

VEŽBE IZ MATEMATIKE

Novi Sad,
2020.

1. Ispitivanje funkcija

1. **Domen:** Odrediti oblast definisanosti funkcije.
2. **Parnost:** Ispitati da li je funkcija parna, neparna ili ni parna ni neparna. Funkcija je parna ako je $f(-x) = f(x)$, funkcija je neparna ako je $f(-x) = -f(x)$.
3. **Periodičnost:** Ispitati da li postoji $T > 0$ takvo da za sve x iz domena važi da je $f(x + T) = f(x)$. Broj T nazivamo perioda. Najmanji broj T za koji važi gornja osobina naziva se osnovni period funkcije.
4. **Nule i znak funkcije:** Odrediti x iz domena za koje važi da je $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ i $f(x) < 0$.
5. **Asimptote:**

- Prava $x = x_0$ je **vertikalna asimptota** grafika funkcije ako je

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

- Prava $y = kx + n$ je **kosa asimptota** grafika funkcije ako postoje $k \in \mathbf{R}$ i $n \in \mathbf{R}$ tako da je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = n,$$

ili

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = n.$$

Specijalno za $k = 0$ dobija se prava $y = n$, koja je paralelna sa x -osom i naziva se **horizontalna asimptota**.

6. Monotonost i ekstremne vrednosti:

- (a) Uslovi monotonosti.

Neka je $D \subseteq \mathbf{R}$ i $f : D \rightarrow \mathbf{R}$ neprekidna funkcija na intervalu $[a, b]$. Ako za svako $x \in (a, b) \subseteq D$, $f'(x)$ postoji i

- $f'(x) > 0$, onda je funkcija f rastuća na (a, b) .
- $f'(x) \geq 0$, onda je funkcija f neopadajuća na (a, b) .
- $f'(x) = 0$, onda je funkcija f konstantna na (a, b) .
- $f'(x) \leq 0$, onda je funkcija f nerastuća na (a, b) .
- $f'(x) < 0$, onda je funkcija f opadajuća na (a, b) .

- (b) Neka je f definisana u nekoj okolini x_0 u kojoj dostiže ekstremnu vrednost. Tada ili $f'(x_0)$ ne postoji ili je $f'(x_0) = 0$. Tačke domena funkcije u kojima $f'(x)$ ne postoji ili $f'(x) = 0$, nazivamo **kritičnim tačkama** i one predstavljaju moguće tačke u kojima funkcija dostiže ekstremnu vrednost.

- (c) Neka je f neprekidna u x_0 . Neka je f diferencijabilna funkcija u nekoj okolini U tačke x_0 , osim eventualno u tački x_0 .

Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (-\infty, x_0)$ i $f'(x) < 0$ za

$x \in U \cap (x_0, +\infty)$, onda funkcija u tački x_0 ima **lokalni maksimum**.

Ako je $f'(x) > 0$ za $x \in U \cap (x_0, +\infty)$ i $f'(x) < 0$ za

$x \in U \cap (-\infty, x_0)$, onda funkcija u tački x_0 ima **lokalni minimum**.

Drugim rečima i ne tako precizno, ako $f'(x)$ menja znak kada x prolazi kroz x_0 , onda je to tačka u kojoj funkcija dostiže ekstremnu vrednost.

7. **Tangente:** Ispitati tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod.

8. **Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke:**

- Neka funkcija $f : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ ima drugi izvod na (a, b) . $f(x)$ je **konkavna (konveksna)** na (a, b) ako i samo ako je $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) za $x \in (a, b)$.
- Neka je f definisana u nekoj okolini U tačke x_0 i u toj tački ima konačan ili beskonačan prvi izvod i neprekidna je. Tačka $(x_0, f(x_0))$ naziva se **prevojnou tačkom** grafika funkcije f , ako je f konveksna (konkavna) na skupu $\{x \in U \mid x > x_0\}$ i konkavna (konveksna) na skupu $\{x \in U \mid x < x_0\}$.

Neka funkcija f ima prvi izvod u nekoj okolini U tačke x_0 i ima drugi izvod u $U \setminus \{x_0\}$. Ako $f''(x)$ menja znak pri prolazu argumenta kroz tačku x_0 , onda je $(x_0, f(x_0))$ prevojna tačka grafika funkcije f .

