Ispitivanje funkcija (Monotonost)

Definicija

Funkcija $f : D \to \mathbb{R},\ D \subset \mathbb{R}$ *je nad intervalom* $I \subset \mathbb{R}$

1. *monotono rastuća ako za svake dve tačke* $x_1,\ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
2. *monotono opadajuća ako za svake dve tačke* $x_1,\ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),$$
3. *monotono nerastuća ako za svake dve tačke* $x_1,\ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$
4. *monotono neopadajuća ako za svake dve tačke* $x_1,\ x_2 \in I$ *važi*
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

U svakom od navedenih slučajeva funkcija je monotona, u slučajevima 1 i 2 je strogo monotona.

Ispitivanje funkcija (Monotonost)

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod nad intervalom I.

- *Ako je $f(x)$ monotono neopadajuća funkcija nad intervalom I tada je $f'(x) \geq 0$, za $x \in I$,*
- *Ako je $f(x)$ monotono nerastuća funkcija nad intervalom I tada je $f'(x) \leq 0$, za $x \in I$.*

Teorema

Neka funkcija $f(x)$ ima prvi izvod nad intervalom I.

- *Ako je $f'(x) > 0$, za $x \in I$, funkcija $f(x)$ je monotono rastuća nad intervalom I,*
- *ako je $f'(x) < 0$, za $x \in I$, funkcija $f(x)$ je monotono opadajuća nad intervalom I.*

Ispitivanje funkcija (Ekstremne vrednosti funkcija)

Definicija

Ako je realna funkcija $f(x)$ definisana u nekoj okolini tačke $a \in \mathbb{R}$, tada kažemo da funkcija $f(x)$ u tački a ima lokalni minimum ako postoji $\delta > 0$ takvo da

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) > f(a),$$

a lokalni maksimum ako postoji $\delta > 0$ takvo da

$$x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta) \Rightarrow f(x) < f(a).$$

- tačka a je tada lokalna ekstremna vrednost i to je najmanja ili najveća vrednost funkcije u nekoj okolini tačke a.
- ako je za $x = a + \Delta x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ priraštaj funkcije $\Delta y = f(a+\Delta x) - f(a) > 0$ tada funkcija u tački a ima lokalni minimum, a ako je $\Delta y < 0$ ima lokalni maksimum

Teorema

Ako funkcija $f(x)$ ima u tački a ekstremnu vrednost i ako postoji $f'(a)$ tada je $f'(a) = 0$.

- uslov je potreban, ne i dovoljan (primer funkcije x^3)
- stacionarne tačke - tačke u kojima je $f'(x) = 0$
- funkcija može imati ekstremnu vrednost u $x = a$, a da $f'(a)$ ne postoji (primer funkcije $|x|$)
- kritične tačke

Ispitivanje funkcija (Ekstremne vrednosti funkcija)

Teorema

Ako je funkcija u tački a neprekidna i postoji $\delta > 0$ *takvo da*

$$za\ x \in (a-\delta, a)\ je\ f'(x) > 0,\ (f'(x) < 0),$$

a

$$za\ x \in (a, a+\delta)\ je\ f'(x) < 0\ (f'(x) > 0)$$

onda funkcija u tački a ima ekstremnu vrednost i to maksimum (minimum).

Teorema

Neka je $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$ *i* $f^{(n)}(a) \neq 0, n \geq 2$. *Ako je n paran broj, funkcija* $f(x)$ *ima u tački a ekstremnu vrednost i to:*

- *maksimum ako je* $f^{(n)}(a) < 0$,
- *minimum ako je* $f^{(n)}(a) > 0$.

Ako je n neparan broj funkcija $f(x)$ *nema ekstremnu vrednost u tački a.*

Definicija

Funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom I je konveksna nad I ako za proizvoljne dve tačke $x_1, x_2 \in I, x_1 \neq x_2$ za svako $x,\ x_1 < x < x_2$ važi

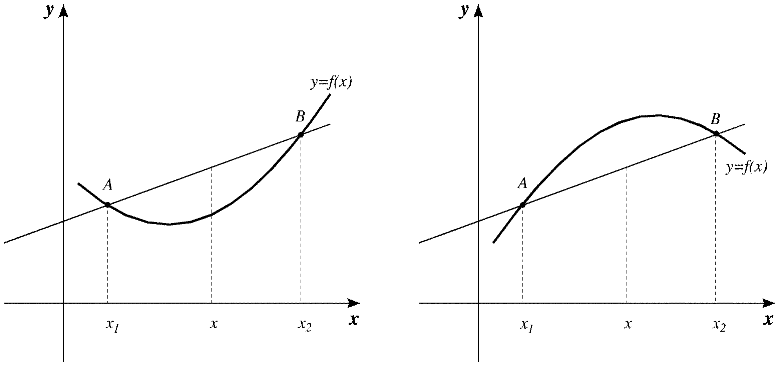
$$f(x) < f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

Ako je

$$f(x) > f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

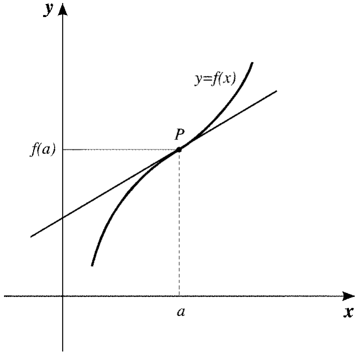
funkcija je konkavna.

