_1 simetričnu tački $A(2,6,-3)$ u odnosu na pravu $p : \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-11}{2}$. Odrediti rastojanje tačke A od prave p.

Rešenje.

Prvo ćemo odrediti ortogonalnu projekciju tačke A na pravu p.



Prvo ćemo odrediti ortogonalnu projekciju tačke A na pravu p.

$A(2,6,-3) \notin p \Rightarrow$ postavlja se ravan α koja sadrži tačku A i normalna je na pravu p. Tada je:

$\vec{n}_\alpha = \vec{p} = (2, 1, 2)$,

$\alpha : 2(x-2) + 1(y-6) + 2(z+3) = 0$,

$\alpha : 2x + y + 2z - 4 = 0$,

$A'(x, y, z)$ se dobija u preseku prave p i ravni α.

$p : \dfrac{x-7}{2} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-11}{2} = t \quad \Rightarrow \quad p : x = 2t + 7,\ y = t + 4,\ z = 2t + 11.$

Zamenjujući parametarski oblik jednačine prave p u jednačinu ravni α dobija se

$$2(2t+7) + t + 4 + 2(2t+11) - 4 = 0,$$

$$9t + 36 = 0,$$

$$t = -4.$$

Za $t = -4$ je $x = -1$, $y = 0$, $z = 3$, tj. $A'(-1, 0, 3)$.

Tačka $A'(-1, 0, 3)$ je sredina duži AA_1, gde je $A(2, 6, -3)$, a $A_1(x, y, z)$. Tada je

$$\frac{x+2}{2} = -1, \quad \frac{y+6}{2} = 0, \quad \frac{z-3}{2} = 3,$$

odnosno $x = -4$, $y = -6$, $z = 9$. Dakle, $A_1(-4, -6, 9)$ je tražena tačka.

Rastojanje tačke A od prave p, u oznaci $\mathrm{d}(A, p)$ je dužina vektora

$$\overrightarrow{AA'} = (-1, 0, 3) - (2, 6, -3) = (-3, -6, 6).$$

Dakle, $\mathrm{d}(A, p) = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + 6^2} = 9$.

2. Zadaci za samostalni rad

Zadatak 2.1. Napisati jednačinu ravni α koja je određena tačkama $A(2,2,3)$, $B(0,0,5)$ i $C(1,4,4)$.

Zadatak 2.2. Data je prava $q : \dfrac{x}{-2} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z-6}{5}$ i tačka $M(2,6,-3)$. Naći:

a) Jednačinu prave p koja sadrži tačku M i paralelna je sa pravom q.

b) Jednačinu ravni α koja sadrži prave p i q.

Zadatak 2.3. Data je tačka $A(-1,-4,4)$ i ravan $\alpha : 2x+5y-3z=4$.

a) Odrediti jednačinu prave n koja sadrži tačku A i normalna je na ravan α.

b) Odrediti presek prave n i ravni α.

c) Izračunati rastojanje tačke A od ravni α.

d) Odrediti tačku A_1 simetričnu tački A u odnosu na ravan α.

Zadatak 2.4. Odrediti projekciju tačke $A(2,1,5)$ na pravu

$$p : \frac{x-2}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+2}{-1}.$$

Zadatak 2.5. Odrediti projekciju tačke $A(1,12,3)$ na ravan $\alpha : 2x-y=0$.

Literatura

[1] T. Grbić, J. Pantović, S. Likavec, N. Sladoje, T. Lukić, Lj. Teofanov: Zbirka rešenih zadataka iz Matematike 1, FTN, Novi Sad, 2001.