NIZOVI REALNIH BROJEVA

Februar 2023.

Niz je matematički koncept koji opisuje situaciju u kojoj su elementi nekog skupa poređani, tj. indeksirani prirodnim brojevima.

Generalno, niz je preslikavanje koje svakom prirodnom broju (indeksu niza) dodeljuje neku sliku: interval, broj, funkciju. Nas interesuje slučaj kada je kodomen takvog preslikavanja neki podskup skupa $\mathbb{R}$.

Brojni niz je funkcija koja svakom prirodnom broju dodeljuje neki realan broj

$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Tako definisana funkcija će se označavati sa

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{ili samo} \qquad (a_n),$$

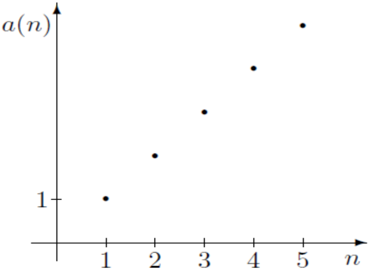
pri čemu je $a_n = a(n)$ **opšti član** tog niza. Elementi niza, tj. brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ se zovu **članovi** niza.

Niz je moguće zadati na različite načine:

- nabrajanjem (npr: $1, 1, 1, 1, \ldots$),
- opisno (niz jedinica; niz parnih brojeva),
- eksplicitnim navođenjem funkcije, odnosno opšteg člana ($a_n = 1,\ n \in \mathbb{N}; \quad a_n = 2n,\ n \in \mathbb{N};\ a_n = n^2 + 1,\ n \in \mathbb{N}$),
- rekurentnom vezom između uzastopnih članova niza ($a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1},\ n \geq 2$)

Primeri:

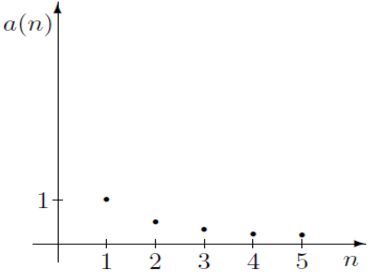
1. Niz prirodnih brojeva počinje članovima $1, 2, 3, \ldots$, a opšti član mu je zadat formulom $a_n = n,\ n \in \mathbb{N}$.



2. Niz kvadrata prirodnih brojeva počinje članovima $1, 4, 9, \ldots$, a opšti član mu je zadat formulom $a_n = n^2,\ n \in \mathbb{N}$.

3. Niz prostih brojeva počinje brojevima $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$, ali za njegov opšti član ne postoji formula.
4. Harmonijski niz počinje brojevima $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ Njegov opšti član je $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, a rekurentna veza

$$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}\right),\ n \geq 2.$$

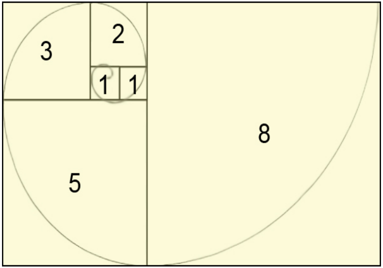


5. Fibonačijev niz se zadaje rekurentnom formulom

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geq 3.$$

Ovaj niz počinje brojevima $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$, a moguće ga je zadati i opštim članom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$



6. Za niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definisan sa

$$a_1 = 2, \quad a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right), \quad n \geq 2,$$

važi: $a_2 = \dfrac{3}{2} = 1,5$, $a_3 = \dfrac{17}{12} = 1,41\dot{6}$,

$$a_4 = \frac{577}{408} = 1,41421\dot{5}68627450980392\dot{1},$$

pa se u tri iteracije dobija približna vrednost broja $\sqrt{2}$ sa pet tačnih cifara iza decimalnog zareza.

Osnovna svojstva nizova

Niz čiji su svi članovi, počevši od nekog člana, jednaki zove se **stacionaran niz**.

Primer: Niz $a_n = \left\lfloor \frac{5}{n} \right\rfloor + 1, \ n \in \mathbb{N}$ je stacionaran ($\lfloor x \rfloor$ je oznaka za najveći ceo broj koji je manji ili jednak sa x).

