monotono nerastući niz ograničen s donje strane ($b_n > a_1$), pa i on konvergira. Neka je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$. Iz

$$B - A = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$$

sledi da je $B = A$, tj. oba niza konvergiraju ka istom broju koji predstavlja supremum niza a_n i infinum niza b_n. Ovaj broj pripada svim posmatranim intervalima. Kako dužina posmatranih intervala teži nuli to ne mogu postojati dva broja koja bi pripadala svim posmatranim intervalima.

Ovim je pokazano da niz sužavajućih intervala ima jednu i samo jednu zajedničku tačku.

1.3 Granične vrednosti funkcije

Realnu funkciju realne promenljive smo definisali kao funkciju čiji domen i kodomen su podskupovi skupa realnih brojeva. Ponašanje realne funkcije u nekoj tački, kao i za proizvoljno velike ili male vrednosti nezavisno promenljive, određuje se na osnovu graničnih vrednosti posmatrane funkcije.

1.3.1 Granična vrednost kada $x \to \pm\infty$

Slično kao kod nizova i za realnu funkcije $f(x)$ možemo definisati graničnu vrednost kada nezavisno promenljiva teži beskonačnosti, tj. kad nezavisno promenljiva postaje veća od bilo kog fiksnog pozitivnog realnog broja.

Broj A je **granična vrednost funkcije kad** $x \to +\infty$ ako

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\Delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x > \Delta(\varepsilon)\,,\quad |f(x) - A| < \varepsilon\,,$$

tj. ako $\forall x > x_0$, gde je x_0 dovoljno veliko, vrednosti funkcije $f(x)$ se nalaze unutar proizvoljne ε-okoline tačke A. (Podrazumeva se da je funkcija $f(x)$ definisana za dovoljno velike vrednosti x.) Kao i kod nizova, i ovde se za graničnu vrednost upotrebljava oznaka $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Ako broj A predstavlja graničnu vrednost funkcije $f(x)$ kad $x \to +\infty$, kažemo da prava $y = A$ predstavlja **horizontalnu asimptotu** funkcije $f(x)$ kad $x \to +\infty$.

Na isti način, za broj B ćemo reći da predstavlja **graničnu vrednost funkcije kad** $x \to -\infty$ ako

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\Delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x < -\Delta(\varepsilon)\,,\quad |f(x) - B| < \varepsilon\,.$$

Pisaćemo $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = B$.

Ako broj B predstavlja graničnu vrednost funkcije $f(x)$ kad $x \to -\infty$, kažemo da prava $y = B$ predstavlja horizontalnu asimptotu funkcije $f(x)$ kad $x \to -\infty$.

Ako $\forall x > x_0$ gde je x_0 dovoljno veliko, vrednosti funkcije postaju proizvoljno velike, tj. ako

$$\forall K > 0\,,\ \exists \Delta(K) > 0,\ \forall x > \Delta(K)\,,\quad f(x) > K\,,$$

onda je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Ako umesto uslova $f(x) > K$ važi $f(x) < -K$, onda je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Na sličan način se može definisati analogno ponašanje funkcije kad $x \to -\infty$.

Lako je videti da je

$$\lim_{x\to+\infty} x^m = +\infty \quad \text{za } m > 0$$

jer $\forall K > 0,\ x^m > K \ \Leftrightarrow\ x > K^{\frac{1}{m}}$, pa je $\Delta(K) = K^{\frac{1}{m}}$.

Na isti način se pokazuje da je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^m} = 0 \quad \text{za } m > 0$$

jer $\forall \varepsilon > 0,\ \left|\frac{1}{x^m} - 0\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow\ x > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}}$ pa je $\Delta(\varepsilon) = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{m}}$.

Ovaj primer ilustruje tvrđenje: Kad jedna veličina teži beskonačnosti, onda njena recipročna vrednost teži nuli.

