VEŽBE IZ MATEMATIKE

Novi Sad,
2020.

1. Neodređeni integrali

Neka je $f(x)$ definisana nad intervalom I, tj. $f : I \to \mathbb{R}$ Ako za funkciju $f(x)$ postoji funkcija $F : I \to \mathbb{R}$, koja ima izvod $F'(x)$ nad intervalom I, takva da je

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I$$

tada je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ nad intervalom I Primitivna funkxija nije jednoznačno određena, svaka funkcija $F(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$ je takođe primitivna funkcija jer je

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Skup svih primitivnih funkcija funkcije $f(x)$ nad nekim intervalom I naziva se neodređeni integral funkcije $f(x)$ nad datim I i označava se sa

$$\int f(x)dx.$$

Neke osobine neodređenog integrala:

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$
2. $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

   specijalno: $\int F'(f(x))f'(x)dx = \int dF(f(x)) = F(f(x)) + C$
4. $\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx,\ a \in \mathbb{R}$
5. $\int (f_1(x) + \cdots + f_n(x))\ dx = \int f_1(x)\,dx + \cdots + \int f_n(x)\,dx$

Zadatak 1.1. Odrediti bar dve primitivne funkcije funkcije $f(x) = 2x$.
Rešenje:

Znamo da je izvod funkcije $F(x) = x^2$ funkcija $F'(x) = 2x = f(x)$, pa zaključujemo da je $F(x)$ primitivna funkcija date funkcije $f(x)$.

Još neka primitivna funkcija je, na primer, $F_1(x) = x^2 + 1$ ili $F_2(x) = x^2 + 2020$...

Tablica integrala:

1. $\int x^n \, \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \; n \neq -1$
2. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$
3. $\int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C$
4. $\int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C$
5. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
6. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
7. $\int \operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + C$
8. $\int \operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + C$
9. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$
10. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$
11. $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C; \; \int a^x \, \mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
12. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$
13. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \arctan \dfrac{x}{a} + C$
14. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln \left| \dfrac{a+x}{a-x} \right| + C$
15. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$

1.1. Metoda smene u neodređenom integralu

Neka $\varphi : I_1 \to I \subset \mathbb{R}$ ima neprekidan izvod različit od nule nad intervalom I_1 i neka za funkciju $f : I \to \mathbb{R}$ postoji neodređeni integral nad intervalom I. Tada važi

$$\int f(x)\, dx = \int f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Zadatak 1.2. Odrediti:

a) $\displaystyle\int (3x+2)^{2020} dx;$

b) $\displaystyle\int \frac{2}{4x+2} dx;$

c) $\int \frac{x}{x^4+1}dx$

Rešenje:

a) Koristeći smenu $3x+2=t$ tj. $3dx=dt$ rešavamo integral:
$$\int (3x+2)^{2020}dx = \frac{1}{3}\int t^{2020}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{2021}}{2021}+C = \frac{1}{3}\frac{(3x+2)^{2021}}{2021}+C$$

b) smena: $4x+2=t \rightarrow 4dx=dt$
$$\int \frac{2}{4x+2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{2}{t}dt = \frac{2}{4}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(4x+2)+C$$

c) smena: $x^2=t \rightarrow 2xdx=dt$
$$\int \frac{x}{x^4+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}\text{arctg } t + C = \frac{1}{2}\text{arctg }(x^2)+C$$

Zadatak 1.3. Rešiti integrale:

- $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x+3}}dx = \int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}+C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+3)^2}+C,$
- $\int x^2\sqrt{x^3+9}dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{9}\sqrt{t^3}+C = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3+9)^3}+ C$
- $\int \frac{4x+3}{2x^2+3x+10}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(2x^2+3x+10)+C$
- $\int \frac{x}{(x+2)^2}dx = \int \frac{x+2-2}{(x+2)^2}dx = \int \frac{dx}{x+2} - 2\int \frac{dx}{(x+2)^2} = \int \frac{dt}{t} - 2\int t^{-2}dt = \ln t - 2\frac{t^{-1}}{-1}+C = \ln(x+2)+\frac{2}{x+2}+C$
- $\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^{3x}+C$
- $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = \int \frac{e^x\cdot e^x}{1+e^e}dx = \int \frac{t-1}{t}dt = \int dt - \int \frac{dt}{t} = t - \ln t + C = e^x - \ln e^x + C$
- $\int xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\int e^t = -\frac{1}{2}e^t + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$
- $\int \sin\frac{x}{2}dx = 2\int \sin t dt = -2\cos t + C = -2\cos\frac{x}{2}+C$
- $\int \text{tg } xdx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln t + C = -\ln(\cos x)+C$
- $\int \frac{\text{arctg } \frac{x}{2}}{4+x^2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{\text{arctg } \frac{x}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{2}{4}\int \frac{\text{arctg } t}{1+t^2} = \frac{1}{2}\int sds = \frac{1}{2\cdot 2}s^2+C = \frac{1}{4}(\text{arctg } t)^2 + C = \frac{1}{4}\left(\text{arctg } \frac{x}{2}\right)^2 + C$
- $\int \frac{x\ln(x^2+3)}{3+x^2}dx = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{4}t^2+C = \frac{1}{4}\ln^2(x^2+3)+C$

