VEŽBE IZ MATEMATIKE 1

Novi Sad,
2020.

Određeni integral i njegova primena

Na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$ izvršena je podela na podintervale konačnim brojem tačaka iz skupa $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ tako da je

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Iz svakog podintervala odabrana je tačka $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ i izračunata suma

$$I(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

gde je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ dužina podintervala. Ovako dobijena suma se naziva integralna ili Rimanova suma.

Neka je sa $\lambda(P) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \Delta x_i$ označena maksimalna dužina svih podintervala. Ukoliko postoji granična vrednost

$$\lim_{\lambda(P)\to 0} I(f, P, \xi_i) = I$$

nezavisno od podele P i izbora tačaka iz ξ_i, tada se broj I naziva Rimanov ili određeni integral funkcije f nad intervalom $[a, b]$ i označava se sa

$$I = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Osobine određenog integrala koje se koriste prilikom njegovog izračunavanja su:

1. $\displaystyle\int\limits_a^b c\, dx = c(b-a), \quad c \in \mathbb{R},$

2. $\displaystyle\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))\, dx = \int\limits_a^b f(x)\, dx \pm \int\limits_a^b g(x)\, dx,$

3. $\displaystyle\int\limits_a^b c\, f(x)\, dx = c\int\limits_a^b f(x)\, dx, \quad c \in \mathbb{R}.$

1. Izračunati po definiciji $I = \displaystyle\int\limits_0^1 x^2\, dx$ i $I = \displaystyle\int\limits_{-1}^5 (1+3x)\, dx$.

   Rešenje:

Ako je interval $[0, 1]$ podeljen na n jednakih delova, tada je

$$\Delta x_i = \frac{1}{n}.$$

Neka su odabrane tačke ξ_i desni krajevi intervala $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, tj.

$$\xi_i = \frac{i}{n},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Sada je Rimanova suma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

pa je

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Podelom intervala $[-1, 5]$ na n jednakih delova je

$$\Delta x_i = \frac{5 - (-1)}{n} = \frac{6}{n}.$$

Neka su odabrane tačke ξ_i levi krajevi intervala $[x_{i-1}, x_i]$, tj.

$$\xi_i = -1 + (i-1)\frac{6}{n},$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Rimanova suma je sada

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(-1 + (i-1)\frac{6}{n}) \cdot \frac{6}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(1 + 3(-1 + (i-1)\frac{6}{n})\right) \cdot \frac{6}{n} \\
&= \frac{6}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{i=1}^{n} 3(-1 + (i-1)\frac{6}{n})\right) \\
&= \frac{6}{n}\left(n + 3\sum_{i=1}^{n}(-1 + (i-1)\frac{6}{n})\right) \\
&= \frac{6}{n}\left(n - 3\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{18}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1)\right) \\
&= \frac{6}{n}\left(n - 3n + \frac{18}{n}\sum_{i=1}^{n} i - \frac{18}{n}\sum_{i=1}^{n} 1\right) \\
&= \frac{6}{n}\left(-2n + \frac{18}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{18}{n} \cdot n\right) \\
&= -12 + 54 \cdot \frac{n+1}{n} - \frac{108}{n},
\end{aligned}$$

pa je

$$I = \lim_{n\to\infty}\left(-12 + 54\cdot\frac{n+1}{n} - \frac{108}{n}\right) = -12 + 54 + 0 = 42.$$

2. Izračunati $I = \int\limits_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx$.

   Rešenje:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} dx - \int\limits_{-1}^{1} x^2\,dx = x\Big|_{-1}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 1-(-1)-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

3. Izračunati $I = \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 x\,dx$.

   Rešenje:

$$I = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2} + \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2}\,dx = \tfrac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$$

$$\left[\begin{array}{c} 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\tfrac{1}{2}\cos t\,dt = \tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{\pi}{8} + \tfrac{1}{4}.$$

4. Izračunati $I = \int\limits_1^2 x\,e^{2x}\,dx$.

   Rešenje: Integral se rešava primenom parcijalne integracije

$$\left[\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right].$$

$$I = \tfrac{1}{2}x\,e^{2x}\Big|_1^2 - \tfrac{1}{2}\int\limits_1^2 e^{2x}\,dx = \left[\begin{array}{c} 2x = t \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \\ x = 2 \Rightarrow t = 4 \end{array}\right] = \tfrac{1}{2}x\,e^{2x}\Big|_1^2 - \tfrac{1}{2}\int\limits_2^4 \tfrac{e^t}{2}\,dt$$

$$= \tfrac{1}{2}x\,e^{2x}\Big|_1^2 - \tfrac{1}{4}e^t\Big|_2^4 = \tfrac{1}{2}(2e^4 - e^2) - \tfrac{1}{4}(e^4 - e^2) = \tfrac{3}{4}e^4 - \tfrac{1}{4}e^2.$$

5. Izračunati $I = \int\limits_{-2}^{2} f(x)\,dx,\ f(x) = \left\{\begin{array}{ll} 2, & x < 0 \\ 4 - x^2, & x \geq 0 \end{array}\right.$.

