VEŽBE IZ MATEMATIKE

Novi Sad,
2020.

1. Izvod funkcije

Neka je funkcija f definisana na intervalu (a,b) i neka je x tačka iz intervala (a,b). Ako postoji granična vrednost

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x},$$

tada se ova granična vrednost naziva **prvi izvod** funkcije f **u tački** x i obeležava se sa $f'(x)$ ili $f'_x(x)$.
Desni i **levi izvod** funkcije f u tački x su definisani sa

$$\lim_{\triangle x\to 0^+}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x} \quad \text{i} \quad \lim_{\triangle x\to 0^-}\frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x},$$

ako date granične vrednosti postoje i obeležavaju se sa $f'_+(x)$ i $f'_-(x)$ respektivno.

Tablica prvih izvoda elementarnih funkcija

$$\begin{aligned}
(c)' &= 0\\
(x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1}, \ \ 1.\ x>0,\ \alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\
&\qquad\qquad\quad 2.\ x<0,\ \alpha=\frac{p}{q},\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ q \text{ neparno}\\
&\qquad\qquad\quad 3.\ x=0,\ \alpha=\frac{p}{q}\geq 1,\ p\in\mathbb{Z},\ q\in\mathbb{N},\ q \text{ neparno}\\
(\log_a x)' &= \frac{1}{x\ln a},\ \ a>0,\ a\neq 1,\ x>0\\
(\ln x)' &= \frac{1}{x},\ x>0\\
(a^x)' &= a^x\ln a,\ \ a>0\\
(e^x)' &= e^x,\ \ x\in\mathbb{R}\\
(\sin x)' &= \cos x,\ \ x\in\mathbb{R}\\
(\cos x)' &= -\sin x,\ \ x\in\mathbb{R}\\
(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{(2k+1)\frac{\pi}{2}|\ k\in\mathbb{Z}\}\\
(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x},\ x\in\mathbb{R}\setminus\{k\pi|\ k\in\mathbb{Z}\}\\
(\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1\\
(\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ |x|<1\\
(\operatorname{arctg} x)' &= \frac{1}{1+x^2},\ \ x\in\mathbb{R}\\
(\operatorname{arcctg} x)' &= -\frac{1}{1+x^2},\ \ x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

1.1. Osnovna pravila diferenciranja

Neka funkcije f i g imaju prve izvode u tački x iz intervala (a,b). Tada je:

$$\begin{aligned}
\big(c\cdot f(x)\big)' &= c\cdot f'(x), \qquad c\in\mathbb{R}\\
\big(f(x)\pm g(x)\big)' &= f'(x)\pm g'(x)\\
\big(f(x)\cdot g(x)\big)' &= f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)\\
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}, \qquad g(x)\neq 0.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.1. Naći prvi izvod funkcije

a) $y=\dfrac{1}{x}$ **b)** $y=\sqrt{x}$

c) $y=\dfrac{x}{x+1}$ **d)** $y=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

e) $y=e^x\sin x$ **f)** $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$

g) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$ **h)** $y=\dfrac{x\sin x}{\operatorname{tg} x}$

za sve vrednosti x iz domena funkcije y.

Rešenje. Tražene izvode odredićemo koristeći tablicu izvoda elementarnih funkcija i pravila za izvod zbira, proizvoda i količnika.

a) $y'=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-x^{-2}=-\dfrac{1}{x^2}.$

b) $y'=(x^{\frac{1}{2}})'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\ x\neq 0.$

c) $y'=\dfrac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-x}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}.$

d) $$\begin{aligned}
y' &= \frac{(1+\sqrt{x})'(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})'}{(1-\sqrt{x})^2}=\\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})-(1+\sqrt{x})\frac{-1}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2}=\\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2}}{(1-\sqrt{x})^2}=\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2},\ x\neq 0.
\end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned}
y' &= (e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x=\\
&= e^x(\sin x+\cos x).
\end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned}
y' &= \frac{(\ln x)'x^2-\ln x(x^2)'}{x^4}=\frac{\frac{1}{x}x^2-2x\ln x}{x^4}=\\
&= \frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}.
\end{aligned}$$