- $\displaystyle\int \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) + C$
- $\displaystyle\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\arcsin x} + C$

1.2. Parcijalna integracija

Neka su $u(x)$ i $v(x)$ diferencijabilne funkcije i neka postoji primitivna funkcija funkcije $u'(x)v(x)$. Tada postoji primitivna funkcija funkcije $u(x)v'(x)$ i važi jednakost

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x).$$

Zadatak 1.4. Primenom parcijalne integracije rešiti integrale:

a) $\displaystyle\int xe^{3x}dx$;

b) $\displaystyle\int (x^2+1)e^x dx$;

c) $\displaystyle\int (x+2)^2 \sin x dx$;

d) $\displaystyle\int e^x \sin x dx$.

Rešenje:

a) $\displaystyle\int xe^{3x}dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = e^{3x}dx \\ du = dx & v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}dx = \frac{1}{3}xe^{3x} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$

b) $\displaystyle\int (x^2+1)e^x dx = \begin{bmatrix} u = (x^2+1) & dv = e^x \\ du = 2xdx & v = \int e^x dx = e^x dx \end{bmatrix} = (x^2+1)e^x - 2\int xe^x dx = (x^2+1)e^x - \begin{bmatrix} u = x & dv = e^x \\ du = dx & v = \int e^x dx = e^x dx \end{bmatrix} = (x^2+1)e^x - \left(xe^x - \int e^x dx\right) = (x^2+1) - xe^x + e^x + C$

c) $\displaystyle\int (x+2)^2 \sin x dx = \begin{bmatrix} u = (x+2)^2 & dv = \sin x dx \\ du = 2(x+2)dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} = -(x+2)^2\cos x + 2\int x\cos x dx = \begin{bmatrix} u = x & dv = \cos x dx \\ du = dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{bmatrix} = -(x+2)^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x dx = -(x+2)^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$

d) $\displaystyle\int e^x \sin x dx = \begin{bmatrix} u = e^x & dv = \sin x dx \\ du = e^x dx & v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix} = -e^x\cos x + \int e^x \cos x dx = \begin{bmatrix} u = e^x & dv = \cos x dx \\ du = e^x dx & v = \int \cos x dx = \sin x \end{bmatrix} = -e^x\cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$

Došli smo do integrala od kog smo krenuli, pa prebacivanjem na levu stranu dobijamo:

$$2\int e^x \sin x dx = e^x(\sin x - \cos x),$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$$

Zadatak 1.5. Rešiti integrale:

a) $\displaystyle\int \ln x dx;$

b) $\displaystyle\int x^2 \ln x dx;$

c) $\displaystyle\int x \cdot \text{arctg}\, x dx;$

Rešenje:

a) $\displaystyle\int \ln x dx = \left[\begin{array}{cc} u = \ln x & dv = dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = x \end{array} \right] = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

b) $\displaystyle\int x^2 \ln x dx = \left[\begin{array}{cc} u = \ln x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{1}{x}dx & v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \end{array} \right] = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{3} dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

c) $\displaystyle\int x \cdot \text{arctg}\, x dx = \left[\begin{array}{cc} u = \text{arctg}\, x & dv = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] = \frac{x^2}{2} \cdot \text{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \text{arctg}\, x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \text{arctg}\, x - \frac{1}{2}\left(x - \text{arctg}\, x + C\right)$

1.3. Integracija racionalnih funkcija

Zadatak 1.6. Rešiti integrale: *a*) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx;$ *b*) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}} dx$

c) domaći $\displaystyle\int \frac{x+3}{x^2+2x+2} dx$

Rešenje: *a*) Prvo ćemo namestiti u brojiocu izvod imenioca razlomka.

