ANALITIČKA GEOMETRIJA U PROSTORU

Analitička geometrija u prostoru omogućava matematičko opisivanje, projektovanje, dimenzionisanje i analizu objekata koji imaju trodimenzionalnu strukturu. Ona nije samo teorijska matematička disciplina već predstavlja osnovu za razumevanje mnogih postupaka koji se svakodnevno koriste u građevinarstvu, arhitekturi i geodeziji.

Savremeno građevinarstvo koristi softverske alate kao što su AutoCAD, Revit, ArchiCAD i drugi BIM sistemi. Iza njihovih prostornih modela nalaze se matematički principi analitičke geometrije:

- tačke su predstavljene koordinatama;
- linije se opisuju jednačinama;
- ravni i površine matematičkim modelima;
- rastojanja i uglovi se određuju geometrijskim i algebarskim metodama.

Projektovanje zgrada i konstrukcija Prilikom projektovanja zgrade potrebno je odrediti položaj stubova, greda, ploča i drugih konstruktivnih elemenata u prostoru.

Analitička geometrija omogućava:

- određivanje koordinata karakterističnih tačaka konstrukcije;
- opisivanje pravaca i položaja greda i stubova pomoću jednačina pravih;
- određivanje uglova između konstruktivnih elemenata;
- proveru da li se dva elementa seku ili su paralelna.

Primer: Ako su poznate koordinate krajnjih tačaka grede, jednačinom prave može se opisati njen položaj u prostoru. Na taj način se može proveriti njen odnos prema stubovima i drugim elementima konstrukcije.

Ravan, razni oblici jednačine ravni

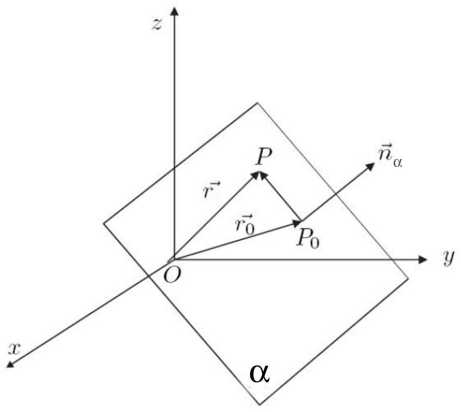
Koordinate tačaka koje leže u jednoj ravni moraju zadovoljavati jednačinu ravni. Kako ravan može biti određena različitim elementima (tačkom u ravni i normalom na ravan; odsečcima na koordinatnim osama; sa tri nekolinearne tačke koje pripadaju ravni), imamo i razne oblike jednačine ravni.

- Ravan α je određena tačkom $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i vektorom $\vec{n}_\alpha = (A, B, C) \neq \vec{0}$ koji je normalan na ravan.

Neka je $P(x, y, z) = \overrightarrow{0P}$ proizvoljna tačka ravni α. Kako se tačke P_0 i P nalaze u istoj ravni, to će i vektor

$$\overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0P_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

ležati u toj istoj ravni.



Kako je vektor $\vec{n}_\alpha$ normalan na ravan α, on je normalan i na svaki vektor u toj ravni, tj.

$$\vec{n}_\alpha \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

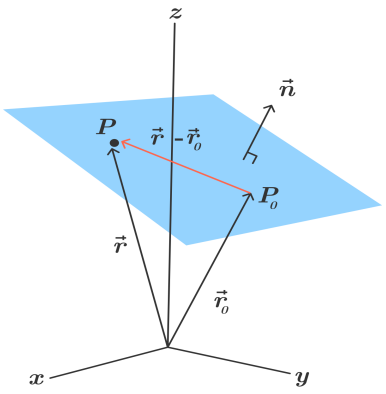
ili

$$\vec{n}_\alpha \cdot (\overrightarrow{0P} - \overrightarrow{0P_0}) = 0$$

ili

$$\vec{n}_\alpha \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

gde su sa $\vec{r}$ i $\vec{r_0}$ označeni vektori položaja tačaka P i P_0 redom. Ovo je **vektorska** jednačina ravni koja prolazi kroz datu tačku i normalna je na dati vektor.