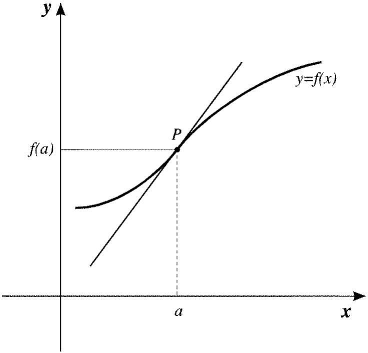
Geometrijska interpretacija: Ako postavimo sečicu kroz tačke $A(x_1, f(x_1))$ i $B(x_2, f(x_2))$, $x_1 < x_2$ grafik funkcije je uvek ispod sečice nad intervalom (x_1, x_2) u slučaju konveksnosti, odnosno iznad sečice u slučaju konkavne funkcije nad (x_1, x_2).



Definicija

Za tačku $P(a, f(a))$ se kaže da je *prevojna tačka* *funkcije $f(x)$ ako postoji okolina $(a - \delta, a + \delta)$ tačke a, takva da je funkcija $f(x)$ nad intervalom $(a - \delta, a)$ konkavna, a nad intervalom $(a, a + \delta)$ konveksna ili obrnuto.*



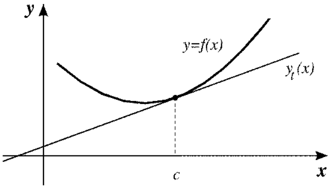


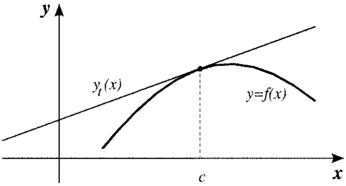
Ispitivanje funkcija (Konveksnost, konkavnost, pt)

Ako postoji izvod funkcije $f(x)$ nad intervalom I tada konveksnost i konkavnost može da se definiše na dva (ekvivalentna) načina:

Definicija 1

Funkcija $f(x)$ je konveksna nad I ako za svako $c \in I$ i $x \in I \setminus \{c\}$ $f(x) > y_t(x)$, gde je $y_t = f(c) + f'(c)(x - c)$ jednačina tangente na krivu u tački $C(c, f(c))$ (u slučaju konkavnosti je $f(x) < y_t(x.)$)





Definicija 2

Funkcija $f(x)$ je konveksna (konkavna) nad I ako je $f'(x)$ monotono rastuća (opadajuća) funkcija nad I.

Ispitivanje funkcija (Konveksnost, konkavnost, pt)

Teorema

Ako je $f''(x) > 0$ *nad intervalom* I, *tada je funkcija* $f(x)$ *konveksna nad intervalom* I.

Ako je $f''(x) < 0$ *nad intervalom* I, *tada je funkcija* $f(x)$ *konkavna nad intervalom* I.

Ako postoji $f''(x)$ *nad* I *i ako je funkcija* $f(x)$ *konveksna nad* I, *tada je* $f''(x) \geq 0$ *nad* I.

Ako postoji $f''(x)$ *nad* I *i ako je funkcija* $f(x)$ *konkavna nad* I, *tada je* $f''(x) \leq 0$ *nad* I.

Teorema

Ako je $P(a, f(a))$ prevojna tačka funkcije $f(x)$ i ako postoji $f''(a)$, tada je $f''(a) = 0$.

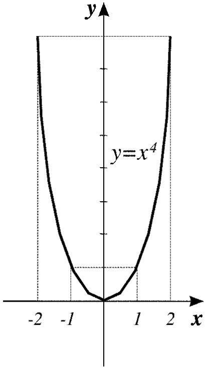
Obrnuto ne mora da važi! Funkcija $f(x) = x^4$ ima drugi izvod

$$f''(x) = 12x^2$$

za koji je

$$f''(0) = 0,$$

a tačka $O(0, 0)$ nije prevojna tačka.