$$= \int \frac{1}{2}\frac{2(x+2)}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1+3}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx}_{I_1} + 3 \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+x+1}}_{I_2} \right)$$

smena: $x^2+x+1 = t \implies (2x+1)dx = dt$, tj. $I_1 = \displaystyle\int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(x^2+x+1) + C,$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} = \left[\begin{array}{c} x + \frac{1}{2} = t \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\text{arctg}\, \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\, \frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C$$

Konačno, sledi da je

$$I = \ln(x^2+x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\,\frac{2(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{3}} + C$$

$b)\displaystyle\int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx = \frac{-3}{2}\int \frac{-2x+4-\frac{8}{3}}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx =$

$$= \frac{-3}{2}\left(\underbrace{\int \frac{4-2x}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx}_{I_1} - \frac{8}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}}_{I_2}\right)$$

Posebno ćemo rešiti integrale I_1 i I_2.

$I_1 = \begin{bmatrix} t = 5+4x-x^2 \\ dt = (4-2x)dx \end{bmatrix} = \displaystyle\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{5+4x-x^2} + C,$

$I_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-(x^2-4x+4-4)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x-2)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + C.$

Zadatak 1.7. Rešiti integrale: $a)\displaystyle\int \frac{x^3}{5-x^2}dx$; $\quad b)\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8-1}dx.$

Rešenje: Ove racionalne funkcije ćemo rešiti primenom metode smene.

$a)\displaystyle\int \frac{x^2}{5-x^2}xdx = \begin{bmatrix} t = 5-x^2 \\ dt = -2xdx \end{bmatrix} = \frac{-1}{2}\int \frac{5-t}{t}dt = \frac{-1}{2}\int\left(\frac{5}{t}-1\right)dt = \frac{-1}{2}(5\ln t - t) + C = \frac{-1}{2}\left(5\ln(5-x^2) - 5 + x^2\right) + C$

$b)\displaystyle\int \frac{x^3}{(x^4)^2-1}dx = \begin{bmatrix} t = x^4 \\ dt = 4x^3dx \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x^4-1}{x^4+1}\right| + C$

Racionalna funkcija je funkcija oblika $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

- ako je $\deg P(x) < \deg Q(x)$ - prava racionalna funkcija
- ako je $\deg P(x) \geq \deg Q(x)$ - neprava racionalna funkcija

Svaka neprava racionalna funkcija može se napisati u obliku

$$R(x) = T(x) + \frac{R_1(x)}{Q(x)}, \quad \deg R_1(x) < \deg Q(x)$$

Prije same integracije svaku pravu racionalnu funkciju ćemo rastaviti na zbir prostih racionalnih funkcija.

Proste ili elementarne racionalne funkcije su funkcije oblika:
$\dfrac{A}{x-a}$, $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}$, $\dfrac{Ax+B}{(x^2+ax+b)^k}$ pri čemu je $a^2-4b<0$ pa x^2+ax+b nema realnih nula.

Zadatak 1.8. Rešiti integrale:
$a) \displaystyle\int \frac{dx}{x^2-4}$; $b) \displaystyle\int \frac{2x^2+8x-2}{(x^2-1)(x+3)}dx$; $c) \displaystyle\int \frac{4x^2-4}{x^2(x-2)}dx$; $d) \displaystyle\int \frac{2x^3-4x^2}{(x-1)^2(x^2+1)}dx$.

Rešenje: $a)$ Pre integracije rastavićemo racionalnu funkciju na sumu prostih razlomaka.

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{x^2-4}$$

Sledi da je $1 = Ax + 2A + Bx - 2B$, odnosno izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće članove dobijamo sistem jednačina:

$$0 = A + B \quad \wedge \quad 1 = 2A - 2B.$$

Dobijamo da je $A = \dfrac{1}{4}, B = \dfrac{-1}{4}$ i možemo da rešavamo integral.