- Neka funkcija f u x_0 ima sve izvode zaključno sa n -tim ($n \geq 2$) pri čemu je

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad \text{za } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{i} \\ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

Ako je $n = 2k$ ($k \in \mathbf{N}$), onda funkcija ima ekstrem u tački x_0 i to za

$$f^{(n)}(x_0) > 0, \quad \text{lokalni minimum;} \\ f^{(n)}(x_0) < 0, \quad \text{lokalni maksimum.}$$

Ako je $n = 2k + 1$ ($k \in \mathbf{N}$) onda je x_0 prevojna tačka.

9. **Grafik:** Nacrtati grafik na osnovu ispitivanja koja su izvršena u prethodnim tačkama.

Zadatak 1.1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}.$$

Rešenje.

Domen: Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, jer deljenje sa nulom nije definisano, pa mora da važi

$$x^2 - 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 1 \wedge x \neq -1.$$

Parnost: Funkcija je neparna, jer važi

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Dakle, grafik funkcije f je simetričan u odnosu na koordinatni početak.

Nule i znak funkcije: Nula funkcije f je $x = 0$. Znak funkcije je prikazan u tablici.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x)$	—	+	—	+

Asimptote:

Kako je $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$,

i kako je $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty$,

dobijamo da su prave $x = 1$ i $x = -1$ vertikalne asimptote funkcije f .

Kako je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0,$$

sledi da je prava $y = 0$, tj. x -osa horizontalna asimptota funkcije.

Monotonost i ekstremne vrednosti: Prvi izvod funkcije je

$$f'(x) = -\frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}.$$

Vidimo da je $f'(x) < 0$ za svako $x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$, a to znači da je f opadajuća na čitavom domenu D .

konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: Drugi izvod funkcije je

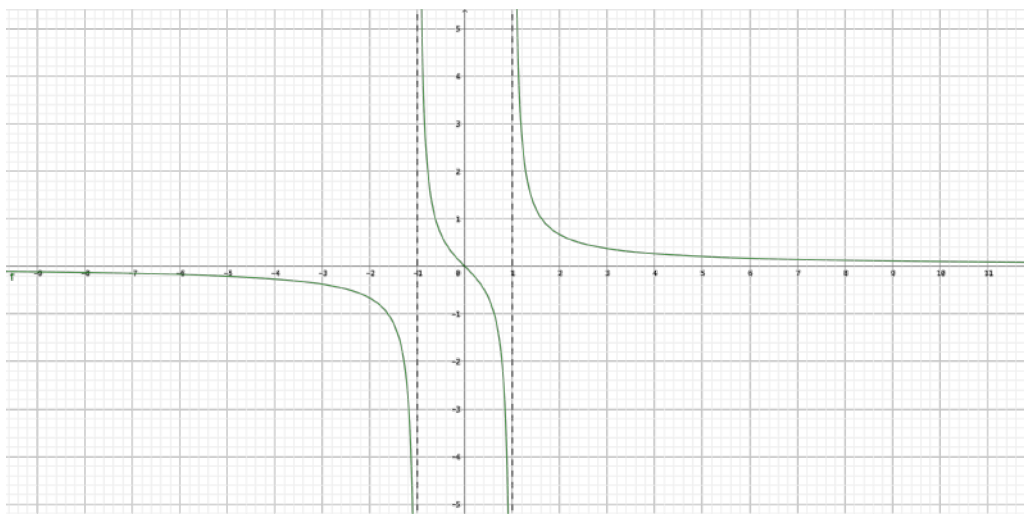
$$f''(x) = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{1, -1\}$$

$f''(x) = 0$ za $x = 0$. Tačka $A(0, 0)$ je moguća prevojna tačka. Odredimo znak drugog izvoda:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge x^2 - 1 > 0) \vee (x < 0 \wedge x^2 - 1 < 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in (1, +\infty) \vee x \in (-1, 0). \end{aligned}$$

Dakle, funkcija je konkavna ($\cap$) na skupu $(-1, 0) \cup (1, \infty)$, a konveksna ($\cup$) na skupu $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ i tačka $A(0, 0)$ je prevojna tačka grafika funkcije f .

Grafik:



Zadatak 1.2. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}.$$

Rešenje.

Domen: Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

Parnost: Funkcija f nije ni parna ni neparna.

Nule i znak funkcije: Lako se vidi da je tačka $x = 1$ jedina nula funkcije f .