Za funkciju $f(x) = (x-1)^3$ je $A(1,0)$ prevojna tačka, jer je

$$f''(x) = 6(x-1)$$

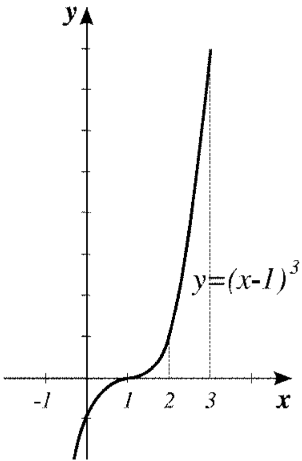
pa je

$$f''(x) > 0 \text{ za } x > 1$$

$$f''(x) < 0 \text{ za } x < 1,$$

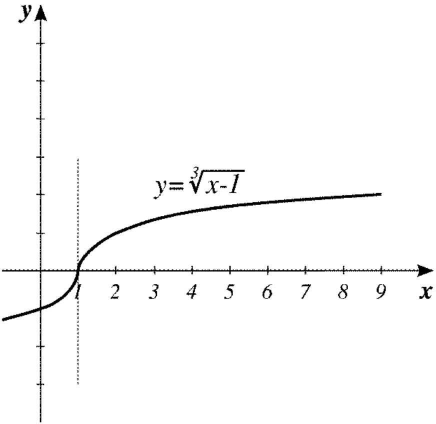
a

$$f''(1) = 0.$$



Tačka a može da bude prevojna tačka funkcije a da u tački a ne postoji drugi izvod:

Ako u tački a drugi izvod $f''(x)$ menja znak (bez obzira da li postoji $f''(a)$) i ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a, tada je $P(a, f(a))$ prevojna tačka date funkcije.
Primer je funkcija $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ za koju je $P(1,0)$ prevojna tačka, $f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$ menja znak prolazeći kroz nju, a $f''(1)$ ne postoji.



Ispitivanje funkcija (Konveksnost, konkavnost, pt)

Teorema

Ako postoji $\delta > 0$ *takvo da je u intervalu* $(a-\delta, a)$ *funkcija ispod (iznad) tangente funkcije* $f(x)$ *u tački* $A(a, f(a))$, *a u intervalu* $(a, a+\delta)$ *funkcija iznad (ispod) tangente funkcije* $f(x)$ *u tački* $A(a, f(a))$ *i ako postoji* $f''(a)$, *tada je* $f''(a) = 0$.

Teorema

Neka je $f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)}(a) \neq 0, \ n \geq 3.$

- *Ako je* n *neparan, tada je* $P(a, f(a))$ *prevojna tačka funkcije* $f(x)$.
- *Ako je* n *paran, tada je funkcija u okolini tačke* $x = a$ *konveksna za* $f^{(n)}(a) > 0$, *a konkavna za* $f^{(n)}(a) < 0$.

Ispitivanje funkcija (Asimptote funkcija)

Definicija

Neka je funkcija $f(x)$ definisana nad intervalom (a, ∞) $\big((-\infty, a) \big)$, $a \in \mathbb{R}$. Funkcija $\phi(x)$ je asimptota funkcije $f(x)$ kada $x \to \infty$, ako je

$$\lim_{x \to \infty} \big[f(x) - \phi(x)\big] = 0.$$

Slično, funkcija $\phi(x)$ je asimptota funkcije $f(x)$ kada $x \to -\infty$, ako je

$$\lim_{x \to -\infty} \big[f(x) - \phi(x)\big] = 0.$$

- $f(x)$ se asimptotski ponaša kao $\phi(x)$, kad $x \to \infty$ (tj. $x \to \infty$), što pišemo $f(x) \sim \phi(x)$
- Geometrijski smisao: postoji $b \in \mathbb{R}$ takav da je razlika ordinata krivih $y = f(x)$ i $y = \phi(x)$ proizvoljno mala za $x > b$ $(x < b)$.

Ispitivanje funkcija (Asimptote funkcija)

Ako je asimptota funkcije prava $\phi(x) = mx + n$, tada funkcija $y = f(x)$ ima

- za $m \neq 0$ ima kosu asimptotu $\phi(x) = mx + n$,
- za $m = 0$ ima horizontalnu asimptotu $\phi(x) = n$.

Po definiciji je, za $x \to \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$ ili $\lim\limits_{x\to\infty} [\frac{f(x)}{x} - m - \frac{n}{x}] = 0$, pa je

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx].$$

Definicija

Funkcija $y = f(x)$ ima vertikalnu asimptotu u tački nagomilavanja $x = a$ definicionog skupa, ako funkcija bar sa jedne strane tačke a teži ∞ odnosno $-\infty$. Za pravu $x = a$ kažemo da je vertikalna asimptota funkcije $f(x)$.

Ispitivanje toka funkcije

- Obavezna grupa zahteva
  - određivanje oblasti definisanosti
  - određivanje nula funkcije
  - određivanje intervala monotonosti i ekstremnih vrednosti
  - određivanje intervala konveksnosti, konkavnosti i prevojnih tačaka
  - određivanje asimptota funkcije i ispitivanje položaja grafika u odnosu na asimptote
  - tangente funkcije u tačkama gde ne postoji $f'(x)$ i njegovo ponašanje u tim tačkama
  - skiciranje grafika funkcije
- Neobavezna grupa zahteva
  - znak funkcije
  - parnost i neparnost funkcije
  - periodičnost funkcije