Može se pokazati da za računanje sa graničnim vrednostima funkcija važe ista pravila kao i za računanje sa graničnim vrednostima nizova:

Neka su $f(x)$ i $g(x)$ dve realne funkcije definisane za sve $x > x_0$, gde je x_0 dovoljno veliko, i neka postoje granične vrednosti ovih funkcija kad $x \to +\infty$. Tada je

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \pm \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$,
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$,
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)}$, uz uslov $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) \neq 0$.
4. Ako za svako $x > x_0$, gde je x_0 dovoljno veliko, važi $f(x) \leq g(x)$ onda je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \leq \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
5. Ako je $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = A$, a funkcija $h(x)$ je takva da za svako $x > x_0$, gde je x_0 dovoljno veliko, važi $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, onda je i $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = A$.

Ista pravila važe i za računanje sa graničnim vrednostima realnih funkcija kad $x \to -\infty$.

Ako dve funkcije $f(x)$ i $g(x)$ obe teže ili $+\infty$ ili $-\infty$ kad $x \to +\infty$, a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \qquad \text{i} \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0,$$

kažemo da je funkcija $g(x)$ **asimptota** funkcije $f(x)$ kad $x \to +\infty$.

U specijalnom slučaju, da bi funkcija $g(x) = kx + n$ (koja predstavlja jednačinu prave) bila asimptota funkcije $f(x)$, iz $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{kx+n} = 1$, delenjem brojioca i imenioca sa x dobijamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{x}}{k + \frac{n}{x}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}}{k} = 1\,,$$

odakle je $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Iz $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - (kx+n)) = 0$ sledi da je $n = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$.

Prava $y = kx + n$ sa ovako određenim koeficijentom pravca k i odsečkom na y-osi n predstavlja **kosu asimptotu** funkcije $f(x)$ kad $x \to +\infty$.

Na isti način se dolazi i do jednačine kose asimptote kad $x \to -\infty$.

Primetimo da i u slučaju kad prava $y = A$ predstavlja horizontalnu asimptotu funkcije $f(x)$ važi da je $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{A} = 1$ i $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - A) = 0$.

1.3.2 Granična vrednost u tački

Kod funkcija je moguće definisati i graničnu vrednost funkcije u tački. Posebno se mogu definisati leva i desna granična vrednost.

Za broj A ćemo reći da predstavlja **levu graničnu vrednost** funkcije $f(x)$ u tački x_0 ako se vrednosti funkcije nalaze u ε-okolini tačke A za sve vrednosti x koje se nalaze ulevo od tačke x_0 na dovoljno malom rastojanju, tj. ako

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\,,\quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Uslov $|f(x) - A| < \varepsilon$ možemo zapisati i u obliku $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$.

Za levu graničnu vrednost upotrebljavamo oznaku $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x) = A$.

Za broj B ćemo reći da predstavlja **desnu graničnu vrednost** funkcije $f(x)$ u tački x_0 ako se vrednosti funkcije nalaze u ε-okolini tačke B za sve vrednosti x koje se nalaze udesno od tačke x_0 na dovoljno malom rastojanju, tj. ako

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)\,,\quad |f(x) - B| < \varepsilon\,.$$

Za desnu graničnu vrednost upotrebljavamo oznaku $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x) = B$.

Ako su leva i desna granična vrednost u nekoj tački x_0 iste, onda funkcija ima **graničnu vrednost u tački** x_0, što zapisujemo kao

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A\,.$$

Dakle, $f(x) \to A$ kad $x \to x_0$ ako

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \exists\delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \wedge x \neq x_0\,,\quad |f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

Primetimo da je u prethodnim definicijama bilo potrebno da funkcija $f(x)$ bude definisana u nekoj okolini tačke x_0, dok u samoj tački ne mora biti definisana.

Moguće je da funkcija u nekoj tački teži ka $+\infty$ ili $-\infty$.

Reći ćemo da je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ako

$$\forall K > 0\,,\ \exists\delta(K) > 0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \wedge x \neq x_0\,,\quad f(x) > K.$$

Na isti način se može definisati i $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, kao i odgovarajuće jednostrane granične vrednosti.