Niz (a_n) je **rastući** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \leq a_{n+1}$.

Niz (a_n) je **opadajući** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \geq a_{n+1}$.

Niz (a_n) je **strogo rastući** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n < a_{n+1}$.

Niz (a_n) je **strogo opadajući** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n > a_{n+1}$.

Ako je niz (strogo) rastući ili (storogo) opadajući, kažemo da je **MONOTON**.

Niz (a_n) je **pozitivan (negativan)** ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n > 0$ $(a_n < 0)$. Ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \geq 0$ onda je niz (a_n) **nenegativan**.

Primeri:

1. $a_n = n, \;\; n \in \mathbb{N}$

2. $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}, \;\; n \in \mathbb{N}$

3. $a_n = \lfloor \log n \rfloor, \;\; n \in \mathbb{N}$

4. $a_n = (-1)^n, \;\; n \in \mathbb{N}$

Sa svakim nizom (a_n) posmatra se i skup vrednosti članova niza

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ovaj skup može da bude konačan, kao što je to slučaj sa nizom $a_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$. Ovaj niz se sastoji od beskonačno mnogo članova jednakih sa 1 i bekonačno mnogo članova jednakih sa -1. Ali je skup vrednosti ovog niza konačan skup $\{1, -1\}$.

Niz (a_n) je **ograničen sa donje strane** ako postoji broj m_d takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $m_d \leq a_n$.

Niz (a_n) je **ograničen sa gornje strane** ako postoji broj m_g takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \leq m_g$.

Niz (a_n) je **ograničen** ako je ograničen i sa gornje i sa donje strane, tj. ako postoji realan broj $M > 0$ takav da za svako $n \in \mathbb{N}$ važi

$$|a_n| \leq M \qquad \Leftrightarrow \qquad -M \leq a_n \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Primeri:

1. $a_n = \sin \dfrac{\pi}{n},\ n \in \mathbb{N}$
2. $a_n = \sqrt{n},\ n \in \mathbb{N}$

Granična vrednost niza, konvergencija niza

Posmatramo ponašanje nizova (a_n) i (b_n) za velike vrednosti indeksa n

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \qquad\qquad b_n = \frac{n-1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

sa jedne strane, a sa druge strane, vrednosti nizova (c_n), (d_n) i (e_n) zadatih formulama

$$c_n = (-1)^n, \qquad d_n = (-1)^n n, \quad \text{i} \quad e_n = n^2,$$

takođe za velike vrednosti indeksa n.

Za realan broj L i $\varepsilon > 0$ interval $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ je **ε-okolina tačke** L.

Za $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je **tačka nagomilavanja** niza (a_n) ako se u svakoj ε-okolini tačke a nalazi beskonačno mnogo članova niza (a_n).

Primeri:

1. $a_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$
2. $4, 3, 2, 1, 1, ..., 1, ...$
3. $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$
4. $a_n = n^2$
5. $a_n = \cos n$

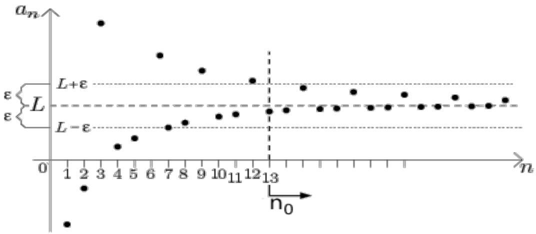
Realan broj L je **granična vrednost** niza (a_n) ako se izvan svake ε-okoline tačke L nalazi najviše konačno mnogo članova niza (a_n), tj. ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji prirodan broj n_0 (koji zavisi od ε) tako da

$$\text{za svaki prirodan broj} \quad n \geq n_0, \quad \text{važi} \quad |a_n - L| < \varepsilon.$$

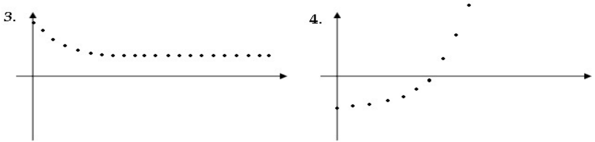
Tada pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

i kažemo da niz (a_n) **konvergira** ka broju L.