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \int \left(\frac{\frac{1}{4}}{x-2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x+2} \right) = \frac{1}{4}\left(\ln|x-2| - \ln|x+2|\right) + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

$b)$ Rastavljamo datu funkciju na proste

$$\frac{2x^2+8x-2}{(x-1)(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+3} =$$

$$= \frac{A(x+1)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x^2-1)}{(x-1)(x+1)(x+3)}$$

$$2x^2 + 8x - 2 = Ax^2 + 4Ax + 3A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx^2 - C$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće štepene dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcl} 2 &=& A+B+C \\ 8 &=& 4A+2B \\ -2 &=& 3A-3B-C \end{array}$$

Rešenje sistema je $A = 1, B = 2, C = -1$, pa je

$$\int \frac{2x^2+8x-2}{(x^2-1)(x+3)}dx = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+3} \right) dx =$$

$$= \ln|x-1| + 2\ln|x+1| - \ln|x+3| + C = \ln\left|\frac{(x-1)(x+1)^2}{x+3}\right| + C$$

$c)$ U ovom primeru imamo jednu realnu nulu višestrukosti dva i jednu realnu nulu višestrukosti jedan. Rastavljamo racionalnu funkciju na zbir prostih na sledeći način:

$$\frac{4x^2-4}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{Ax(x-2) + B(x-2) + Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$4x^2 - 4 = Ax^2 - 2Ax + Bx - 2B + Cx^2$$

Dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcl} 4 &=& A + C \\ 0 &=& -2A + B \\ -4 &=& -2B \end{array}$$

Rešenje sistema je $B = 2, A = 1, C = 3$, pa je

$$\int \frac{4x^2 - 4}{x^2(x-2)} dx = \int \left(\frac{dx}{x} + \frac{2dx}{x^2} + \frac{3dx}{x-2} \right) dx = \ln|x| - \frac{2}{x} + 3\ln|x+3| + C$$

d) U ovom primeru imenilac ima jednu realnu nulu koja se ponavlja dva puta i ima jedan nerastavljiv faktor (koji ima kompleksna rešenja) pa rastavljamo razlomak na zbir prostih razlomaka na sledeći način

$$\frac{2x^3 - 4x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2+1} =$$

$$\frac{A(x-1)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+1)}$$

Dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcl} 2 &=& A + C \\ -4 &=& -A + B - 2C + D \\ 0 &=& A + C + 2D \\ 0 &=& -A + B + D \end{array}$$

čije je rešenje $A = 0, B = -1, C = 2, D = 1$.

$$\int \frac{2x^3 - 4x^2}{(x-1)^2(x^2+1)} dx = \int \left(-\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2x+1}{x^2+1} \right) dx = -\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{2xdx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$$

1.4. Integrali nekih iracionalnih funkcija

Metod Ostrogradskog

Integrali oblika $\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$ gde je $P_n(x)$ polinom n-tog stepena mogu se rešiti na sledeći način:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

gde je Q_{n-1} polinom stepena $n - 1$ čije koeficijente treba odrediti i λ nepoznati parametar koji takođe treba odrediti.

Zadatak 1.9. Rešiti sledeće integrale:

$$a) \int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx; \quad b) \int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}dx; \quad c) \int \sqrt{x^2+x+1}dx.$$

Rešenje: U ovim primerima ćemo primeniti pomenuti metod Ostrogradskog i pokazati kako se određuju nepoznati koeficijenti.

a) U brojiocu je polinom stepena 1 što znači da će polinom $Q(x)$ biti stepena 0, odnosno realan broj, $Q(x) = A$.

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx = A\sqrt{5+4x-x^2} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$$

Prvo ćemo diferencirati levu i desnu stranu, a zatim pomnožiti jednakost sa $\sqrt{5+4x-x^2}$.

$$\frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}} = A\frac{4-2x}{2\sqrt{5+4x-x^2}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{5+4x-x^2}}$$

$$3x-2 = A(2-x) + \lambda$$

Izjednačavajući polinome sa desne i leve strane i dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{array}{rcl} 3 & = & -A \\ -2 & = & 2A+\lambda \end{array}$$

čije je rešenje $A = -3, \lambda = 4$. Vraćanjem koeficijenata u početni izraz dobijamo

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{5+4x-x^2}}dx = -3\sqrt{5+4x-x^2} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} =$$

$$= -3\sqrt{5+4x-x^2} + 4\int \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} =$$

$$= -3\sqrt{5+4x-x^2} + 4\arcsin\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

b) Polinom u brojiocu je stepena 3, pa će polinom $Q(x)$ biti stepena 2, odnosno $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$.

$$\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}$$

Na isti način kao u prethodnom primeru diferenciramo levu i desnu stranu i potom množimo sa $\sqrt{x^2+4}$.