   Rešenje: Iz $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} 2 = 2$ i $\lim\limits_{x\to 0+-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}(4-x^2) = 4$ sledi da podintegralna funkcija nad $[-2,2]$ ima prekid prve vrste, tj. skok.

Podintegralna funkcija je ograničena i ima jedan prekid intervalu $[-2,2]$, pa je data funkcija integrabilna na intervalu $[-2,2]$, tj. postoji integral I. Dalje je

$$I = \int_{-2}^{0} 2\,dx + \int_{0}^{2} (4-x^2)\,dx = 2\int_{-2}^{0} dx + \int_{0}^{2} (4-x^2)\,dx = \frac{28}{3}.$$

6. Izračunati $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} \sin x dx$.

   Rešenje: $\int_{0}^{2\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_{0}^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos 0 = -1+1 = 0.$

7. Izračunati $I = \displaystyle\int_{-1}^{2} |x-1| dx$.

   Rešenje: Iz $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$ sledi

   $I = \int_{-1}^{1} (-x+1)dx + \int_{1}^{2} (x-1)dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + x\Big|_{-1}^{1} + \frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2} - x\Big|_{1}^{2}$
   $= -(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (1+1) + (2-\frac{1}{2}) - (2-1) = 2 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{5}{2}.$

8. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ako je $a_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$.

   Rešenje: Iz

   $$a_n = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}} + \frac{1}{1+\frac{2^2}{n^2}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n^2}{n^2}}\right)$$
   $$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{i^2}{n^2}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+(\frac{i}{n})^2},$$

   sledi da je a_n gornja Darbuova suma funkcije $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ na intervalu $[0,1]$. Dakle,

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x\Big|_{0}^{1} = \operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Površina ravnih likova

Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija nad $[a,b]$. Potrebno je izračunati površinu krivolinijskog trapeza ograničenog krivom $y = f(x)$, x-osom i pravama $x = a$ i $x = b$.

I) Ako je $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [a, b]$ tada je

$$P = \int_a^b f(x)\,dx.$$

II) Ako je $f(x) \leq 0$ za svako $x \in [a, b]$, tada je

$$P = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

III) Ako funkcija $f(x)$ menja znak na intervalu $[a, b]$, tj. postoji tačka $c \in [a, b]$ takva da je $f(c) = 0$ i $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [a, c]$ i $f(x) \leq 0$ za svako $x \in [c, b]$, tada je

$$P = \int_a^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx.$$

U slučaju da je $f(c) = 0$ i $f(x) \leq 0$ za svako $x \in [a, c]$ i $f(x) \geq 0$ za svako $x \in [c, b]$, tada je

$$P = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

IV) Ako je potrebno izračunati površinu koja se nalazi između grafika dve funkcije $f(x)$ i $g(x)$ i važi da je $f(x) \geq g(x)$ za svako $x \in [a, b]$, tada je

$$P = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)\,dx.$$

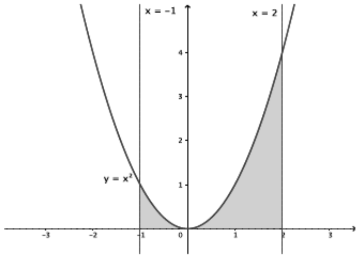
Slične formule važe i u slučaju da je $x = g(y)$, tada se integracija vrši duž $y-$ose.

U slučaju da je funkcija $y = f(x)$ zadata parametarski, $y = \psi(t)$ i $x = \varphi(t)$ za $t \in [\alpha, \beta]$, pri čemu je funkcija $\varphi(t)$ monotono rastuća i ima neprekidan prvi izvod nad $[\alpha, \beta]$ dok je $\psi(t)$ neprekidna nad $[\alpha, \beta]$ i $\psi(t) \geq 0$ za svako $t \in [\alpha, \beta]$, tada je

$$P = \int_\alpha^\beta \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt.$$

1. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y = x^2$, pravama $x = -1$ i $x = 2$ i $x-$osom.

   Rešenje: Tražena površina predstavljena je na slici.