g) $$y' = \frac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} =$$
$$= \frac{(-\sin x)(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} =$$
$$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1}{1-\sin x} \; .$$

h) $$y' = \frac{(x\sin x)' \operatorname{tg} x - x\sin x(\operatorname{tg} x)'}{\operatorname{tg}^2 x}$$
$$= \frac{(x'\sin x + x(\sin x)')\operatorname{tg} x - x\sin x \dfrac{1}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x}$$
$$= \frac{(\sin x + x\cos x)\operatorname{tg} x - \dfrac{x}{\cos x}\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x} \; .$$
$$= \frac{(\sin x + x\cos x) - \dfrac{x}{\cos x}}{\operatorname{tg} x} \; .$$

1.2. Izvod složene funkcije

Neka funkcija $g:(a,b)\to(c,d)$ ima izvod u tački $x\in(a,b)$, i neka funkcija $f:(c,d)\to\mathbb{R}$ ima izvod u tački $g(x)\in(c,d)$. Tada složena funkcija $h:(a,b)\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(g(x))$ ima izvod u tački x i važi

$$h'(x)=f'_g(g(x))\cdot g'(x).$$

Zadatak 1.2. Naći prvi izvod funkcije

a) $y=e^{-x}$. **b)** $y=\sqrt{1-x^2}$.

c) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. **d)** $y=\cos^3 x-\dfrac{1}{\cos^3 x}$.

e) $y=\sqrt{\sin 3x}+\sin x^2$. **f)** $y=\ln(\sin x)$.

g) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}$. **h)** $y=\arccos e^x$.

i) $y=\sin 2x\cdot e^{\sin x}$. **j)** $y=\ln^2 x-\ln(\ln x)$.

k) $y=3\ln\dfrac{x-1}{x+1}$. **l)** $y=3^{\frac{x}{\ln x}}$.

Rešenje. U svim navedenim primerima potrebno je naći izvod složene funkcije.

$$
\begin{aligned}
\text{a) } y' &= e^{-x}\cdot(-x)' = -e^{-x}.\\
\text{b) } y' &= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(1-x^2)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.\\
\text{c) } y' &= \frac{((x+1)^3)'(x-1)^2-(x+1)^3((x-1)^2)'}{(x-1)^4} =\\
&= \frac{3(x+1)^2(x+1)'(x-1)^2-(x+1)^3\cdot 2(x-1)(x-1)'}{(x-1)^4} =\\
&= \frac{(x+1)^2(x-1)(3(x-1)-2(x+1))}{(x-1)^4} = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.\\
\text{d) } y' &= 3\cos^2 x\cdot(\cos x)'-(-3\cos^{-4}x)\cdot(\cos x)' =\\
&= 3\cos^2 x(-\sin x)+\frac{3}{\cos^4 x}(-\sin x) =\\
&= -3\sin x\Big(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^4 x}\Big).\\
\text{e) } y' &= \frac{1}{2\sqrt{\sin 3x}}\cdot(\sin 3x)'+\cos x^2\cdot(x^2)' =\\
&= \frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}+2x\cos x^2.\\
\text{f) } y' &= \frac{1}{\sin x}\cdot(\sin x)' = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x = \operatorname{ctg} x.\\
\text{g) } y' &= \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1}{\frac{x^4+1}{x^4}}\cdot\frac{-2}{x^3} = \frac{-2x}{x^4+1}.\\
\text{h) } y' &= -\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}}(e^x)' = -\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{i)}\ y' &= (\sin 2x)' \cdot e^{\sin x} + \sin 2x \cdot (e^{\sin x})' = \\
&= \cos 2x \cdot (2x)' \cdot e^{\sin x} + \sin 2x \cdot e^{\sin x} (\sin x)' = \\
&= 2\cos 2x \cdot e^{\sin x} + \sin 2x \cdot \cos x \cdot e^{\sin x}. \\
\text{j)}\ y' &= 2\ln x \cdot (\ln x)' - \frac{1}{\ln x} \cdot (\ln x)' = \frac{2\ln x}{x} - \frac{1}{x \ln x}. \\
\text{k)}\ y' &= 3\frac{x+1}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' = 3\frac{x+1}{x-1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \\
&= 3\frac{1}{x-1} \cdot \frac{2}{x+1} = \frac{6}{x^2-1}. \\
\text{l)}\ y' &= 3^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(\frac{x}{\ln x}\right)' = 3^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 3 \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}.
\end{aligned}
$$