Odredimo znak funkcije.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f(x)$	—	—	+

Asimptote:

Funkcija f nije definisana u tački $x = -2$ i kako

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = -\infty,$$

to je prava $x = -2$ vertikalna asimptota funkcije f .

Funkcija f nema horizontalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} = -\infty.$$

Funkcija f ima kosu asimptotu $y = x - 7$, jer je

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+2)^2} = 1 \quad \text{i} \\ n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-7x^2 - x - 1}{(x+2)^2} = -7. \end{aligned}$$

Monotonost i ekstremne vrednosti: Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2(x+8)}{(x+2)^3}, \quad x \in D.$$

Nule prvog izvoda su $x = 1$ i $x = -8$ a to su ujedno i kritične tačke.

Odredimo znak prvog izvoda, odnosno monotonost funkcije.

	$(-\infty, -8)$	$(-8, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Iz tablice se može zaključiti da u tački $x = -8$ funkcija ima lokalni maksimum, $A(-8, -\frac{81}{4})$. Tačka $x = 1$ nije ekstremna tačka.

konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: Drugi izvod funkcije f je

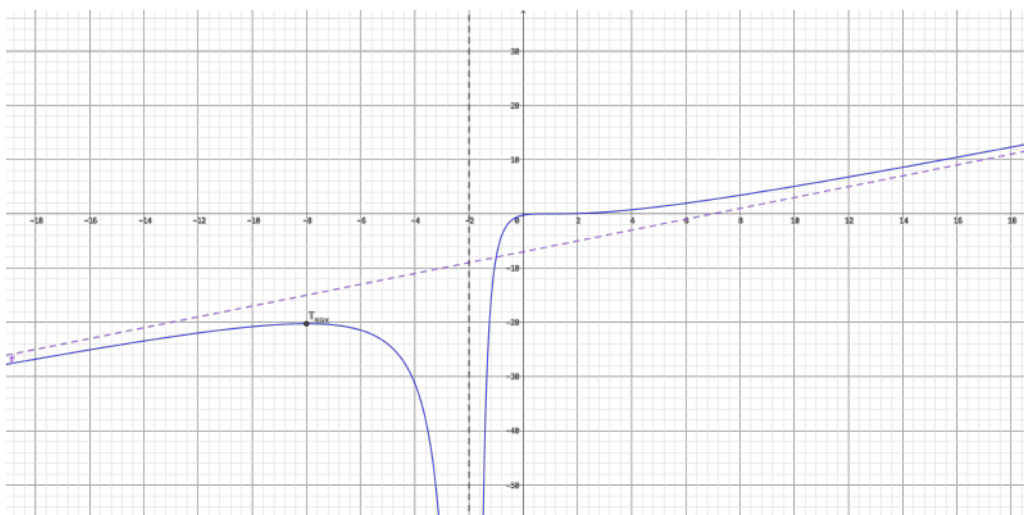
$$f''(x) = \frac{54(x-1)}{(x+2)^4}, \quad x \in D.$$

$f''(x) = 0$ za $x = 1$, to je tačka $P(1, 0)$ moguća prevojna tačka grafika funkcije f .

Odredimo znak drugog izvoda, odnosno konveksnost funkcije.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$	konveksna ($\cap$)	konveksna ($\cap$)	konkavna ($\cup$)

Sada možemo zaključiti da je tačka $P(1, 0)$ prevojna tačka grafika funkcije f .

Grafik:

Zadatak 1.3. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \sqrt{(x^2 - 9)^3}.$$

Rešenje.

Domen: Da bi kvadratni koren bio definisan, mora da važi

$$(x^2 - 9)^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow |x| \geq 3,$$

odnosno domen funkcije $D = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$.

Parnost: Funkcija je parna jer je

$$f(-x) = \sqrt{((-x)^2 - 9)^3} = \sqrt{(x^2 - 9)^3} = f(x).$$

Dakle, grafik funkcije je simetričan u odnosu na y -osu.

Nule i znak funkcije: Nule funkcije f se određuju iz $f(x) = 0$, odnosno

$$x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ili } x = -3.$$

Nule su dakle u tačkama $x = 3$ i $x = -3$.

Pošto je kvadratni koren nenegativna funkcija na domenu, nije teško videti da je funkcija f nenegativna tj. $f(x) \geq 0$ za svako $x \in D$.

Asimptote:

Funkcija nema vertikalnu asimptotu, jer je neprekidna u svim tačkama domena.