Kada se u ovu jednačinu zamene sve veličine, dobija se

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0.$$

Skalarna jednačina ravni

Skalarna jednačina ravni α kojoj pripada tačka $P_0(x_0, y_0, z_0)$ i koja je normalna na nenula vektor $\vec{n}_\alpha = (A, B, C)$ je

$$\alpha : \ A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Vektor $\vec{n}_\alpha$ se zove **vektor normale** ravni α. Za vektor normale ravni bitan je samo pravac, a intenzitet i smer nisu bitni.

Ako se sa D označi

$$D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0,$$

dobija se jednačina ravni u tzv. opštem obliku:

Opšti oblik jednačine ravni je

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Ako je $D = 0$, onda ravan sadrži koordinatni početak.

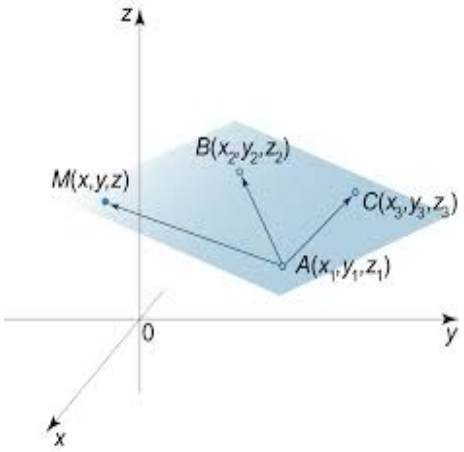
Jednačina ravni je linearna jednačina.

Primer: Da li tačke $A(1, 2, 3)$ i $B(2, 7, 3)$ pripadaju ravni $\alpha : 3x + y + z - 8 = 0$?

Primer: Date su tačke $A(1, 2, -2)$ i $B(7, -4, 4)$. Kroz tačku B postaviti ravan normalnu na vektor $\overrightarrow{AB}$.

$x - y + z - 15 = 0$

- Jednačina ravni je određena sa tri nekolinearne tačke $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ i $C(x_3, y_3, z_3)$ koje pripadaju ravni.



Iz uslova komplanarnosti vektora $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$, gde je $M(x, y, z)$ proizvoljna tačka ravni, dobija se

$$[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) = 0,$$

tj.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

što predstavlja jednačinu ravni kroz tri tačke.

Ako tačke A, B i C odaberemo na koordinatnim osama, tj. uzmemo

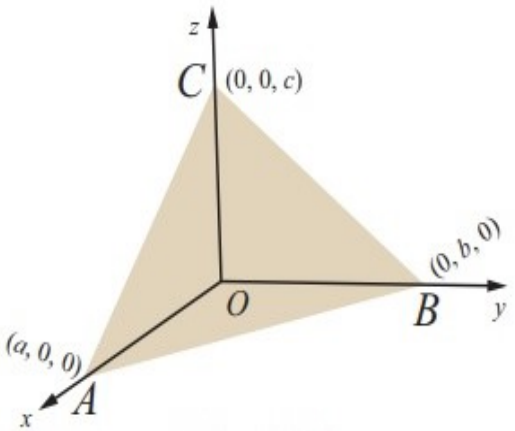
$$A(a, 0, 0), \quad B(0, b, 0), \quad C(0, 0, c)$$

iz poslednje jednačine dobijamo

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad bcx + acy + abz = abc.$$

Deljenjem ove jednačine sa abc dobijamo tzv. **segmentni oblik** jednačine ravni:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Segmentni oblik ravni se može dobiti i iz opšteg oblika jednačine ravni

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

deljenjem sa $-D \neq 0$. Tako dobijamo

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1.$$

Ako stavimo $-\frac{D}{A} = a, -\frac{D}{B} = b$ i $-\frac{D}{C} = c$, sledi

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Primer: Napisati segmentni oblik jednačine ravni koja prolazi kroz tačke $A(1, 0, -1)$, $B(2, 1, 0)$ i $C(0, 0, 3)$.