Zadatak 1.3. Naći drugi izvod funkcije

a) $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. **b)** $y = (x-2)e^{2x}$.

Rešenje. Drugi izvod funkcije određujemo kao prvi izvod prvog izvoda.

$$
\begin{aligned}
\text{a)}\ y' &= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\right) = \\
&= \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \\
y'' &= -\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \\
\text{b)}\ y' &= e^{2x} + (x-2)e^{2x} \cdot 2 = (2x-3)e^{2x}; \\
y'' &= 2e^{2x} + (2x-3)e^{2x} \cdot 2 = 4(x-1)e^{2x}.
\end{aligned}
$$

1.3. Izvod parametarski zadate funkcije

Ako funkcije $x = x(t)$ i $y = y(t)$ imaju izvode po t i ako je $x'(t) \neq 0$, onda je izvod parametarski zadate funkcije $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ parametarski zadata funkcija

$$
\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x(t) = \dfrac{y'_t(t)}{x'_t(t)} \end{cases}.
$$

Zadatak 1.4. Odrediti y''_x parametarski zadate funkcije

a) $x = \sin t,\ y = \cos t$.

b) $x = \ln t,\ y = t + \frac{1}{t}$.

c) $x = e^{-t},\ y = e^{2t}$.

Rešenje. Prvi izvod određujemo koristeći pravilo za diferenciranje parametarski zadate funkcije. Kako je y'_x ponovo funkcija koja zavisi od t, i drugi izvod određujemo na isti način, kao izvod prvog izvoda, zadatog parametarski.

$$\text{a)}\quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(\cos t)'}{(\sin t)'} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\operatorname{tg} t;$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(-\operatorname{tg} t)'}{(\sin t)'} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{\cos t} = -\frac{1}{\cos^3 t}.$$

$$\text{b)}\quad y'_x = \frac{\left(t+\frac{1}{t}\right)'}{(\ln t)'} = \frac{1-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2-1}{t};$$

$$y''_x = \frac{\left(\frac{t^2-1}{t}\right)'}{(\ln t)'} = \frac{\frac{2t^2-t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2+1}{t} = t+\frac{1}{t}.$$

$$\text{c)}\quad y'_x = \frac{(e^{2t})'}{(e^{-t})'} = \frac{2e^{2t}}{-e^{-t}} = -2e^{3t};$$

$$y''_x = \frac{(-2e^{3t})'}{(e^{-t})'} = \frac{-6e^{3t}}{-e^{-t}} = 6e^{4t}.$$

1.4. Izvod implicitne funkcije

Ako je funkcija $y = f(x)$ data implicitno jednačinom $F(x, y) = 0$, onda se određuje izvod funkcije F po x, gde je y funkcija koja zavisi od x. Tako se dobija izvod funkcije f u implicitnom obliku.