Na osnovu definicije vidimo da je

$$\lim_{x \to 0+} \frac{1}{x} = +\infty$$

jer je $\forall K > 0,\ \frac{1}{x} > K \Leftrightarrow x < \frac{1}{K}$, pa je $\delta(K) = \frac{1}{K}$.

Ovaj primer ilustruje tvrđenje: Kad jedna veličina teži nuli, onda njena recipročna vrednost teži beskonačnosti.

Za računanje sa graničnim vrednostima funkcija u tački važe ista pravila kao i za računanje sa graničnim vrednostima kad $x \to +\infty$.

Ako je bar jedna od jednostranih graničnih vrednosti funkcije $f(x)$ u tački x_0 beskonačna, onda za pravu $x = x_0$ kažemo da predstavlja **vertikalnu asimptotu** funkcije $f(x)$.

Primer 1.15 *Funkcija $y = e^{\frac{1}{x}}$ u tački $x = 0$ nema graničnu vrednost jer leva i desna granična vrednost u tački $x = 0$ nisu iste. Naime,*

$$\lim_{x \to 0-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \quad i \quad \lim_{x \to 0+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty\,.$$

Prava $x = 0$ je vertikalna asimptota ove funkcije. Funkcija se pozitivnom delu y-ose asimptotski približava samo sa desne strane.

1.3.3 Granične vrednosti funkcija $\frac{\sin x}{x}$ i $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ kad $x \to 0$

Koristeći pravila za računanje sa graničnim vrednostima funkcija izračunaćemo dve granične vrednosti koje se često upotrebljavaju u praksi:

a) Posmatrajmo jediničnu kružnicu i uočimo centralni ugao x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Dužina luka koji odgovara uočenom uglu je jednaka x pa je

$$\sin x < x < \mathrm{tg} x\,.$$

Za recipročne vrednosti važi $\frac{\cos x}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$. Množenjem sa $\sin x$, pošto je $\sin x > 0$ za $0 < x < \frac{\pi}{2}$, dobijamo

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 .$$

Kako je granična vrednost funkcija $f(x) = \cos x$ i $g(x) \equiv 1$, kad $x \to 0$, ista i iznosi 1, to je i

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

b) Posmatrajmo proizvoljno veliki realan broj t. Funkcija $h(t) = \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$, kad $t \to +\infty$, predstavlja neodređen izraz oblika "1^∞".

Jasno je da za svaki dovoljno veliki realan broj t

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad n < t < n+1 .$$

Tada je $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{t} < \frac{1}{n}$. Nakon dodavanja broja 1 svakom izrazu u prethodnoj nejednakosti, a s obzirom na $n < t < n+1$, imaćemo da je

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} .$$

Kada $t \to +\infty$ tada i $n \to +\infty$. Kako je

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e \quad \text{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e,$$

to je i $\lim\limits_{t\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e$.

Smenom $t = \frac{1}{x}$ se direktno dobija da je $\lim\limits_{x\to 0+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Može se pokazati da je i odgovarajuća leva granična vrednost ista pa je

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

1.4 Neprekidnost funkcije

1.4.1 Neprekidnost u tački

Ako je funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke x_0 kao i u samoj tački x_0 i ako je

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

onda kažemo da je funkcija $f(x)$ **neprekidna u tački** x_0.

Dakle, za neprekidnost funkcije u tački potrebno je da

1. postoji granična vrednost funkcije u posmatranoj tački i
2. da ta granična vrednost bude baš jednaka vrednosti funkcije u posmatranoj tački.