Funkcija nema kosu asimptotu, jer je

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\sqrt{(x^2 - 9)^3}}{x} = \pm\infty.$$

Funkcija nema ni kosu ni horizontalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{(x^2 - 9)^3} = +\infty.$$

Monotonost i ekstremne vrednosti: Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{3}{2}(x^2 - 9)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 - 9}, \quad x \in D.$$

Odredićemo nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x\sqrt{x^2 - 9} = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ili } x = 3 \text{ ili } x = -3).$$

Sledi da su kritične tačke $x = 3$ i $x = -3$ (nulu smo isključili, jer $0 \notin D$).

Sada ćemo odrediti znak prvog izvoda, odnosno monotonost:

	$(-\infty, -3)$	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$

Lako je zaključiti da su tačke $A(-3, 0)$ i $B(3, 0)$ lokalni minimumi date funkcije.

Tangente: Odredićemo još ugao α koji tangenta grafika funkcije f zaklapa sa pozitivnim delom x -ose u tački $x = 3$ ($x = -3$).

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(3) = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: Drugi izvod funkcije f je

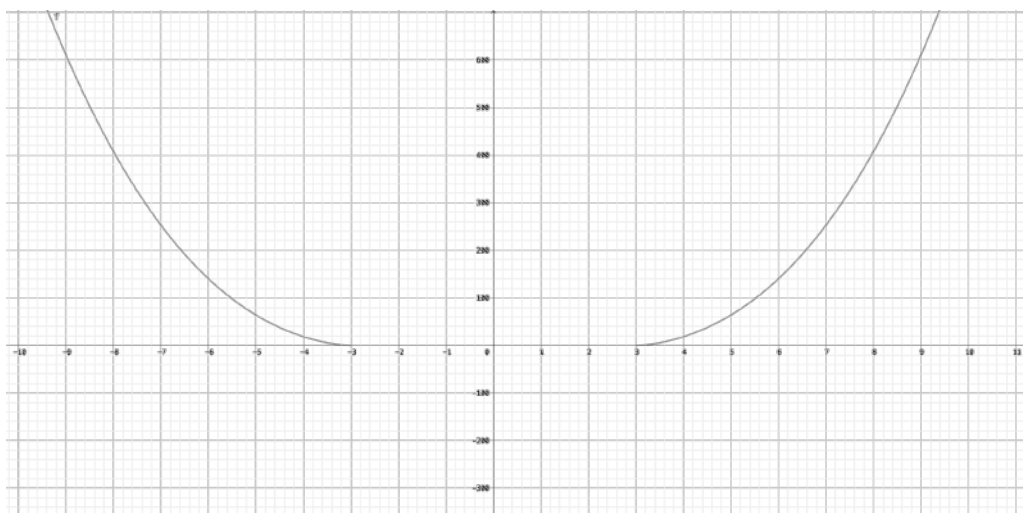
$$f''(x) = 3 \cdot \sqrt{x^2 - 9} + 3x \cdot \frac{1}{2}(x^2 - 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3\sqrt{x^2 - 9} + 3x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 9}},$$

$$f''(x) = 3 \cdot \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 9}}, \quad x \in D \setminus \{-3, 3\}.$$

Odredićemo nule drugog izvoda

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \notin D.$$

Dakle, funkcija nema prevojnih tačaka, $f''(x) > 0$ za svako $x \in D \setminus \{-3, 3\}$, odnosno $f(x)$ je konkavna ($\smile$) na skupu $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$.

Grafik:

Zadatak 1.4. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = x \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Rešenje.

Domen: Domen funkcije f je $D = \mathbf{R}$.

Parnost: Funkcija f nije ni parna ni neparna.

Nule i znak funkcije: Kako je

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \quad \vee \quad x + 1 = 0)$$

dobijamo da su $x = 0$ i $x = -1$ nule funkcije.

Znajući da je $(x+1)^2 \geq 0$ za svako $x \in D$, jasno je da je $f(x) \leq 0$ za $x \in (-\infty, 0)$ i $f(x) > 0$ za $x \in (0, +\infty)$.

Asimptote:

Funkcija je definisana i neprekidna nad skupom $\mathbf{R}$, te zbog toga nema vertikalnu asimptotu.