Zadatak 1.5. Naći prvi izvod implicitno zadate funkcije $y = y(x)$

a) $x^3 + y^3 = a^3$. **b)** $e^y = x + y$.

c) $\ln y + \frac{x}{y} = c$. **d)** $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

Rešenje. Ako je funkcija $y = y(x)$ data implicitno jednačinom $F(x, y) = 0$, prvo se odredi izvod leve i izvod desne strane po x, pri čemu se vodi računa da je y funkcija koja zavisi od x.

a)

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= a^3 \\ 3x^2 + 3y^2y' &= 0 \\ y' &= -\frac{x^2}{y^2}, \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} e^y &= x + y \\ e^y y' &= 1 + y' \\ y'(e^y - 1) &= 1 \\ y' &= \frac{1}{e^y - 1}, \quad y \neq 0. \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\ln y + \frac{x}{y} &= c \\
\frac{1}{y}y' + \frac{y - xy'}{y^2} &= 0 \\
yy' + y - xy' &= 0 \\
y'(y - x) &= -y \\
y' &= \frac{y}{x - y}, \quad y \neq x.
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\operatorname{arctg}\frac{y}{x} &= \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) \\
\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)' &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2)' \\
\frac{x^2}{x^2 + y^2}\cdot\frac{y'x - y}{x^2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2 + y^2}(2x + 2yy') \\
\frac{y'x - y}{x^2 + y^2} &= \frac{x + yy'}{x^2 + y^2} \\
y'x - y &= x + yy' \\
y'(x - y) &= x + y \\
y' &= \frac{x + y}{x - y}, \quad y \neq x.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.6. Odrediti prvi izvod funkcije

a) $y = x^x$. **b)** $y = (\cos x)^{\sin x}$. **c)** $y = \dfrac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}$.

Rešenje. Potrebno je diferencirati funkciju oblika $y = f(x)^{g(x)}$, što nije moguće uraditi primenom nijednog od navedenih pravila. Zato prvo logaritmujemo datu funkciju, a zatim tražimo izvod dobijene implicitne funkcije.

a)

$$\begin{aligned}
y &= x^x \\
\ln y &= \ln x^x = x\ln x \\
\frac{y'}{y} &= \ln x + x\cdot\frac{1}{x} \\
\frac{y'}{y} &= \ln x + 1 \\
y' &= x^x(\ln x + 1).
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
y &= (\cos x)^{\sin x}\\
\ln y &= \sin x\cdot\ln(\cos x)\\
\frac{y'}{y} &= \cos x\cdot\ln(\cos x)+\sin x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\\
\frac{y'}{y} &= \frac{1}{\cos x}(\cos^2 x\cdot\ln(\cos x)-\sin^2 x)\\
y' &= (\cos x)^{\sin x-1}(\cos^2 x\cdot\ln(\cos x)-\sin^2 x).
\end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned}
y &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\\
\ln y &= \ln(\ln x)^x-\ln x^{\ln x}\\
\ln y &= x\ln(\ln x)-\ln x\cdot\ln x\\
\frac{y'}{y} &= \ln(\ln x)+x\cdot\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}-2\cdot\frac{1}{x}\ln x\\
y' &= \frac{(\ln x)^x}{x^{\ln x}}\big(\ln(\ln x)+\frac{1}{\ln x}-\frac{2\ln x}{x}\big).
\end{aligned}$$

Jednačina tangente t na grafik funkcije f u tački $A(x_0,y_0)$ krive $y=f(x)$ je

$$t:\ y-y_0=f'(x_0)(x-x_0),$$

ukoliko je prvi izvod $f'(x_0)$ konačan. Ako $f'(x_0)$ nije konačan ($f'(x_0)=\pm\infty$), onda je tangenta prava $x=x_0$.

Jednačina normale n na grafik funkcije f u tački $A(x_0,y_0)$ krive $y=f(x)$ je

$$n: y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}\,(x-x_0)$$

ako je prvi izvod $f'(x_0)$ konačan i $f'(x_0)\neq 0$.
Ako je $f'(x_0)=0$, tada je normala prava $x=x_0$, a ako prvi izvod nije konačan ($f'(x_0)=\pm\infty$), tada je normala prava $y=y_0$.