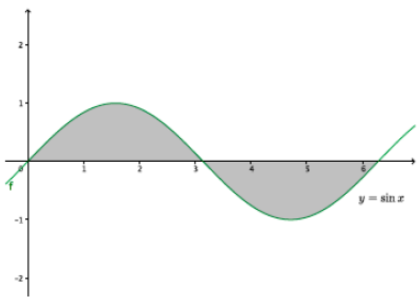


Interval integracije je $[-1, 2]$, a nad njim je funkcija $f(x) = x^2$ nenegativna, pa je

$$P = \int_{-1}^{2} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} - \frac{-1}{3} = 3.$$

2. Izračunati površinu ograničenu grafikom funkcije $y = \sin x$ i delom $x-$ose za $x \in [0, 2\pi]$.

   Rešenje: Tražena površina je predstavljena na slici.Na intervalu $[0, 2\pi]$ postoji nula funkcije, tj. $y(\pi) = 0$ i važi da je $y \geq 0$ za svako $x \in [0, \pi]$ i $y \leq 0$ za svako $x \in [\pi, 2\pi]$.



$$P = \int_{0}^{\pi} \sin x\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx$$

$$= (-\cos x)\Big|_{0}^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi}$$

$$= -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi$$

$$= -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4.$$

3. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y = 2x - x^2$ i pravom $y = -x$.

   Rešenje: Prava $y = -x$ u tački $O(0, 0)$ seče x-osu.

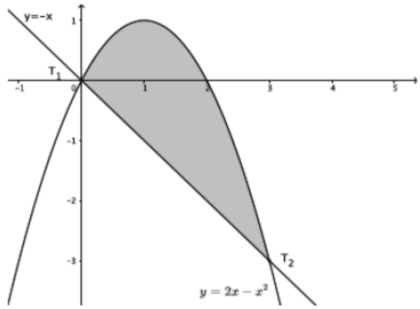
   Presek parabole sa $x-$osom $(y = 0)$ se dobija rešavanjem jednačine $2x - x^2 = 0$. Rešenja navedene jednačine su $x = 0$ ili $x = 2$, tako da parabola u tačkama $T_1(2, 0)$ i $O(0, 0)$ seče $x-$osu.

   Iz $y' = (2x - x^2)' = 2 - 2x = 0$ sledi da parabola u $x = 1$ može da ima ekstremnu vrednost. Kako je $y'' = -2 < 0$ za svako x, sledi da u $x = 1$ parabola dostiže maksimum. $y(1) = 2\cdot 1 - 1^2 = 1$, pa je tačka maksimuma $T(1, 1)$.

   Apscise presečnih tačaka funkcija $y = 2x - x^2$ i $y = -x$ su rešenja jednačine

$$2x - x^2 = -x \quad\Longleftrightarrow\quad x(3 - x) = 0,$$

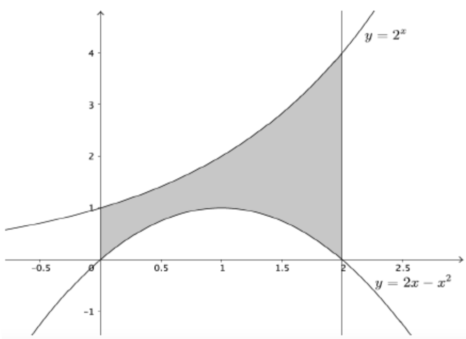
   odakle je $x = 0$ i $x = 3$. Iz $y = -x$ sledi da su tačke preseka parabole i prave tačke $O(0, 0)$ i $T_2(3, -3)$. Tražena površina je predstavljena na slici.



$$P = \int_0^3 (2x - x^2 - (-x))\,dx = \int_0^3 (3x - x^2)\,dx = \frac{9}{2}.$$

4. Izračunati površinu ograničenu pravama $x = 0$, $x = 2$ i graficima krivih $p_1 :\ y = 2x - x^2$ i $p_2 :\ y = 2^x$.

   Rešenje: Tražena površina predstavljena je na slici. Interval integracije je $[0, 2]$. Presek parabole p_1 i $x-$ose su tačke $O(0, 0)$ i $T_1(2, 0)$. Za svako $x \in \mathbb{R}$ je $2^x > 2x - x^2$.



$$P = \int_0^2 (2^x - (2x - x^2))\,dx = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

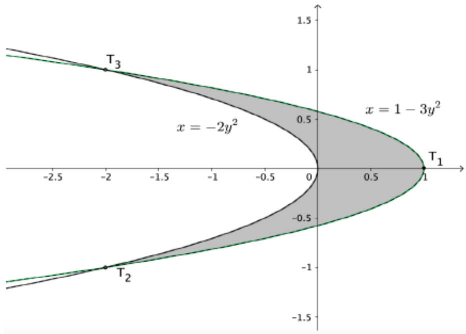
5. Izračunati površinu ograničenu parabolama $p_1 :\ x = -2y^2$ i $p_2 :\ x = 1 - 3y^2$.

   Rešenje: U ovom slučaju integracija se vrši po promenljivoj y.

   Teme parabole p_1 je u tački $O(0, 0)$, a parabole p_2 u tački $T_1(1, 0)$.