$$\alpha : \frac{x}{\frac{3}{4}} + \frac{y}{-\frac{3}{5}} + \frac{z}{3} = 1$$

Međusobni položaj dve ravni

Date su ravni

$$\alpha : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{i} \quad \beta : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Njihovi vektori normala su $\vec{n}_\alpha = (A_1, B_1, C_1)$ i $\vec{n}_\beta = (A_2, B_2, C_2)$ redom. Razlikujemo sledeće slučajeve:

- Ravni se **poklapaju**

$$\alpha = \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \quad \vec{n}_\alpha = \lambda \vec{n}_\beta \quad \text{i} \quad D_1 = \lambda\, D_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

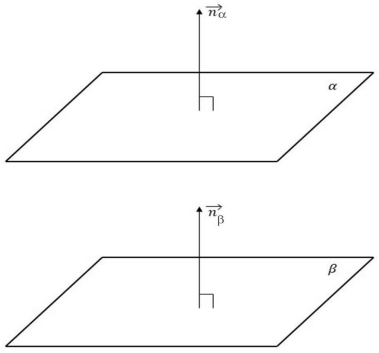
Kada se ravni poklapaju onda se mogu zadati istom jednačinom, tj. množenjem jedne jednačine nekim brojem dobija se druga jednačina. Dakle, sistem koji čine te dve jednačine je dvostruko neodređen.

- Ravni su **paralelne**, tj. nemaju zajedničkih tačaka

$$\alpha || \beta \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \quad \vec{n}_\alpha = \lambda \vec{n}_\beta \quad \text{i} \quad D_1 \neq \lambda\, D_2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Sistem koji čine ove dve jednačine u ovom slučaju je nemoguć.

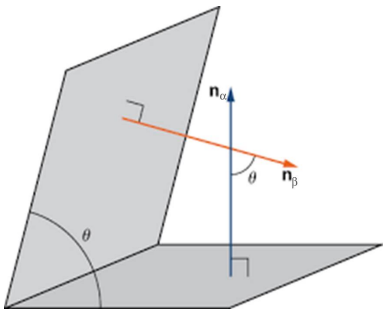


- Ravni se **seku** duž jedne prave

$$\alpha \cap \beta = p \quad \Leftrightarrow \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \quad \text{ili} \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

ako vektori $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$ nisu kolinearni ($\vec{n}_\alpha \neq \lambda \vec{n}_\beta$) ravni α i β se **seku.**



Ugao θ između ravni α i β je ugao između vektora $\vec{n}_\alpha$ i $\vec{n}_\beta$, pri čemu ako je $\frac{\pi}{2} < \angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta) \leq \pi$, onda $\theta = \pi - \angle(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta)$. Dakle, ugao $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ se može odrediti na sledeći način

$$\theta = \arccos \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Primer: Date su ravni $\alpha : x - 2y = 4$ i $\beta : Ax + y + Cz = 0$. Odrediti realne brojeve A i C tako da ravni α i β budu: a) paralelne, b) normalne.

a) $A = -\frac{1}{2}, C = 0$; b) $A = 2, C \in \mathbb{R}$

Primer: Odrediti ugao između ravni $\alpha : 4x-5y+3z-1 = 0$ i $\beta : x-4y-z+9 = 0$.

$\theta = \arccos \frac{7}{10}$

Primer: Odrediti jednačine sledećih ravni:

a) ravni koja prolazi kroz tačku $M(-2, 7, 3)$ i paralelna je ravni $\beta : x - 4y + 5z - 1 = 0$,

b) ravni koja sadrži koordinatni početak i normalna je na ravni $\beta : 2x - y + 5z + 3 = 0$ i $\gamma : x + 3y - z - 7 = 0$.

a) $x - 4y + 5z + 15 = 0$ b) $2x - y - z = 0$

Prava u prostoru

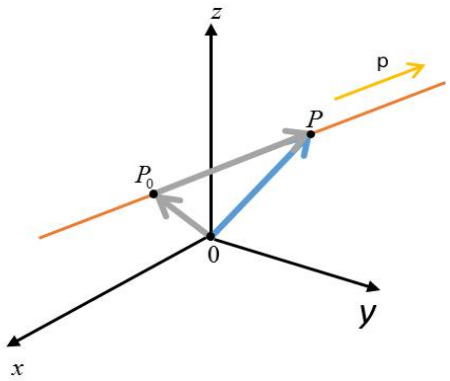
Položaj prave u prostoru može biti određen na više načina. Prava može biti zadata jednom tačkom kroz koju prolazi i vektorom sa kojim je paralelna. Može takođe biti određena presekom dve ravni ili sa dve tačke.