Za svaki niz koji ima graničnu vrednost kažemo da je **konvergentan,** u suprotnom kažemo da je **divergentan**.



Primer:

Neka je niz (a_n) dat formulom $a_n = \dfrac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Zaista, uzmimo $\varepsilon > 0$ proizvoljno. Pitanje je: Da li možemo naći $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da važi

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

za svako $n \geq n_0$? Očigledno da je dovoljno uzeti $n_0 = \left\lfloor \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Za malo ε, npr. $\varepsilon = 10^{-100}$, $n_0 = 10^{100} + 1$.

Granična vrednost niza (ako postoji) je i njegova tačka nagomilavanja. Obrnuto ne mora da važi.

Primer: Niz $a_n = n^{(-1)^n}$ ima samo jednu tačku nagomilavanja, ali nije konvergentan.

Svaki ograničen niz koji ima samo jednu tačku nagomilavanja je konvergentan.

Za niz (a_n) kažemo da **divergira u plus beskonačno,** i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

ako za svaki realan broj $M > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom da

$$\text{za svako} \quad n \geq n_0 \quad \text{važi} \qquad a_n > M.$$

Za niz (a_n) kažemo da **divergira u minus beskonačno,** i pišemo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

ako za svaki realan broj $M < 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ sa osobinom da

$$\text{za svako} \quad n \geq n_0 \quad \text{važi} \qquad a_n < M.$$

Niz $a_n = (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}$ je takođe divergentan, ali u širem smislu jer nema graničnu vrednost.

Primer: Niz (a_n) zadat formulom $a_n = n^2, n \in \mathbb{N}$ je divergentan. Važi

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty.$$

Primer: Niz (a_n) zadat formulom $a_n = -n, n \in \mathbb{N}$ je divergentan. Važi

$$\lim_{n\to\infty} (-n) = -\infty.$$

Primer: $\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ 1, & q = 1 \\ \infty, & q > 1 \end{cases}$; Za $q \leq -1$ niz (q^n) je divergentan.

Osobine konvergentnih nizova

- Konvergentan niz ima jedinstvenu graničnu vrednost.
- Konvergentan niz ima samo jednu tačku nagomilavanja i to je njegova granična vrednost.
- Promena konačno mnogo članova niza ne utiče na limes.
- Limes može ali ne mora biti član niza.
- Svaki konvergentan niz je ograničen. Obrnuto ne mora da važi.

Ako su (a_n) **i** (b_n) **konvergentni nizovi**, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ i $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, gde $a, b \in \mathbb{R}$, onda važi:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$;

2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$;

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, ako je $b \neq 0$ i ako za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $b_n \neq 0$;

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$, gde je k neparan broj, ili je k paran broj i za svako $n \in \mathbb{N}$ važi $a_n \geq 0$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^k = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)^k$, gde je $k \in \mathbb{N}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot a$, $\quad c \in \mathbb{R}$.

Primeri:

1. Naći $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{6n-10}{n}\right)$.
2. Naći $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2-5n+2}{n^2+7n-4}\right)$.
3. Naći $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^3+n-2}{3n^2-2n}\right)$.
4. Naći $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{-4n^3+n-2}{3n^2-2n}\right)$.
5. Naći $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n^2+n-2}{3n^3-2n}\right)$.

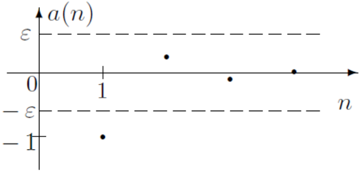
Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan.

Ograničen rastući niz konvergira ka svom supremumu, a ograničen opadajući niz konvergira ka svom infimumu.

Primer: Niz $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right),\ n \in \mathbb{N}$ je ograničen i monotono opadajući. Granična vrednost mu je $\sqrt{2}$.

Konvergentan niz ne mora biti monoton!