Funkcija f nema horizontalnu asimptotu jer je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \sqrt[3]{(x+1)^2} = \pm\infty.$$

Funkcija f nema kosu asimptotu, zato što je

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \sqrt[3]{(x+1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt[3]{(x+1)^2} = +\infty.$$

Monotonost i ekstremne vrednosti: Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{5x+3}{3\sqrt[3]{x+1}}, \quad x \in D \setminus \{-1\}.$$

Nule prvog izvoda:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 5x+3=0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{5}.$$

Kako $f'(-1)$ ne postoji, sledi da su $x = -1$ i $x = -\frac{3}{5}$ kritične tačke funkcije.

Odredimo znak prvog izvoda.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{3}{5})$	$(-\frac{3}{5}, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija ima lokalni maksimum u tački $x = -1$, $T_{min}(-1, 0)$ i lokalni minimum u tački $x = -\frac{3}{5}$, $T_{max}(-\frac{3}{5}, f(-\frac{3}{5}))$, $f(-\frac{3}{5}) \approx -0.33$.

konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{10x+12}{9\sqrt[3]{(x+1)^4}}, \quad x \in D \setminus \{-1\}.$$

Odredićemo nule drugog izvoda:

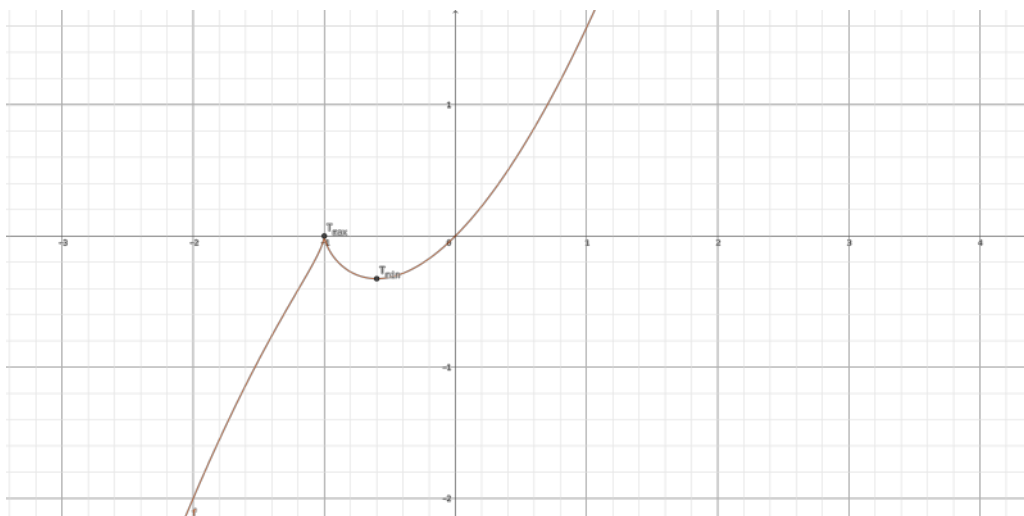
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 10x+12=0 \Leftrightarrow x = -\frac{6}{5}.$$

Moguće prevojne tačke su $x = -\frac{6}{5}$ i $x = -1$.

Znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -\frac{6}{5})$	$(-\frac{6}{5}, -1)$	$(-1, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)	konkavna ($\smile$)

Sada možemo zaključiti da je tačka $P(-\frac{6}{5}, f(-\frac{6}{5}))$ prevojna tačka grafika funkcije f , $f(-\frac{6}{5}) \approx -0.41$.

Grafik:

Zadatak 1.5. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = x e^{\frac{1}{x-2}}.$$

Rešenje.

Domen: Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$.

Parnost: f nije ni parna ni neparna.

Nule i znak funkcije: Nula funkcije f je $x = 0$. Znak funkcije zavisi samo od x i imamo da je

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$f(x)$	$-$	$+$	$+$

Asimptote:

Kako je

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} x e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty,$$

prava $x = 2$ je vertikalna asimptota funkcije f . Sa druge strane važi

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x e^{\frac{1}{x-2}} = 0$$

što znači da kad $x \rightarrow 2^-$ grafik funkcije se „približava” tački $(2, 0)$.

Kako je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{\frac{1}{x-2}} = -\infty,$$

sledi da funkcija nema horizontalnih asimptota.

Kako je

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x e^{\frac{1}{x-2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = 1 \quad \text{i} \\ n &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x-2}} - 1) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x-2}{x} = 1, \end{aligned}$$

dobijamo da je prava

$$y = x + 1$$

kosa asimptota funkcije f kada $x \rightarrow \pm\infty$.