Neka je $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ vektor koji je paralelan sa pravom p i $P_0(x_0, y_0, z_0) = \vec{r_0} = \overrightarrow{0P_0}$ tačka koja joj pripada. Neka je $P(x, y, z) = \vec{r} = \overrightarrow{0P}$ proizvoljna tačka prave p onda važi

$$\overrightarrow{0P} = \overrightarrow{0P_0} + \overrightarrow{P_0P}, \quad \text{gde je} \quad \overrightarrow{P_0P} = t\vec{p},\ t \in \mathbb{R}.$$

Tako dobijamo vektorsku jednačinu prave u parametarskom obliku:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{p}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Uvrštavanjem koordinata vektora u vektorsku jednačinu prave, dobija se

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(p_1, p_2, p_3),$$

tj.

Skalarna jednačina prave u parametarskom obliku

$$p : \begin{cases} x &= x_0 + tp_1, \\ y &= y_0 + tp_2, \\ z &= z_0 + tp_3, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Za razne verdnosti parametar t dobijamo koordinate tačaka na pravoj p.

Ako je $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \neq 0$, iz skalarne jednačine prave sledi

$$\frac{x - x_0}{p_1} = t, \qquad \frac{y - y_0}{p_2} = t, \qquad \frac{z - z_0}{p_3} = t.$$

Eliminacijom parametra t iz ovih jednačina, dobija se

Kanonički oblik jednačine prave:

$$p : \frac{x - x_0}{p_1} = \frac{y - y_0}{p_2} = \frac{z - z_0}{p_3}.$$

Kako je $\vec{p} \neq \vec{0}$, sledi da nisu istovremeno sve koordinate p_1, p_2 i p_3 jednake nuli, ali neke od tih vrednosti mogu biti 0. U tom slučaju pravu u kanoničkom obliku zapisujemo na isti način, s tom razlikom što npr. za $p_1 = 0$, razlomak $\frac{x - x_0}{0}$ predstavlja simbolički razlomak koji zapravo znači da važi $x - x_0 = 0$.

Jednačina prave kroz dve tačke

Neka su date dve tačke $P_1(x_1, y_1, z_1)$ i $P_2(x_2, y_2, z_2)$ prave p. Vektor određen njima je $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{p} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. Kanonička jednačina prave koja prolazi

kroz te dve tačke je data sa

$$p : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Skalarna jednačina u parametarskom obliku:

$$p : \begin{cases} x &= x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Primer: Date su tačke $A(2, -1, -1), B(1, 1, 3), C(3, -1, 1)$ i $D(0, 3, 7)$. Napisati jednačinu prave p koja prolazi kroz tačke A i B, a zatim proveriti da li tačke C i D pripadaju pravoj p.

$p : \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+1}{4},\ C \notin p,\ D \in p$

Primer: Napisati jednačinu prave p koja se nalazi u preseku ravni $\alpha : x - y + z = 3$ i $\beta : 2x + y - z = 0$.

$$p : \frac{x - 1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - 2}{1}$$

Međusobni položaj dve prave

Neka je prava p određena tačkom $P(x_1, y_1, z_1)$ i vektorom pravca $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, a prava q tačkom $Q(x_2, y_2, z_2)$ i vektorom pravca $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$. Razlikujemo slučajeve:

- Prave se **poklapaju** - tada su njihovi vektori pravaca kolinearni, a vektor $\overrightarrow{PQ}$ je takođe kolinearan sa njima, tj.

$$\begin{aligned} p = q \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \quad \vec{p} = \lambda\vec{q} \quad \text{i} \quad \exists m \in \mathbb{R},\ m \neq 0, \quad \overrightarrow{PQ} = m\vec{q} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{p} \times \vec{q} = \vec{0} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{PQ} \times \vec{q} = \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \quad \vec{p} = \lambda\vec{q} \quad \text{i} \quad P \in q. \end{aligned}$$

- Prave su **paralelne** - tada su njihovi vektori pravaca kolinearni, ali vektor $\overrightarrow{PQ}$ nije kolinearan sa njima, tj.