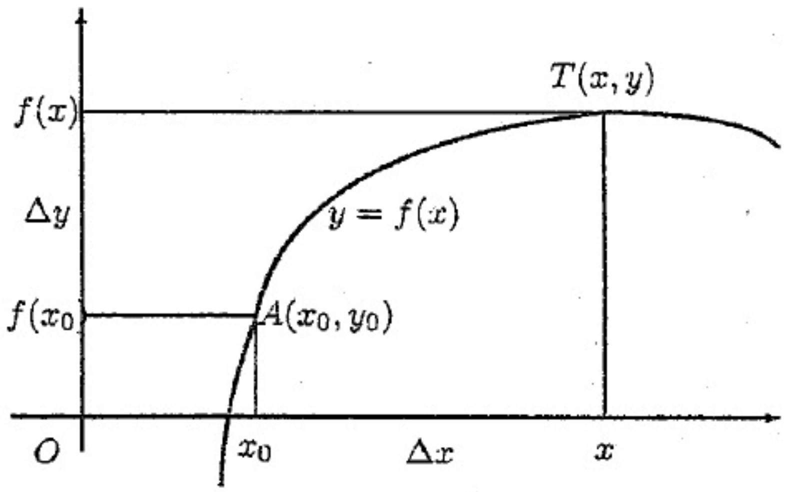
Prema definiciji granične vrednosti funkcije u tački to znači da

$$\forall\varepsilon > 0\,,\ \ \exists\delta(\varepsilon) > 0,\ \ |x - x_0| < \delta(\varepsilon)\,,\ \ \ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Izraz $\Delta x = x - x_0$ se naziva **priraštaj nezavisno promenljive**.

Vidimo da je vrednost promenljive x u okolini tačke x_0 moguće prikazati preko priraštaja nezavisno promenljive kao $x = x_0 + \Delta x$. Tada je odgovarajuća vrednost funkcije $f(x) = f(x_0 + \Delta x)$.

Izraz $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ se naziva **priraštaj funkcije**. Priraštaj funkcije u tački x_0 je $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.



Vidimo da je funkcija neprekidna u nekoj tački ako dovoljno malom priraštaju nezavisno promenljive odgovara proizvoljno mali priraštaj funkcije, tj. ako je

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0\ .$$

Drugim rečima malim promenama nezavisno promenljive odgovaraju male promene funkcije.

Na osnovu pravila za računanje sa graničnim vrednostima funkcija lako se može pokazati sledeće: Ako su $f(x)$ i $g(x)$ dve neprekidne funkcije u nekoj tački x_0, onda je i

1. $h(x) = f(x) \pm g(x)$ neprekidna funkcija u posmatranoj tački,
2. $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ neprekidna funkcija u posmatranoj tački,
3. $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ neprekidna funkcija u posmatranoj tački, pod uslovom da je $g(x_0) \neq 0$.

Iz definicije neprekidnosti funkcije u tački vidimo da funkcija nije neprekidna u nekoj tački, tj. da u nekoj tački postoji **prekid funkcije** ako bilo koji od dva uslova koji su potrebni za neprekidnost nije ispunjen:

a) Ako postoji granična vrednost funkcije u tački, ali ona nije jednaka vrednosti funkcije, što znači da funkcija može biti i nedefinisana u posmatranoj tački, radi se o **prividnom prekidu** funkcije.

b) Ako u posmatranoj tački ne postoji granična vrednost, što se dešava ako su leva i desna granična vrednost konačni ali različiti brojevi ili ako je bar jedna od jednostranih graničnih vrednosti beskonačna ili uopšte ne postoji, radi se o **stvarnom prekidu** funkcije.

Primer 1.16 *Funkcija $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ ima u tački $x = 0$ prividan prekid jer u ovoj tački nije definisana, ali postoji granična vrednost funkcije u ovoj tački. Naime, pokazali smo da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Ovaj prividan prekid je moguće otkloniti tako što se umesto funkcije $f(x)$ posmatra funkcija*

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} .$$

Jasno je da $g(x)$ predstavlja neprekidnu funkciju u tački $x = 0$.