Zadatak 1.7. Napisati jednačinu tangente i normale krive

a) $y=x^2+2x$ **u tački čija je apscisa** $x=1$.

b) $x=2\operatorname{tg}t,\ y=2\sin^2 t+\sin 2t$ **u tački** $A(2,2)$.

Rešenje. a) Ordinata date tačke je $y(1)=3$. Funkcija je data eksplicitno što znači da je $y'=2x+2$, a u datoj tački je $y'(1)=4$. Tada je jednačina tangente u tački $(1,3)$

$$t: y-3=4(x-1),\ \text{odnosno}\ t: 4x-y-1=0,$$

a jednačina normale

$$n: y-3=-\frac{1}{4}(x-1),\ \text{odnosno}\ n: x+4y-13=0.$$

b) Treba prvo odrediti vrednost parametra t u datoj tački A koristeći jednačine $x=x(t)$ ili $y=y(t)$. Znači, $2=2\operatorname{tg}t$, tj. $\operatorname{tg}t=1$, odakle je $t=\frac{\pi}{4}$. (Vrednost

$t = \frac{5\pi}{4}$ ne uzimamo u obzir jer tada nije $y = 2$.)
Na osnovu pravila za izvod funkcije zadate parametarski dobijamo

$$y' = \frac{4\sin t\cos t + 2\cos 2t}{\frac{2}{\cos^2 t}} = \cos^2 t(\sin 2t + \cos 2t)$$

U datoj tački A je $y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$. Tada jednačina tangente u tački A ima oblik

$$t : y - 2 = \frac{1}{2}(x - 2); \quad \text{tj.} \quad t : x - 2y + 2 = 0,$$

a jednačina normale

$$n : y - 2 = -2(x - 2) \quad \text{tj.} \quad n : 2x + y - 6 = 0.$$

2. Lopitalovo pravilo

Granične vrednosti mogu biti različitog neodređenog tipa

$$"\tfrac{0}{0}", "\tfrac{\infty}{\infty}", "0\cdot\infty", "\infty-\infty", "1^{\infty}", "0^{0}", "\infty^{0}".$$

U ovim slučajevima pogodno je primeniti **Lopitalovo pravilo**.

Lopitalovo pravilo (teorema). Neka su funkcije f i g neprekidne u nekoj okolini U tačke a i imaju izvod za sve x iz te okoline sem eventualno u tački a i važi $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in U \setminus \{a\}$, gde je a broj ili simbol beskonačnosti ($a = \pm\infty$).
Ako $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ (ili $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$) i postoji (konačna ili beskonačna) granična vrednost $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tada postoji i $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ i važi

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Pokažimo da se i ostali neodređeni izrazi mogu transformisati na oblike "$\frac{0}{0}$" ili "$\frac{\infty}{\infty}$", koji su pogodni za primenu Lopitalovog pravila.

1° "$0\cdot\infty$". Pri izračunavanju granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))$, gde je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = 0$ i $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$, možemo izraz $f_1(x)\cdot f_2(x)$ zapisati na sledeći način

$$f_1(x)\cdot f_2(x) = \frac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$$

i tako ga svesti na oblik "$\frac{0}{0}$".

2° "$\infty-\infty$". Pri izračunavanju $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x) - f_2(x))$, gde je $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 0} f_2(x) = \infty$, možemo postupiti na sledeći način:
Kako je

$$f_1(x) - f_2(x) = f_1(x)\left(1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right),$$

ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to 1$ kada $x \to a$, dobijamo slučaj 1°. Ako $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ ne teži ka 1 ($x \to a$), odnosno $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to \infty$ ili $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} \to c$, $c \neq 1$ ($x \to a$), onda dobijamo određene izraze "$\infty\cdot\infty$" $= \infty$ ili "$\infty\cdot(1-c)$" $= \infty$.