Monotonost i ekstremne vrednosti: Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

Pošto je

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4.$$

kritične tačke funkcije f su $x = 1$ i $x = 4$. Znak prvog izvoda i monotonost funkcije je prikazana u tablici.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Dakle, f monotono raste na skupu $(-\infty, 1) \cup (4, +\infty)$, a monotono opada na skupu $(1, 2) \cup (2, 4)$.

konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{5x - 8}{(x-2)^4}, \quad x \in \mathbf{R} \setminus \{2\}.$$

$f''(x) = 0$ za $x = \frac{8}{5}$, a znak drugog izvoda je dat tablicom.

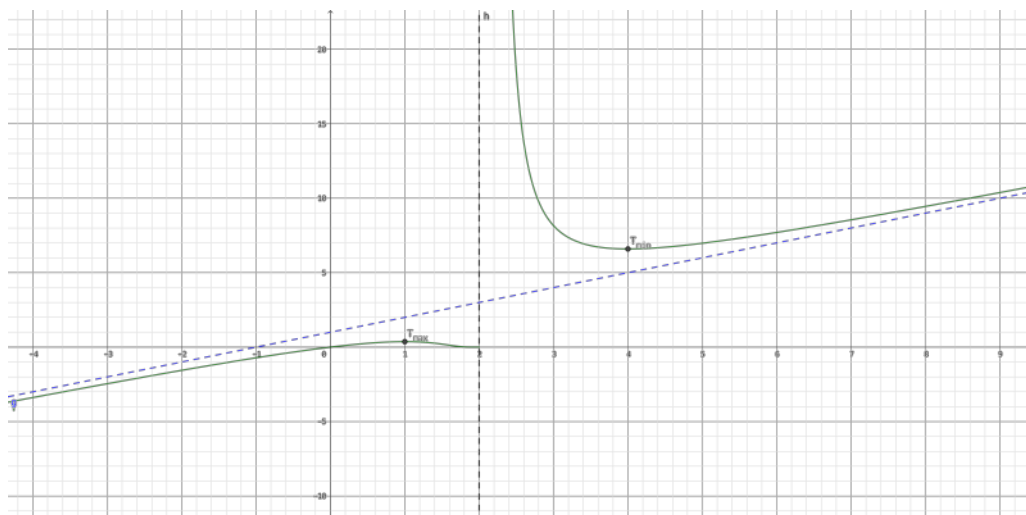
	$(-\infty, \frac{8}{5})$	$(\frac{8}{5}, 2)$	$(2, +\infty)$
$f''(x)$	-	+	+
$f(x)$	konveksna ($\frown$)	konkavna ($\smile$)	konkavna ($\smile$)

Sada možemo zaključiti da je prevojna tačka grafika funkcije f je $P(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$.

Može se ekstremna vrednost odrediti i preko drugog izvoda pa ćemo u ovom zadatku to uraditi.

$f''(1) = -\frac{3}{e} < 0$, tako da u tački $T_{max}(1, \frac{1}{e})$ funkcija ima lokalni maksimum.

$f''(4) = \frac{3}{4}\sqrt{e} > 0$, tako da u tački $T_{min}(4, 4\sqrt{e})$ funkcija ima lokalni minimum.

Grafik:

Zadatak 1.6. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = |x + 1| e^{-\frac{1}{x}}.$$

Rešenje.

Domen: Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Parnost: Funkcija f nije ni parna ni neparna. Nula funkcije je $x = 1$ jer je

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Jasno je da $f(x) > 0$ za svako $x \in D$.

Asimptote:

Funkcija f nije definisana u tački $x = 0$ i kako je

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} |x + 1| e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

to je prava $x = 0$ vertikalna asimptota funkcije f . A sa druge strane je

$$(1.1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} |x + 1| e^{-\frac{1}{x}} = 1 \cdot 0 = 0.$$

Funkcija f nema horizontalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |x + 1| e^{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{e^{\frac{1}{x}}} = +\infty$$

i

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |x + 1| e^{-\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
 k_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x}\right) = 1, \\
 k_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x-1)e^{-\frac{1}{x}}}{x} = -1, \\
 n_1 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1)e^{\frac{-1}{x}} - x\right] = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{-\frac{1}{x}} - 1) = \\
 &= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} x^{-2}}{-x^{-2}} = 1 - 1 = 0, \\
 n_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(-x-1)e^{-\frac{1}{x}} + x\right] = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x}} - 1}{-\frac{1}{x}} = \\
 &= -1 + 1 = 0,
 \end{aligned}$$

imamo dve kose asimptote

$$y_1 = x \text{ (kada } x \rightarrow +\infty) \quad \text{i} \quad y_2 = -x \text{ (kada } x \rightarrow -\infty).$$

