VEŽBE IZ MATEMATIKE

Novi Sad,
2020.

1. Granična vrednost i neprekidnost funkcije

- Tačka x_0 je **tačka nagomilavanja** skupa $D \subseteq \mathbf{R}$, ako za svako $\varepsilon > 0$ interval $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ sadrži bar jedan elemenat iz skupa D, koji je različit od x_0.
  Drugim rečima, x_0 je tačka nagomilavanja skupa D, ako za svako $\varepsilon > 0$ skup $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$ ima beskonačno mnogo elemenata.

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena D funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Kažemo da je broj A **granična vrednost** funkcije f u tački x_0 ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε), tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $0 < |x - x_0| < \delta$, važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

- Kažemo da je broj A **desna granična vrednost** funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ u tački x_0 ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa $D \cap (x_0, +\infty)$ i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε), tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

- Kažemo da je broj A **leva granična vrednost** funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ u tački x_0 ako je x_0 tačka nagomilavanja skupa $D \cap (-\infty, x_0)$ i ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε), tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, važi $|f(x) - A| < \varepsilon$. U tom slučaju pišemo

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A.$$

- Neka postoji realan broj a takav da domen funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ sadrži interval $(a, +\infty)$. Broj A je **granična vrednost funkcije** f **u plus beskonačnosti** ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $M > a$ (M zavisi od ε), tako da za $x > M$ važi $|f(x) - A| < \varepsilon$.
  U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.
  Analogno se definiše: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja domena funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Ako za svako $K > 0$, postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od K), tako da za svako $x \in D$ sa osobinom $0 < |x - x_0| < \delta$, važi $f(x) > K$, onda kažemo da f **teži ka plus beskonačnosti kada** $x \to x_0$.
  U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
  Analogno se definiše: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

- Neka postoji realan broj a takav da domen funkcije $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ sadrži interval $(a, +\infty)$. Ako za svako $K > 0$, postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od K), tako da za svako $x > a$ važi $f(x) > K$, onda kažemo da f **teži ka plus**

beskonačnosti u plus beskonačnosti.
U tom slučaju pišemo: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

(Analogno se definišu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

- Neka je x_0 tačka nagomilavanja zajedničkog domena $D \subseteq \mathbf{R}$ funkcija $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ i $g : D \longrightarrow \mathbf{R}$. Pretpostavimo da postoje $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ i $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B$. Tada važe jednakosti:

  1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$,
  2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$,
  3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$, ako je $B \neq 0$ i za svako $x \in D$ je $g(x) \neq 0$.

  Jednakosti važe i ako se x_0 zameni sa ∞ ili $-\infty$.

- Navodimo neke granične vrednosti koje se često koriste:

  1. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$;
  2. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$;
  3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$;
  4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$;
  5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$;
  6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1$;
  7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1 + x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

- Za funkciju $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$, $D \subseteq \mathbf{R}$, kažemo da je **neprekidna u tački** $x_0 \in D$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (δ zavisi od ε) tako da za svako $x \in D$ koje zadovoljava uslov $|x - x_0| < \delta$ važi $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

- Ako je $x_0 \in D$ tačka nagomilavanja skupa D, onda je $f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ neprekidna u x_0 ako i samo ako je $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

- Ako u tački $x_0 \in D$ funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ nije neprekidna, onda kažemo da ona u toj tački ima **prekid.** Razlikujemo tri vrste prekida:

  Ako $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ postoji (kao konačan broj) i ako je

  $$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

  onda je to **otklonjiv (prividan) prekid.** (Neki autori pod prividnim prekidom podrazumevaju i tačke nagomilavanja domena funkcije f u kojima funkcija nije definisana ali ima graničnu vrednost.)

  Ako postoje leva i desna granična vrednost funkcije f u tački x_0 i nisu jednake, onda se kaže da funkcija f ima **skok ili prekid prve vrste** u tački x_0.

  Ako bar jedna od graničnih vrednosti

  $$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \quad \text{ili} \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

  ne postoji (kao konačan broj), onda je to **prekid druge vrste**.

- Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbf{R}$ neprekidna na skupu $D_1 \subseteq D$, ako je neprekidna u svakoj tački skupa D_1.

- Ako su funkcije f i g neprekidne u tački x_0, onda su u toj tački neprekidne i sledeće funkcije:

  $$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \text{ (ako je } g(x_0) \neq 0).$$

  Ako je funkcija g neprekidna u tački x_0 i funkcija f neprekidna u tački $g(x_0)$, onda je funkcija $f \circ g$ neprekidna u tački x_0.

- Osnovne elementarne funkcije su neprekidne na celom definicionom skupu.