3° "1^{∞}", 0^{0}", ∞^{0}". Ti oblici se pomoću jednakosti

$$[f_1(x)]^{f_2(x)} = e^{f_2(x)\cdot\ln f_1(x)}$$

svode na slučaj 1°. Dakle, pri računanju izraza $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)^{f_2(x)}$ prvo računamo $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)\ln f_1(x)$.

Zadatak 2.1. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}$. **b**) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}$. **d**) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\ln x}$.

Rešenje. Ove granične vrednosti su oblika "$\frac{0}{0}$"i možemo direktno primeniti Lopitalovo pravilo.

$$\text{a) }\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\ln(e-x)+x-1}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\frac{1}{e^x}}{\frac{-1}{e-x}+1}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}+1)(e-x)}{e^x(e-x-1)}=\frac{2e}{e-1}.$$

$$\text{b) }\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-1}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)\cos^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x}{\cos^2 x}=2.$$

$$\text{c) }\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+4x^2}\cdot 2}{\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}\cdot 5}=\frac{2}{5}.$$

$$\text{d) }\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{\ln x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\cos(x-1)}{\frac{1}{x}}=1.$$

Zadatak 2.2. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$. **b**) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}})$. **d**) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-x\cdot e^{\frac{1}{x-2}})$.

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$.

Rešenje. U zadacima pod a) i b) imamo granične vrednosti oblika "$\frac{\infty}{\infty}$". Može se direktno primeniti Lopitalovo pravilo.

$$\text{a) }\lim_{x\to a}\frac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\lim_{x\to a}\cos x\cdot\lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$=\cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{1}{e^x-e^a}\cdot e^x}=\cos a\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{e^x}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{x-a}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$=\cos a\cdot\frac{1}{e^a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{e^x}{1}=\cos a.$$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\dfrac{1}{n}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}=0.$

c) Pre primene Lopitalovog pravila, neodređeni izraz oblika "$0\cdot\infty$" svodimo na oblik "$\frac{\infty}{\infty}$".

$$\lim_{x\to 0} x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{x^3}e^{\frac{1}{x^2}}}{-\frac{2}{x^3}}=\infty.$$

Granične vrednosti u zadacima pod *d*) i *e*) su oblika "$\infty-\infty$". Faktorizacijom taj oblik svodimo na "$0\cdot\infty$"a zatim na oblik "$\frac{\infty}{\infty}$", nakon čega primenjujemo Lopitalovo pravilo.

d) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-x\cdot e^{\frac{1}{x-2}})\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}x\cdot(1-e^{\frac{1}{x-2}})\overset{(\infty\cdot 0)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x-2}}}{\frac{1}{x}}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}$

$$=\lim_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x-2}}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2}{(x-2)^2}=1\cdot(-1)=-1.$$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}-1\right)\overset{(\infty\cdot 0)}{=}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}-1}{x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{\sin^2 x}\overset{(L,\frac{0}{0})}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{2\sin x\cos x}=0.$$

Zadatak 2.3. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$. **b**) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\sin x}$. **c**) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg}x)^x$.

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}(\operatorname{ctg}x)^{\frac{1}{\ln x}}$. **e**) $\lim\limits_{x\to 1}x^{\frac{1}{x-1}}$. **f**) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg}x}$.

Rešenje.

a) Granična vrednost je oblika "0^0".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x=A$. Tada je

$$\ln A=\ln\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}x\ln x\overset{(0\cdot\infty)}{=}\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Na osnovu toga je

$$\ln A=0\ \Rightarrow\ A=e^0=1.$$

b) Granična vrednost je oblika "0^0".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x \overset{(0\cdot\infty)}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{\sin^2 x}\cdot \cos x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin^2 x}{x\cdot \cos x} =$$
$$= -\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg} x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 0\cdot 1 = 0.$$

Na osnovu toga je A,

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

c) Granična vrednost je oblika "∞^0".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^x = A$. Tada imamo