$$\frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2+4} + (Ax^2+Bx+C)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$$

$$3x^3+5 = (2Ax+B)(x^2+4) + (Ax^2+Bx+C)x + \lambda$$

$$3x^3+5 = 2Ax^3 + 8Ax + Bx^2 + 4B + Ax^3 + Bx^2 + Cx + \lambda$$

Izjednačavanjem polinoma dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 3 &= 3A \\ 0 &= 2B \\ 0 &= 8A + C \\ 5 &= 4B + \lambda \end{aligned}$$

odakle sledi da je $A = 1, B = 0, C = -8, \lambda = 5$.

$$\int \frac{3x^3+5}{\sqrt{x^2+4}}dx = (x^2-8)\sqrt{x^2+4}+5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4}} = (x^2-8)\sqrt{x^2+4}+5\cdot\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

c) Na ovaj primer takođe možemo primeniti metod Ostrogradskog na sledeći način.

$$\int \sqrt{x^2+x+1}dx = \int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (Ax+B)\sqrt{x^2+x+1} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} = A\sqrt{x^2+x+1} + (Ax+B)\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} + \lambda\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}$$

$$x^2+x+1 = A(x^2+x+1) + (Ax+B)\frac{2x+1}{2} + \lambda$$

$$x^2+x+1 = Ax^2 + Ax + A + Ax^2 + \frac{A}{2}x + Bx + \frac{B}{2} + \lambda$$

Dobijamo sistem jednačina:

$$\begin{aligned} 1 &= 2A \\ 1 &= \frac{3}{2}A + B \\ 1 &= A + \frac{B}{2} + \lambda \end{aligned}$$

čije je rešenje $A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{4}, \quad \lambda = \frac{3}{8}$.

$$\int \frac{x^2+x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = (\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} =$$

$$= (\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}B)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} =$$

$$= (\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}B)\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right) + C$$

Integrali oblika $\int R\left(x, \sqrt[n_1]{\frac{ax+b}{cx+d}}, \sqrt[n_2]{\frac{ax+b}{cx+d}}, ..., \sqrt[n_k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$

Ove integrale ćemo rešiti smenom

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^N$$

gde je N najmanji zajednički sadržalac brojeva $n_1, n_2, ..., n_k$.

Zadatak 1.10. Rešiti integrale:

a) $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx$; *b*) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt{x+1}}$.

Rešenje: *a*) U ovom primeru imamo jedan koren, to je treći koren, pa će smena biti

$$\frac{x+1}{x-1} = t^3 \implies (x-1)t^3 = (x+1) \implies xt^3 - x = 1 + t^3 \implies x = \frac{t^3+1}{t^3-1}$$

$$dx = \frac{3t^2(t^3-1) - (1+t^3)\cdot 3t^2}{(t^3-1)^2} = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt$$

Računamo integral

$$\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}dx = \int t\frac{-6t^2 dt}{(t^3-1)^2} = -\int \frac{2t\cdot 3t^2}{(t^3-1)^2} =$$

Poslednji integral ćemo rešiti pomoću parcijalne integracije:

$$\left[\begin{array}{cc} u = 2t & dv = \frac{3t^2}{(t^3-1)^2} \\ du = 2dt & v = \frac{-1}{(t^3-1)} \end{array}\right] = \frac{2t}{t^3-1} - \int \frac{2dt}{t^3-1} = \frac{2t}{t^3-1} - 2\int \left(\frac{1}{3(t-1)} + \frac{t+2}{3(t^2+t+1)}\right)dt =$$

$$= \frac{2t}{t^3-1} - \frac{2}{3}\ln(x-1) - \int \frac{2t+1+3}{3(t^2+t+1)}dt = \frac{2t}{t^3-1} - \frac{2}{3}\ln(x-1) - \ln(t^2+t+1) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}} + C$$

za kraj potrebno je i vratiti smenu

$$I = \frac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}{\frac{x+1}{x-1}-1} - \frac{2}{3}\ln\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} - 1\right) - \ln\left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}^2 + \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} + 1\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}+1}{\sqrt{3}} + C$$

Moglo je umesto parcijalne da se vrši deljenje polinoma i klasično rešavamo racionalnu funkciju!

b) Najmanji sadržalac brojeva 2 i 3 je 6 pa će smena biti

$$x + 1 = t^6 \implies dx = 6t^5 dt$$

$$= \int \frac{6t^5 dt}{t^4 - t^3} = \int \frac{6t^5 dt}{t^3(t-1)} = \int \frac{t^2 \quad -1+1}{t-1}dt = 6\int \frac{(t-1)(t+1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 6\int (t+1)dt + 6\int \frac{1}{t-1}dt = 6\frac{t^2}{2} + 6t + 6\ln|t-1| + C = 3\sqrt[3]{x+1} + 6\sqrt[6]{x+1} + 6\ln\left|\sqrt[6]{x+1} - 1\right| + C$$