- Ako funkcija $g : D \to D_1, D_1 \subseteq \mathbf{R}$ ima graničnu vrednost A u tački x_0 i funkcija $f : D_1 \to \mathbf{R}$ je neprekidna u tački A, onda je

  $$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \to x_0} g(x)) = f(A).$$

  Ako je $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \infty$ ($\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$) i $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = B$($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = B$), onda je

  $$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = B.$$

Zadaci:

Zadatak 1.1. Odrediti graničnu vrednost:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-x+1}$;

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^x$;

d) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x$.

Rešenje.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2+2x-1}{2x^2-x+1} = \dfrac{3\cdot 0+2\cdot 0-1}{2\cdot 0-0+1} = -1.$

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{2}{\pi}.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} 2^x = 2^0 = 1.$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \arccos x = \arccos 0 = \dfrac{\pi}{2}.$

Zadatak 1.2. Odrediti graničnu vrednost:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3+3x^2+2x+3}{5x^4+2x^2+x+3}$;

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^4+2x^2+x+5}{5x^3+x^2+x+3}$;

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

Rešenje. Ovo su neodređeni izrazi oblika „$\frac{\infty}{\infty}$"i potrebno ih je na neki način transformisati.

a) $$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{5x^3+3x^2+2x+3}{5x^4+2x^2+x+3} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{x^3(5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3})}{x^4(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4})}$$
$$= \lim\limits_{x\to \infty} \frac{5+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}{x(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{3}{x^4})} = 0.$$

b) $$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4})}{x^3(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3})} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x(5+\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{5}{x^4})}{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x^3}} = -\infty.$$

c) $$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} = \lim\limits_{x\to \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}} = 1.$$

Zadatak 1.3. Odrediti graničnu vrednost:

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-4x}{x^2-x-12}$;

b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{3x^2-13x-10}{4x^2-14x-30}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-2x^3-8x+16}$.

Rešenje. Ovo su neodređeni izrazi oblika „$\frac{0}{0}$” kod kojih je potrebno faktorisati izraze u brojiocu i imeniocu.

a) $$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-x-12} = \lim_{x\to 4} \frac{x(x-4)}{(x-4)(x+3)} = \lim_{x\to 4} \frac{x}{x+3} = \frac{4}{7}.$$

b) $$\lim_{x\to 5} \frac{3x^2-13x-10}{4x^2-14x-30} = \lim_{x\to 5} \frac{(x-5)(3x+2)}{2(x-5)(2x+3)} = \lim_{x\to 5} \frac{3x+2}{2(2x+3)} = \frac{17}{26}.$$

c) $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-2x^3-8x+16} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2-4)}{(x-2)(x^3-8)} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8}$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2+2x+4} = \frac{1}{3}.$$

Zadatak 1.4. Odrediti graničnu vrednost:

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+6}-x}{x-3}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}$.

Rešenje. Ove granične vrednosti sadrže izraze koje treba racionalisati.

a) $$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+6}-x}{x-3} \cdot \frac{\sqrt{x+6}+x}{\sqrt{x+6}+x}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{x+6-x^2}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)} = \lim_{x\to 3} \frac{-(x-3)(x+2)}{(x-3)(\sqrt{x+6}+x)}$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{-(x+2)}{\sqrt{x+6}+x} = \frac{-5}{\sqrt{3+6}+3} = -\frac{5}{6}.$$

b) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} \cdot \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1} \cdot \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x-1)(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1)}{(1+x-1)(\sqrt{1+x}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1+1+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6}$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-5x+6} - \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x^2+5-9}{(x-2)(x-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} -$$

$$- \lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2+15-27}{(x-2)(x-3)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)(\sqrt{x^2+5}+3)} -$$

$$- \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{(x-2)(x-3)(\sqrt[3]{(x^3+x^2+15)^2}+3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9)} = -\frac{2}{27}.$$

Zadatak 1.5. Odrediti graničnu vrednost:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx}{\sin ax}$, $a \neq 0$, $a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$, $a \in \mathbf{R}$.

Rešenje.U ovim zadacima ćemo koristiti graničnu vrednost (4).

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 3 \cdot \dfrac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{bx}{\sin ax} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{\sin ax}{bx}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\frac{a}{b} \cdot \frac{\sin ax}{ax}} = \dfrac{b}{a} \cdot \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax}} = \dfrac{b}{a}.$

c) Koristićemo poznatu vezu $1-\cos x = 2 \cdot \sin^2 \frac{x}{2}$, pa dobijamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cdot \sin^2 \frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2 \cdot 4} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{2\cdot \cos(\frac{x+a}{2}) \cdot \sin(\frac{x-a}{2})}{x-a}$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\cos(\frac{x+a}{2}) \cdot \sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{(x-a)}{2}} = \cos(\frac{2a}{2}) \cdot \lim_{x\to a} \frac{\sin(\frac{x-a}{2})}{\frac{x-a}{2}} = \cos a.$$

Zadatak 1.6. Odrediti graničnu vrednost:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{3x^2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(\dfrac{x^2+5}{x^2-2}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}$.

