Određeni integral

26. novembar 2020

Pojam određenog integrala

Posmatramo $[a, b] \subset \mathbb{R}$

- Podela intervala: $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}, \; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$
- skup svih podela je $\mathcal{P}^*[a, b]$
- $P' \subset P \Rightarrow P$ je finija od P', $\quad P'$ je grublja od P
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ dužina intervala $[x_{i-1}, x_i]$
- parametar podele P je $\max\limits_{1 \le i \le n} \Delta x_i = \lambda(P)$
- $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \; \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, skup izabranih tačaka $\xi \in \mathbb{R}^n$ podele P je

$$\xi(P) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n), \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n\}$$

- podela intervala sa izabranom tačkom (P, ξ)
- $\mathcal{P} = \mathcal{P}[a, b]$ skup svih takvih podela

Definicija

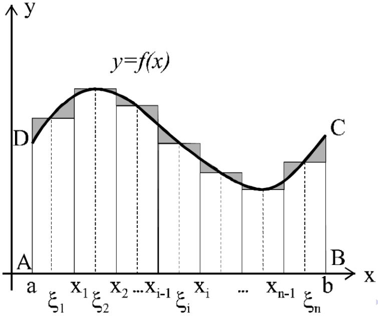
Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *i neka je* (P, ξ) *podela sa izabranom tačkom intervala* $[a, b]$. *Zbir*

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

se naziva integralna ili Rimanova suma funkcije $f(x)$ *za datu podelu* (P, ξ).

MOTIVACIJA

Površina krivolinijskog trapeza je približno jednaka integralnoj sumi:



Definicija

Broj I je limes (granična vrednost) integralnih suma $I(f, P, \xi)$ funkcije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ za $\lambda(P) \to 0$, pišemo

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) = I,$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$, takvo da za svaku podelu P i svaku izabranu tačku $\xi \in \xi(P)$, kada je $\lambda(P) < \delta$, važi nejednakost

$$|I(f, P, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Ako postoji

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi) = I$$

tada

- $f(x)$ je integrabilna u Rimanovom smislu nad $[a, b]$
- I se naziva Rimanov ili određeni integral funkcije $f(x)$ nad $[a, b]$,

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

- a je donja granica integrala, b je gornja granica integrala
- $f(x)$ je podintegralna funkcija
- $f(x)\, dx$ je podintegralni izraz
- x je integraciona promenljiva
- $\mathrm{R}[a, b]$ skup svih integrabilnih funkcija nad [a,b] (u Rimanovom smislu)

Teorema

Potreban uslov da funkcija $f(x)$ bude integrabilna nad intervalom $[a,b]$ je da funkcija $f(x)$ bude ograničena nad $[a,b]$.

Definicija

- *Ako je funkcija $f(x)$ definisana u tački a onda je*

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

- *Ako je $a < b$ i $\int_a^b f(x)dx$ postoji onda je*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Integrabilnost nekih klasa funkcija

Teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna nad* $[a, b]$ *ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

Teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *ograničena nad intervalom* $[a, b]$ *i nad njim ima konačan broj prekida ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

Teorema

Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *monotona nad intervalom* $[a, b]$ *ona je nad tim intervalom i integrabilna.*

Napomena

Ograničena funkcija može da ima i beskonačan broj prekida, a da bude integrabilna, jer važi

Primer

Naći $\int\limits_0^1 x dx$ *po definiciji.*

Teorema

1. *Ako je* $f(x) = 0$ *za svako* $x \in [a, b]$, *tada je* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b 0dx = 0$.
2. *Ako postoji konačan skup različitih tačaka* $c_1, \ldots, c_k \in [a, b]$ *takav da je*
$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, b] \setminus \{c_1, \ldots, c_k\} \\ A_i, & x = c_i,\ i \in \{1, 2, \ldots k\},\ A_i \neq 0 \end{cases}$$
tada je $\int\limits_a^b g(x)\, dx = 0$.

Veza između određenog i neodređenog integrala

Njutn-Lajbnicova formula

Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$ i ako funkcija $f(x)$ ima primitivnu funkciju $F(x)$ nad intervalom $[a, b]$, tada je

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Neke osobine određenog integrala

- Ako je funkcija $f(x)$ integrabilna nad zatvorenim intervalom $[a, b]$, tj. $f \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, tada je ona integrabilna i nad svakim zatvorenim podintervalom $[c, d]$ intervala $[a, b]$.
- (linearnost integrala) Ako $f, g \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ tada i $f \pm g \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $\alpha f \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ i važi
  - $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
  - $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$
- Ako je $f \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ i ako se funkcija $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ razlikuje u konačnom broju tačaka od funkcije $f(x)$ tada je i $g \in \mathrm{R}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ i važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

- Ako $f, g \in \mathrm{R[a,b]}$ tada $f \cdot g \in \mathrm{R[a,b]}$, $\mathrm{|f|} \in \mathrm{R[a,b]}$, $\frac{1}{\mathrm{f}} \in \mathrm{R[a,b]}$ uz uslov $|f(x)| \geq \alpha > 0$ za $x \in [a, b]$.

- (aditivnost integrala) Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}$ krajevi tri zatvorena intervala. Ako je f integrabilna na najvećem od ovih intervala onda je ona integrabilna i na ostala dva. Pri tom važi

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

- (monotonost i procena integrala) Ako je $f \in \mathrm{R[a,b]}$, $a < b$ i $f(x) \geq 0$, $x \in [a, b]$ tada je i

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

- Ako je $f(x) \leq g(x),\ x \in [a,b],\ a < b,\ f,g \in \mathrm{R}[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ onda je

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Primer

Naći određeni integral funkcije $f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ 5 & , \quad x > 0 \end{cases}$ *nad* $[-1,2]$. *Da li na intervalu* $[-1,2]$ *data funkcija ima primitivnu funkciju?*

Parcijalna integracija i smena promenljive

Teorema

Neka funkcije $u(x)$, $v(x)$ imaju neprekidne izvode nad $[a, b]$. Tada važi

$$\int_a^b u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)du(x).$$

Teorema

Neka je funkcija $f : [A, B] \to \mathbb{R}$ neprekidna, a funkcija $\varphi : [\alpha_0, \beta_0] \to [A, B]$ ima neprekidan izvod. Ako je $\alpha \in [\alpha_0, \beta_0]$, $\beta \in [\alpha_0, \beta_0]$, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, onda važi jednakost

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\, \varphi'(t)\, dt.$$

Primena određenog integrala

POVRŠINA RAVNIH FIGURA

- pravougle koordinate: $y = f(x)$ je neprekidna i nenegativna za $x \in [a, b]$

$$P = \int_a^b f(x)\, dx$$

DUŽINA LUKA RAVNE KRIVE

- pravougle koordinate: $y = f(x)$, ima neprekidan izvod nad $[a, b]$

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Primena određenog integrala

ZAPREMINA OBRTNIH TELA

- pravougle koordinate: $y = f(x)$ neprekidna nad $[a, b]$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$$

POVRŠINA OMOTAČA OBRTNIH TELA

- pravougle koordinate: $y = f(x) \geq 0$ i ima neprekidan prvi izvod nad $[a, b]$

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$