Integrali oblika $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+x}}$**, za** $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \neq 0$

Za rešavanje ćemo koristiti smenu $x - \alpha = \frac{1}{t}$

Zadatak 1.11. Rešiti integral: $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

Rešenje: Ako iskoristimo smenu $x+1=\dfrac{1}{t}$ sledi da je $dx=\dfrac{-dt}{t^2}$. Važi $x=\dfrac{1-t}{t}$, pa je

$$x^2+2x=\frac{(1-t)^2}{t^2}+2\frac{1-t}{t}=\frac{1-2t+t^2+2t-2t^2}{t^2}=\frac{1-t^2}{t^2}$$

Uvrštavanjem smene u integral dobija se

$$\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}=\int \frac{\frac{-dt}{t^2}}{\frac{1}{t^3}\cdot\sqrt{\frac{1-t^2}{t^2}}}=\int \frac{-t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}=I$$

Integral do kog smo došli znamo da rešimo, na primer, primenom metoda Ostrogradskog.

$$I=(At+B)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\frac{-t^2}{\sqrt{1-t^2}}=A\sqrt{1-t^2}+(At+B)\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}+\lambda\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$-t^2=A(1-t^2)-t(At+B)+\lambda$$

Dobijamo sistem linearnih jednačina:

$$\begin{aligned}-1&=-2A\\ 0&=-B\\ 0&=A+\lambda\end{aligned}$$

Rešenje integrala I je

$$I=\frac{\sqrt{1-t^2}}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{2}-\frac{1}{2}\arcsin t+C$$

Rešenje polaznog integrala ćemo dobiti vraćanjem smene, odnosno rešenje je

$$\frac{\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}}}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}+C$$

1.5. Integrali trigonometrijskih funkcija

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx$$

Koristimo univerzalnu trigonometrijsku smenu:

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t\implies\frac{x}{2}=\operatorname{arctg} t\implies x=2\operatorname{arctg} t\implies dx=\frac{2dx}{1+t^2}$$

Koristeći trigonometrijske identitete izrazićemo $\sin x$ i $\cos x$ preko t.

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\qquad\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Pomenuta smena može da reši veliki broj integrala, ali nekada možemo i na lakši način koristeći smene $\sin x=t$ ili $\cos x=t$ ukoliko je to moguće.

Zadatak 1.12. Izračunati integrale:

$$a)\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5};\quad b)\int\frac{-\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dx;\quad c)\int\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx.$$

Rešenje:

a) Upotrebićemo univerzalnu trigonometrijsku smenu

$$\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{2\frac{2t}{1+t^2}-\frac{1-t^2}{1+t^2}-5}=\int\frac{2dt}{6t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{3\left((t+\frac{1}{3})^2+\frac{5}{9}\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}\text{arctg}\,\frac{t+\frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\,\frac{3t+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\text{arctg}\,\frac{3\text{tg}\,\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C$$

b) U ovom zadatku ćemo lakše doći do rešenja ako umesto univerzalne trigonometrijske smene iskoristimo smenu $\sin x=t$. Tada je $\cos x dx=dt$.

$$\int\frac{-\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}dxdx=\int\frac{-dt}{t^2-6t+5}=\int\frac{-dt}{(t-5)(t-1)}$$

što ćemo rešiti rastavljajući razlomak na sumu parcijalnih razlomaka

$$\frac{1}{(t-5)(t-1)}=\frac{A}{t-5}+\frac{B}{t-1}.$$

Izjednačavanjem leve i desne strane dobijamo da je $A=\frac{1}{4}$, $B=\frac{-1}{4}$. Rešenje integrala je

$$\frac{1}{4}\left(\int\frac{dt}{t-5}-\int\frac{dt}{t-1}\right)=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-5}{t-1}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x-5}{\sin x-1}\right|+C$$

c) U ovom primeru će nam biti zgodna smena $\cos x=t$. Tada je $-\sin x dx=dt$.

$$\int\frac{\sin x\cdot\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx=\int\frac{-(1-t^2)dt}{1+t^2}=\int\left(1-\frac{2}{1+t^2}\right)dt=t-2\text{arctg}\,t+C=$$

$$=\cos x-\text{arctg}\,(\cos x)+C$$