Primer 1.17 *Funkcija $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ ima stvarni prekid u tački $x = 0$. U Primeru 1.15 smo videli da je leva granična vrednost u ovoj tački $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = 0$, a desna $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, tako da ne postoji granična vrednost posmatrane funkcije u tački $x = 0$.*

Posmatrajmo složenu funkciju $f(g(x))$ definisanu u nekoj okolini tačke x_0. Ako funkcija $u = g(x)$ ima graničnu vrednost u tački x_0, tj. ako je

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$$

i ako je funkcija $f(u)$ neprekidna u tački β, tj. $\lim\limits_{u\to\beta} f(u) = f(\beta)$, s obzirom da $u \to \beta$ kad $x \to x_0$, a $f(u) = f(g(x))$, vidimo da je

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\beta) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) .$$

Ovim smo pokazali da je dozvoljeno s limesom ući pod neprekidnu funkciju.

Primer 1.18 *Posmatrajmo funkciju $h(x) = \ln(1 + x)$. Kako je $f(x) = \ln x$ neprekidna funkcija u bilo kojoj tački iz skupa $\mathbb{R}^+$, to je*

$$\lim_{x\to 0} \ln(1 + x) = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1 + x)\right) = \ln 1 = 0 .$$

Ako je funkcija $u = g(x)$ neprekidna u tački x_0, a funkcija $f(u)$ neprekidna u tački $\beta = g(x_0)$, jasno je da je složena funkcija $f(g(x))$ neprekidna u tački x_0.

1.4.2 Neprekidnost na intervalu

Funkcija je **neprekidna na intervalu** (otvorenom ili zatvorenom) ako je neprekidna u svakoj tački posmatranog intervala.

Posmatrajmo funkciju $f(x)$, koja je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ i koja na krajevima tog intervala uzima vrednosti različitog znaka, tj. za koju je $f(a) \cdot f(b) < 0$. Podelimo interval $[a, b]$ na dva dela tačkom $c = \frac{a+b}{2}$. Moguća su dva slučaja:

a) $f(c) = 0$ i

b) $f(c) \neq 0$. U ovom slučaju jedan od dobijenih podintervala $[a, c]$ ili $[c, b]$ je takav da funkcija $f(x)$ na njegovim krajevima uzima vrednosti različitog znaka. Označimo taj interval sa $[a_1, b_1]$ i ponovimo opisan postupak polovljenja.

Ako, stalno ponavljajući opisan postupak, ni u jednoj deobenoj tački vrednost funkcije $f(x)$ ne bude jednaka nuli, onda smo dobili niz sužavajućih intervala jer je

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots,$$
$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

Poznato je da postoji samo jedna tačka ξ koja pripada svim ovim intervalima i za nju važi

$$\xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Kako je $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$ za svako $n \in \mathbb{N}$, to je $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \cdot f(b_n) \leq 0$. Pošto je $f(x)$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$, tj. u svakoj tački ovog intervala, onda je

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\cdot f\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right) = f^2(\xi).$$

Dakle, $f^2(\xi) \leq 0$. Međutim, kako kvadrat bilo kog broja ne može biti negativan, zaključujemo da je $f^2(\xi) = 0$, tj. $f(\xi) = 0$.

Broj ξ, za koji je $f(\xi) = 0$ zove se **nula funkcije** $f(x)$.

Dakle, pokazali smo da svaka funkcija koja je neprekidna na nekom zatvorenom intervalu i na njegovim krajevima uzima vrednosti različitog znaka, unutar tog intervala ima bar jednu nulu.

Takođe se može pokazati da funkcija $f(x)$ neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$ bar jednom, na tom intervalu dostiže svoju najveću i najmanju vrednost. Samim tim, ova funkcija je i ograničena, tj. postoje realni brojevi m i M, takvi da

$$\forall x \in [a, b] , \quad m \leq f(x) \leq M .$$

Iz neprekidnosti funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ sledi da

$$\forall \mu, \quad m \leq \mu \leq M, \quad \exists \xi \in [a, b], \quad f(\xi) = \mu.$$