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^x = \lim_{x\to 0^+} x \ln \operatorname{ctg} x \overset{(0\cdot\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\sin x\cdot \cos x} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\cos x} = 0.$$

Prema tome je

$$\ln A = 0 \;\Rightarrow\; A = e^0 = 1.$$

d) Granična vrednost je oblika "∞^0".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = A$. Tada imamo

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln \operatorname{ctg} x}{\ln x} \overset{(L,\frac{\infty}{\infty})}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot \frac{-1}{\sin^2 x}}{\frac{1}{x}} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin x\cdot \cos x} = -1.$$

Na osnovu toga je

$$\ln A = -1 \;\Rightarrow\; A = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

e) Granična vrednost je oblika "1^∞".

Neka je $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1.$$

Prema tome je

$$\ln A = 1 \;\Rightarrow\; A = e.$$

f) Granična vrednost je oblika "1^∞".

Neka je $\lim\limits_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg} x} = A$. Tada je

$$\ln A = \ln \lim_{x\to 0}(3x+1)^{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x \ln(3x+1)) \overset{(\infty\cdot 0)}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(3x+1)}{\operatorname{tg} x} \overset{(L,\frac{0}{0})}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{3x+1}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 3.$$

Prema tome je

$$\ln A = 3 \Rightarrow A = e^3.$$

2.1. Primena izvoda

Zadatak 2.4. Za funkciju $f(x) = e^x$ napisati Maklorenog polinom stepena n.

Rešenje: Da bismo napisali Maklorenov polinom potrebni su nam izvodi funkcije $f(x)$.

$f'(x) = e^x$, i za svako $n \in \mathbb{N}$ $f^{(n)}(x) = e^x$.
$M_n(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$
Računamo vrednost izvoda u tački $x = 0$, u našem slučaju su svi izvodi isti i jednaki $f(x)$. Dakle, $f(0) = e^0 = 1$.
Maklorenov polinom za funkciju e^x je

$M_n(x) = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + ... + \dfrac{1}{n!}x^n$, odnosno funkciju e^x zapisujemo kao
$e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2!}x^2 + ... + \dfrac{1}{n!}x^n + R_n$.

Zadatak 2.5. Aproksimirati funkciju $f(x) = \sin(2+x)$ Maklorenovim polinomom četvrtog stepena.

Rešenje: Računamo izvode do četvrog reda funkcije $f(x)$.
$f'(x) = \cos(2+x)$, $f''(2+x) = -\sin(2+x)$, $f'''(x) = -\cos(2+x)$ i $f^{IV}(x) = \sin(2+x)$

$$M_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{IV}(0)}{4!}x^4$$

Za Maklorenov razvoj potrebne su nam vrednosti izvoda u tački $x = 0$, važi:
$f(0) = \sin 2, f'(0) = \cos 2$, $f''(0) = -\sin 2$, $f'''(0) = -\cos 2$ i $f^{IV}(0) = \sin 2$ Dolazimo do Maklorenovog polinoma funkcije četvrtog stepena funkcije $\sin(2+x)$

$$\sin(2+x) \approx \sin 2 + \cos 2 \cdot x + \frac{-\sin 2}{2!}x^2 + \frac{-\cos 2}{3!}x^3 + \frac{\sin 2}{4!}x^4.$$

Zadatak 2.6. Aproksimirati funkciju $f(x) = \ln(2+x)$ Maklorenovim polinomom četvrtog stepena i koristeći dobijeni razvoj odrediti približno $\ln(2,02)$.

Rešenje: Opet imamo primer Maklorenovog polinoma četvrtog stepena, kao u prethodnom zadatku. Računamo izvode funkcije $f(x)$ i njihove vrednosti u tačk $x = 0$.