$a_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$



Može se pokazati da je niz realnih brojeva (a_n) definisan sa

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

strogo rastući i ograničen $(2 \leq a_n < 3)$, pa ima graničnu vrednost i to je broj koji zovemo e. Dakle,

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,718281828459045235 36$$

n	$(1 + 1/n)^n$
1	2,00000
2	2,25000
5	2,48832
10	2,59374
100	2,70481
1.000	2,71692
10.000	2,71815
100.000	2,71827

Može se pokazati da ako je niz (a_n) takav da važi

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \qquad \text{ili} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

onda važi i

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Primeri:

1. Izračunati $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n}\right)^{2n}$.
2. Izračunati $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$

Još neke osobine **konvergentnih** nizova:

1. Ako je niz (a_n) strogo pozitivan i konvergentan, tj.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0 \qquad \text{i} \qquad a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

   onda važi $\lim\limits_{n\to\infty} \ln a_n = \ln a$.

2. Ako je niz (a_n) konvergentan, onda važi $\lim\limits_{n\to\infty} e^{a_n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$.

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ **i** $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ **(ili** $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$**)** onda važi

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \infty,$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty,$ ako je $b > 0,$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty,$ ako je $b < 0,$

Ako je $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ **i** $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ **(ili** $\lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$**)** onda važi

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = -\infty,$
2. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = -\infty,$ ako je $b > 0,$
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty,$ ako je $b < 0,$

Neka su (a_n) i (b_n) bilo koja dva niza realnih brojeva takva da je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty.$$

Da li se nešto može zaključiti o konvergenciji nizova

$$a)\ \left(\frac{a_n}{b_n}\right) \qquad \text{i} \qquad b)\ (a_n - b_n)?$$

a) U prvom slučaju kažemo da se radi o tzv. neodređenom obliku "$\dfrac{\infty}{\infty}$" jer i brojilac i imenilac divergiraju ka ∞ kada $n \to \infty$.

b) Ovde se radi o tzv. neodređenom obliku "$\infty - \infty$".

Osim ova dva neodređena oblika "$\frac{\infty}{\infty}$" i "$\infty - \infty$", postoje još i sledeći neodređeni oblici

$$"\frac{0}{0}", \quad "0 \cdot \infty", \quad "0^0", \quad "1^\infty", \quad "\infty^0".$$

Primer: Naći graničnu vrednost niza $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

U zadacima se često koriste sledeće granične vrednosti:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0 \\ 1, & \alpha = 0 \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^b q^n = 0, \quad |q| < 1, \quad b \in \mathbb{R}$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{n!} = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 0$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in \mathbb{R}$.

Skala rasta nizova:

$$\ln n \prec n^\alpha \prec n^\beta \prec a^n \prec b^n \prec n! \prec n^n$$

za $0 < \alpha < \beta,\ 1 < a < b$.

Oznaka $\prec$ se čita "sporije raste".

Teorema o uklještenim nizovima

Neka su $(a_n), (b_n)$ i (c_n), $n \in \mathbb{N}$ nizovi realnih brojeva za koje važi

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \qquad a_n \le b_n \le c_n, \qquad \forall n \ge n_0 \qquad \text{i}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A \in \bar{\mathbb{R}}.$$

Tada je $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = A$.

Primeri:

1. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$

2. $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$

3. Odrediti $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{6n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{6n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{6n^2+3n}}\right]$

Definicija:

Niz (a_n) realnih brojeva je Košijev niz ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za svako $m, n \geq n_0$ važi

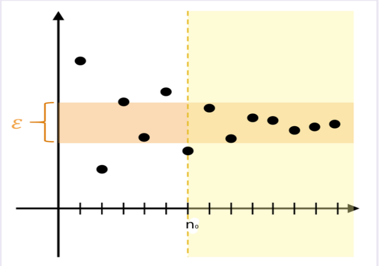
$$|a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Ekvivalentna definicija:

Definicija:

Niz (a_n) realnih brojeva je Košijev niz ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takvo da za svako $n \geq n_0$ važi

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon \qquad \forall p \in \mathbb{N}.$$



Teorema

U skupu $\mathbb{R}$ niz je konvergentan ako i samo ako je Košijev niz.

Ova teorema daje potreban i dovoljan uslov za konvergenciju niza u kom figurišu samo članovi niza.