Monotonost i ekstremne vrednosti: Pošto je

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)e^{-\frac{1}{x}}, & x > -1, x \neq 0 \\ -(x+1)e^{-\frac{1}{x}}, & x < -1 \\ 0, & x = -1 \end{cases}$$

lako se dobija prvi izvod,

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right), & x > -1, x \neq 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right), & x < -1. \end{cases}$$

Ispitajmo postojanje prvog izvoda u tački $x = -1$. Odredimo levi izvod

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} -e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right) = e$$

a zatim, desni izvod

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2}\right) = -e$$

Kao što vidimo levi i desni izvodi u tački $x = -1$ nisu jednaki, a to znači da ne postoji prvi izvod u $x = -1$.

Odredimo nule prvog izvoda.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{x+1}{x^2} = 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 0, \quad x \neq -1, \quad x \neq 0.$$

Kako je $x^2 + x + 1 \neq 0$ za svako $x \in \mathbf{R}$, sledi da prvi izvod nema nula. Jedina kritična tačka je $x = -1$.

Odredimo znak prvog izvoda:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Sada možemo zaključiti da je tačka $x = -1$ lokalni minimum funkcije f , na grafiku to je tačka $A(-1, 0)$.

Tangente: Kako važi (1.1), odredićemo još ugao α između tangente funkcije f kada $x \rightarrow 0^+$ i pozitivnog dela x -ose

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+1}{x^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.$$

konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{-x+1}{x^4} \right), & x > -1, x \neq 0 \\ -e^{-\frac{1}{x}} \left(\frac{-x+1}{x^4} \right), & x < -1 \end{cases}$$

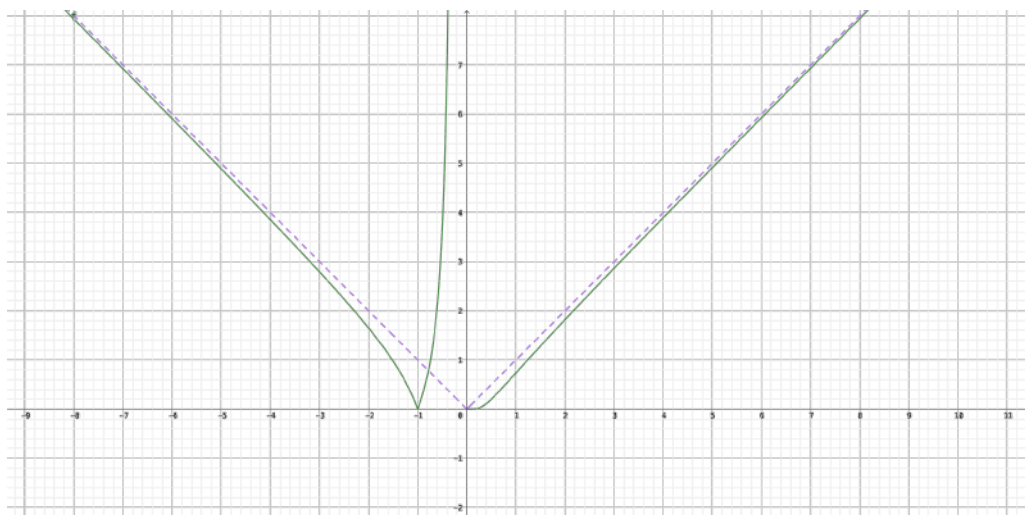
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, tako da je to, moguća prevojna tačka.

Odredimo znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$
$f(x)$	konveksna ($\cap$)	konkavna ($\cup$)	konkavna ($\cup$)	konveksna ($\cap$)

Drugi izvod menja znak prolazeći kroz tačke $x = -1$ i $x = 1$. Samo je tačka $x = 1$ prevojna tačka funkcije, $P(1, \frac{2}{e})$, zato što prvi izvod ne postoji u tački $x = -1$.

Grafik:



Zadatak 1.7. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije

$$f(x) = \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right).$$

Rešenje.

Domen: Domen funkcije f je $D = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

Parnost: Funkcija f nije ni parna ni neparna.