   Presek parabole p_2 sa $y-$osom je rešenje jednačine $1 - 3y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{1}{3}$, odakle se dobijaju tačke $T_2(0, -\frac{1}{\sqrt{3}})$ i $T_3(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

   Parabole p_1 i p_2 se seku u tačkama sa ordinatama $-2y^2 = 1 - 3y^2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - y^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 1$, tj. u tačkama $T_2(-2, 1)$ i $T_3(-2, -1)$, pa je interval integracije $[-1, 1]$.



$$P = \int_{-1}^{1} (1 - 3y^2 - (-2y^2))\, dy$$

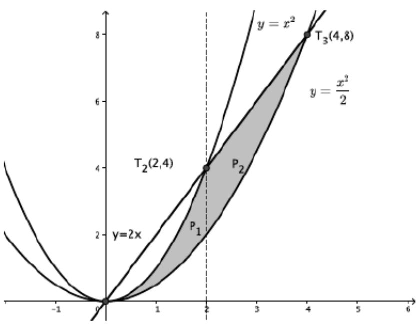
$$= \int_{-1}^{1} (1 - y^2)\, dy = \frac{4}{3}.$$

6. Izračunati površinu oblasti ograničene parabolama $p_1: \; y = x^2$ i $p_2: \; y = \dfrac{x^2}{2}$ i pravom $p: \; y = 2x$.

   Rešenje: Apscise presečnih tačaka parabole p_1 i prave p su rešenja jednačine $x^2 = 2x$, tj. $x = 0$ ili $x = 2$. Iz $y = 2x$ sledi da su presečne tačke $O(0,0)$ i $T_2(2,4)$.

   Apscise presečnih tačaka parabole p_2 i prave p su rešenja jednačine $\dfrac{x^2}{2} = 2x$, tj. $x = 0$ ili $x = 4$, pa su presečne tačke $O(0,0)$ i $T_2(4,8)$. Opet smo za određivanje oridanat presečnih tača koristili da je $y = 2x$.

   Potrebno površinu podeliti na dva dela.



$$P = P_1 + P_2,$$

$$P_1 = \int_0^2 (x^2 - \frac{x^2}{2})\, dx = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

i

$$P_2 = \int_2^4 (2x - \frac{x^2}{2})\, dx = \left(x^2 - \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_2^4 = \frac{8}{3},$$

pa je

$$P = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4.$$

7. Izračunati površinu ograničenu krivom $y = \ln x^{-\frac{1}{x}}$, $x-$osom i pravama $x = \dfrac{1}{e}$ i $x = e$.

Rešenje: Domen funkcije $y = \ln x^{-\frac{1}{x}}$ je $(0, \infty)$. Nalazimo presek grafika funkcije $y = \ln x^{-\frac{1}{x}}$ sa x-osom $(y = 0)$:

$$y = 0 \Leftrightarrow \ln x^{-\frac{1}{x}} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow x = 1,$$

tako da kriv $y = \ln x^{-\frac{1}{x}}$ seče $x-$osu u tački $T(1, 0)$.

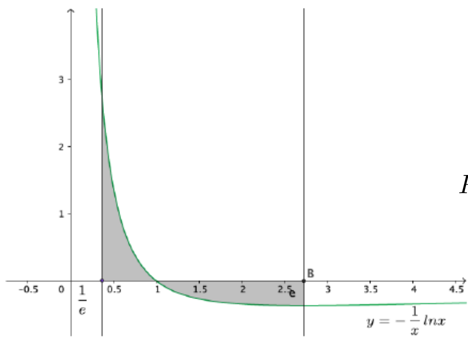
Prvi izvod funkcije je $y' = \frac{\ln x - 1}{x^2}$. I

Iz

$$y' < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x - 1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x < e,$$

sledi da na intervalu $[\frac{1}{e}, e]$ funkcija y monotono opada.

Iz $y\left(\frac{1}{e}\right) = -e \ln \frac{1}{e} = -e \ln e^{-1} = e > 0$, $y(e) = -\frac{1}{e} \ln e = -\frac{1}{e} < 0$ i $y(1) = 0$ zaključuje se da je na intervalu $[\frac{1}{e}, 1]$ grafik funkcije iznad $x-$ose, dok je na intervalu $[1, e]$ ispod $x-$ose.



$$P = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(-\frac{\ln x}{x}\right) dx - \int_{1}^{e} \left(-\frac{\ln x}{x}\right) dx.$$

$$\int \frac{\ln x}{x}\, dx = \left[\begin{array}{c} \ln x = t \\ \frac{1}{x} dx = dt \end{array} \right] = \int t\, dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C,$$

$$P = -\frac{\ln^2 x}{2}\bigg|_{\frac{1}{e}}^{1} + \frac{\ln^2 x}{2}\bigg|_{1}^{e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$