$f(0) = \ln 2$

$f'(x) = \dfrac{1}{2+x}$ tj. $f'(0) = \dfrac{1}{2}$

$f''(x) = \dfrac{-1}{(2+x)^2}$ tj. $f''(0) = \dfrac{-1}{4}$

$f'''(x) = \dfrac{2}{(2+x)^3}$ tj. $f'''(0) = \dfrac{2}{8}$

$f^{IV}(x) = \dfrac{-3}{(2+x)^4}$ tj. $f'(0) = \dfrac{-3}{16}$

Maklorenov polinom funkcije $\ln(2+x)$ je:

$$\ln(2+x) \approx \ln 2 + \frac{1}{2 \cdot 1!}x + \frac{-1}{4 \cdot 2}x^2 + \frac{2}{8 \cdot 3!}x^3 + \frac{-3}{16 \cdot 4!}x^4$$

Još trebamo približno izračunati vrednost $\ln(2.02)$. Kako važi da je $2+x = 2.02$ sledi da je $x = 0.02$.

$\ln(2.02) \approx \ln 2 + \frac{1}{2} \cdot 0.02 - \frac{1}{8}(0.02)^2 + \frac{1}{24}(0.02)^3 - \frac{3}{16 \cdot 4!}(0.02)^4$

Zadatak 2.7. Aproksimirati funkciju $f(x) = \sqrt{1+2x}$ Maklorenovim polinomom trećeg stepena i zatim približno odrediti vrednost $\sqrt{1.2}$.

Rešenje: Odredićemo izvode i vrednost izvoda u $x = 0$.

$f(0) = 1$

$f'(x) = \dfrac{2}{2\sqrt{1+2x}} \rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = \dfrac{-2}{2\sqrt{(1+2x)^3}} \rightarrow f''(0) = -1$

$f'''(x) = \dfrac{3 \cdot 2}{2\sqrt{(1+2x)^5}} \rightarrow f'''(0) = 3$

Maklorenov polinom trećeg stepena funkcije $f(x) = \sqrt{1+x}$ je
$M_3 = 1 + x + \dfrac{-1}{2}x^2 + \dfrac{3}{3!}x^3.$

Uz pomoć Maklorenovog polinoma izračunajmo približnu vrednost $\sqrt{1.2}$. Kako treba da važi $1 + 2x = 1.1$ sledi da je $x = 0.05$

$\sqrt{1.2} \approx 1 + 0.05 - \dfrac{1}{2}0.05^2 + \dfrac{1}{2}0.05^3 = 1.05 - \dfrac{0.0025}{2} + \dfrac{0.000125}{2}$

3. Zadaci za samostalni rad

Zadatak 3.1.

Naći prvi izvod funkcije
a) $y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\sqrt{x}$. b) $y = \frac{x^5}{e^x}$. c) $y = \frac{x^2+1}{x^2+4}$.

Zadatak 3.2.

Naći prvi izvod funkcije
a) $y = \frac{(2x-3)^2}{(x+5)^2}$. b) $y = \ln(\operatorname{ctg} x + \frac{1}{\sin x})$. c) $y = \sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

Zadatak 3.3.

Odrediti y''_x parametarski zadate funkcije
a) $y = \left(\frac{t}{t+1}\right)^2$, $x = \frac{1}{t+1}$. b) $y = b\sin^3 t$, $x = a\cos^3 t$.

Zadatak 3.4. Naći prvi izvod implicitno zadate funkcije
a) $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$. b) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$.

Zadatak 3.5. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\ln(x+1)}$. *b*) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$ $(a, b > 0)$.
c) $\lim\limits_{x\to\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$. *d*) $\lim\limits_{x\to a}(\arcsin(x-a)\cdot \operatorname{ctg}(x-a))$.

Zadatak 3.6. Izračunati graničnu vrednost

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$. *b*) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$.

Zadatak 3.7. Odrediti Maklorenov polinom treég stepena funkcije $\cos\left(5x + \dfrac{\pi}{3}\right)$ i uz pomoć dobijenog pribliňo izračunati vrednost $\cos\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$.