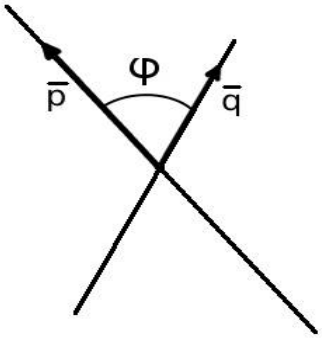
$$\begin{aligned} p||q \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \quad \vec{p} = \lambda\vec{q} \quad \text{i} \quad \forall m \in \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{PQ} \neq m\vec{q} \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{p} \times \vec{q} = \vec{0} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{PQ} \times \vec{q} \neq \vec{0}. \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0, \quad \vec{p} = \lambda\vec{q} \quad \text{i} \quad P \notin q. \end{aligned}$$

- Prave se **seku** - njihovi vektori pravaca nisu kolinearni. Prave koje se seku leže u istoj ravni, tako da su vektori $\vec{p}, \vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ komplanarni, tj.

$$\begin{aligned} p \cap q = \{S\} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad \vec{p} \neq \lambda\vec{q} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \vec{p} \times \vec{q} \neq \vec{0} \quad \text{i} \quad [\overrightarrow{PQ}, \vec{p}, \vec{q}] = 0. \end{aligned}$$

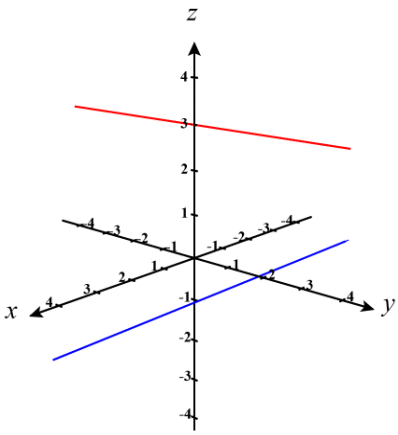
Ugao φ između pravih p i q je ugao između njihovih vektora pravaca, pri čemu je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, što znači da se računa na sledeći način:

$$\varphi = \arccos \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|}.$$



- Prave su **mimoilazne** - ne postoji ravan koja ih obe sadrži. To znači da vektori $\vec{p}, \vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$ nisu komplanarni, tj.

$$\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{p} \times \vec{q}) \neq 0.$$



Rastojanje dve mimoilazne prave se može posmatrati i kao dužina visine paralelopipeda određenog vektorima $\vec{p}, \vec{q}$ i $\overrightarrow{PQ}$:

$$H = \frac{V}{B} = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot (\vec{p} \times \vec{q})|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Primer: Naći tačku preseka pravih $p: \dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z}{2}$ i $q: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z-1}{-1}$ i napisati jednačinu ravni koja je njima određena.

$S(1,-2,0), \quad \alpha: x-2y+3z=5$

Uzajamni položaj prave i ravni

Date su prava i ravan

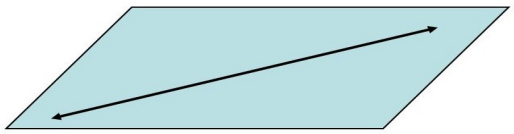
$$p: \frac{x-x_0}{p_1} = \frac{y-y_0}{p_2} = \frac{z-z_0}{p_3}, \qquad \alpha: Ax+By+Cz+D=0.$$

Vektor pravca prave p je $\vec{p}=(p_1,p_2,p_3)$, a vektor normale ravni α je $\vec{n}_\alpha=(A,B,C)$. Neka je $P(x_0,y_0,z_0)$ tačka prave p. Razlikujemo slučajeve:

- Prava p **pripada** ravni α

$$p \subset \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} \perp \vec{n}_\alpha \quad \text{i} \quad P \in \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0 \quad \text{i} \quad Ax_0+By_0+Cz_0+D=0.$$

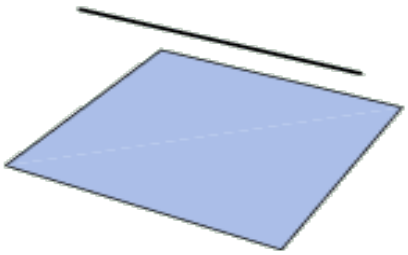


Sistem linearnih jednačina koji čine parametarske jednačine prave i jednačina ravni je u ovom slučaju neodređen.

- Prava p je **paralelna** ravni α

$$p||\alpha \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p}\perp\vec{n}_\alpha \quad \text{i} \quad P \notin \alpha$$

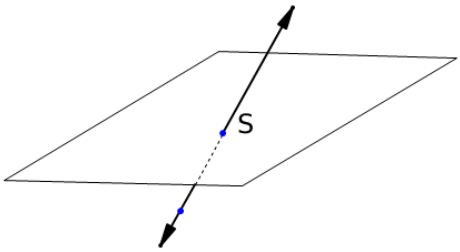
$$\Leftrightarrow \quad \vec{p}\cdot\vec{n}_\alpha = 0 \quad \text{i} \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$



Sistem linearnih jednačina je u ovom slučaju nemoguć.

- Prava p **seče** ravan α u jednoj tački

$$p \cap \alpha = \{S\} \Leftrightarrow \quad \vec{p}\cdot\vec{n}_\alpha \neq 0.$$



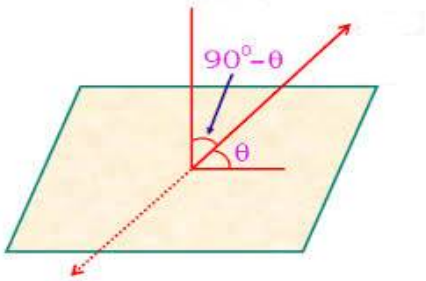
Sistem linearnih jednačina je u ovom slučaju određen.

Ugao θ između prave p i ravni α je ugao koji prava p zaklapa sa svojom projekcijom na ravan α i tada je

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = |\cos\angle(\vec{p}, \vec{n}_\alpha)| = \frac{|\vec{p}\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}||\vec{n}_\alpha|},$$

tj.

$$\theta = \arcsin\frac{|\vec{p}\cdot\vec{n}_\alpha|}{|\vec{p}||\vec{n}_\alpha|}$$



Primer: Naći rastojanje tačke $T(1,0,-1)$ od ravni $\alpha : x - y + z + 3 = 0$.

$T'(0,1,-2),\ |\overrightarrow{TT'}| = \sqrt{3}$

Primer: Naći rastojanje tačke $T(1,0,-1)$ od prave $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z-1}{0}$.

$T'(1,0,1),\ |\overrightarrow{TT'}| = 2$

Primer: Napisati jednačinu prave q koja prolazi kroz tačku $Q(2,-3,0)$, paralelna je ravni $\alpha : 2x + y - z + 5 = 0$ i seče pravu $p : \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+4}{2} = \dfrac{z-5}{-1}$.

$q : \dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z}{1}$

Tema iz analitičke geometrije	**Primena u građevinarstvu**
Vektori u prostoru	Pravci greda, stubova i kablova
Jednačina prave	Ose konstrukcija, grede, stubovi
Jednačina ravni	Zidovi, krovne ravni, ploče
Ugao između pravih	Nagib konstruktivnih elemenata
Ugao između ravni	Nagib krovnih površina
Presek prave i ravni	Prolazak instalacija kroz konstrukciju
Rastojanje tačke od ravni	Provera položaja elemenata
Rastojanje dve prave	Razmak između konstruktivnih elemenata
Površi drugog reda	Rezervoari, kupole, tunelski i lučni oblici