Rešenje. Ove granične vrednosti su oblika „1^∞". Izračunaćemo ih primenom poznatih graničnih vrednosti (1) i (2).

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{4x}\cdot\frac{3}{x}\cdot 4x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{12x}{x}} = e^{12}$.

b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x^2+x-1}{x-1}\right)^{\frac{2x+1}{3x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{3x^2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{3x^2}\cdot\frac{2x+1}{x-1}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{x-1}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x+1}{x-1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

c) $$\lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{x^2+5}{x^2-2}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}} = \lim_{x\to \pm\infty}\left(\frac{x^2-2+7}{x^2-2}\right)^{\frac{2x^2}{x+1}}$$
$$= \lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{7}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{7}\cdot\frac{2x^2}{x+1}\cdot\frac{7}{x^2-2}} = e^{\lim\limits_{x\to \pm\infty}\frac{14x^2}{(x+1)(x^2-2)}}$$
$$= 1.$$

d) $$\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\left(\frac{x+3+2x^2-6-x}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}$$
$$= \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2x^2-x-6}\cdot\frac{x}{x^2-4}\cdot\frac{2x^2-x-6}{x+3}}$$
$$= e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x+3}\cdot\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x+2)}} = e^{\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}} = e^{\frac{7}{10}}.$$

Zadatak 1.7. Odrediti graničnu vrednost: $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

Rešenje.

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln(\frac{x}{e})}{x-e} = \lim_{x\to e}\ln(\frac{x}{e})^{\frac{1}{x-e}}$$
$$= \ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x}{e}-1\right)^{\frac{1}{x-e}} = \ln\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\frac{e}{x-e}\cdot\frac{1}{x-e}\cdot\frac{x-e}{e}}$$
$$= \ln e^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}.$$

Zadatak 1.8. Odrediti graničnu vrednost:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$.

Rešenje.

a) Koristimo smenu $a^x - 1 = t,\ x = \frac{\ln(t+1)}{\ln a}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln a}} = \ln a \cdot \lim_{t\to 0} \frac{t}{\ln(t+1)} = \ln a \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(t+1)}{t}}$$

$$= \ln a \cdot \lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}} = \ln a \cdot \frac{1}{\ln e} = \ln a.$$

b) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (1 + \sin x - 1)^{\frac{1}{\sin x - 1} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot (\sin x - 1)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{1+\sin x}} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Zadatak 1.9. Odrediti graničnu vrednost:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \sqrt{x})$;

b) $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x-4}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}}$;

d) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x-4}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}}$;

f) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{1-x}}{1-x^2}$.

Rešenje.

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + \sqrt{x}) = 1$.

b) Ovo je granična vrednost oblika „$\frac{1}{0^+}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 4^+} \dfrac{1}{x-4} = +\infty$.

c) Ovo je granična vrednost oblika „$3^{+\infty}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

d) Ovo je granična vrednost oblika „$\frac{1}{0^-}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{1}{x-4} = -\infty$.

e) Ovo je granična vrednost oblika „$3^{-\infty}$”, dakle $\lim\limits_{x\to 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = 0$.

f) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{1-x^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{1-x}}{(\sqrt{(1-x)(1+x)})^2} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x}} = +\infty.$

Zadatak 1.10. Odrediti graničnu vrednost: $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$.

Rešenje. Posmatrajmo levi i desni limes u tački $x = 2$:

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x}{x-2} = -\infty, \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x}{x-2} = +\infty.$$

Kako leva i desna granična vrednost u tački $x = 2$ imaju različitu vrednost, sledi da $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x}{x-2}$ ne postoji.

Zadatak 1.11. Ispitati neprekidnost funkcija :

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & , \ x \neq 2 \\ 4 & , \ x = 2 \end{cases}$ u tački $x = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & , \ x \leq 3 \\ (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} & , \ x > 3 \end{cases}$ u tački $x = 3$.

Rešenje

a) Funkcija je definisana u $x = 2$ i kako je

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4 = f(2),$$

sledi da je ona neprekidna u tački $x = 2$.

b) Iz

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = \lim_{x\to 3^+} (1+x-3)^{\frac{1}{(x-3)^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3}} = +\infty,$$

sledi da desna granična vrednost funkcije u tački $x = 3$ ne postoji kao konačna, tako da u tački $x = 3$ funkcija f ima prekid druge vrste. Samim tim ne moramo ni proveravati levu, ali da je desna bila neki konačan realan broj, računali bismo i levu i proveravali da li su jednake vrednosti.

Zadaci za samostalni rad

Zadatak 1.12. Odrediti graničnu vrednost: $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Zadatak 1.13. Odrediti graničnu vrednost: $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Zadatak 1.14. Odrediti graničnu vrednost: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

Zadatak 1.15. Odrediti graničnu vrednost: $\displaystyle\lim_{x\to 3} (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}$.