Nule i znak funkcije: Nule funkcije f se određuju iz $f(x) = 0$, odnosno

$$\operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0.$$

Dakle, $x = -1$ je nula funkcije.

$$\begin{aligned} f(x) > 0 &\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x} > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x > 0 \quad \vee \quad x < -1) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty). \end{aligned}$$

Prikažimo to u tablici:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$f(x)$	+	-	+

Asimptote:

Funkcija nema vertikalnu asimptotu, jer je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = +\frac{\pi}{2}$$

i

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Ispitaćemo da li funkcija ima horizontalnu asimptotu. Iz

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{\pi}{4}$$

sledi da je prava $y = \frac{\pi}{4}$ horizontalna asimptota funkcije f .

Monotonost i ekstremne vrednosti. Prvi izvod funkcije f je

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (1 + \frac{1}{x})^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1}.$$

Diskriminanta od $2x^2 + 2x + 1 = 0$ je $a^2 - 4ac = 4 - 8 = -4 < 0$ i $a = 2$, te sledi da je trinom $2x^2 + 2x + 1 > 0$ za savko $x \in D$. To znači da je $f'(x) < 0$ za svako $x \in D$, tj. $f(x)$ monotonopada nad čitavim domenom D . Ekstremnih vrednosti nema.

Tangente: Kako važi $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = +\frac{\pi}{2}$ i $\lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = -\frac{\pi}{2}$ odredićemo još ugao α koji tangenta grafika funkcije f kada $x \rightarrow 0^\pm$ zaklapa sa pozitivnim delom x -ose.

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{-1}{2x^2 + 2x + 1} = -1 \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$

konveksnost, konkavnost i prevojne tačke: Drugi izvod funkcije f je

$$f''(x) = \frac{4x + 2}{(2x^2 + 2x + 1)^2}, \quad x \in D.$$

Nule drugog izvoda:

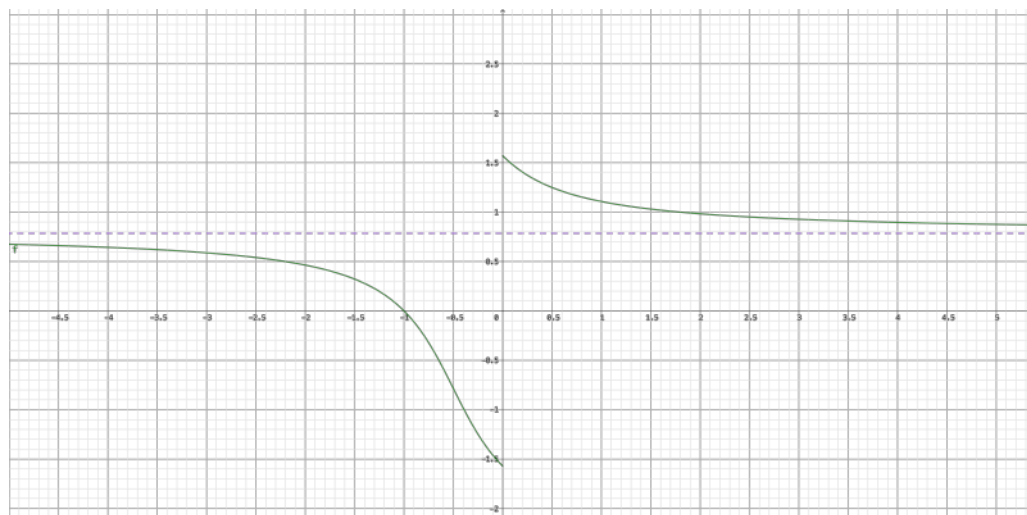
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Dakle, $x = -\frac{1}{2}$ je jedina nula drugog izvoda i moguća prevojna tačka. Odredićemo znak drugog izvoda:

	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$(0, +\infty)$
$f''(x)$	—	+	+
$f(x)$	konveksna ($\cap$)	konkavna ($\cup$)	konkavna ($\cup$)

$P(-\frac{1}{2}, -\frac{\pi}{4})$ je prevojna tačka grafika funkcije.

Grafik:



2. Zadaci za samostalni rad

Zadatak 2.1. Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije f , ako je

1. $f(x) = \frac{x+2}{2x+1},$

2. $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}},$

3. $f(x) = x^{\frac{2}{3}} \cdot e^{-x},$

4. $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^2 - 2x + 4}$