

1. Brojni nizovi

1.1. Konvergencija nizova

Definicija 1.1. Proizvoljno preslikavanje $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nazivamo realni niz, dok njegovu vrednost $a(n) = a_n$ nazivamo opšti ili n -ti član niza.

Definicija 1.2. Broj $a \in \mathbb{R}$ je **granična vrednost niza** $\{a_n\}$ u skupu realnih brojeva \mathbb{R} ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon).$$

Tada pišemo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Definicija 1.3. Za $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je **tačka nagomilavanja niza** $\{a_n\}$ ako se za svako $\varepsilon > 0$ u $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nalazi beskonačno mnogo članova niza.

Osobine graničnih vrednosti nizova

Za $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ gde su $a, b \in \mathbb{R}$ važi:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \pm b$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c \cdot a$, gde je $c \in \mathbb{R}$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}$, gde je $b, b_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Neke poznate granične vrednosti

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$;
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, za $a > 0$;
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, za $\alpha \in \mathbb{R}, a > 0$;
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} 0 & , \alpha > 0, \\ 1 & , \alpha = 0, \\ \infty & , \alpha < 0, \end{cases}$
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, za $a > 0$;
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$;
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$;
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0 & , |q| < 1, \\ 1 & , q = 1, \\ \infty & , q > 1, \\ \text{ne postoji} & , q \leq -1. \end{cases}$

Granične vrednosti neodređenog tipa

„ $\frac{0}{0}$ “, „ $\frac{\infty}{\infty}$ “, „ $0 \cdot \infty$ “, „ $\infty - \infty$ “, „ 1^∞ “, „ ∞^0 “, „ 0^0 “.

Zadatak 1.4. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 4}{5n^3 + 3n^2 + 1}, \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n + 1}{5n^3 + 2n^2 + 3}, \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n + 4}{3n^2 + 1}.$$

Rešenje.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 - 3n + 4}{5n^3 + 3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{n} - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{5 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{0}{5} = 0,$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 - 2n + 1}{5n^3 + 2n^2 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{5 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^3}} = \frac{4}{5},$$

$$c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n + 4}{3n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{n^2} + \frac{4}{n^3}}{\frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{5}{0} = \infty.$$

Na osnovu prethodnog primera možemo zaključiti da ako su

$$P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \text{ i } Q_m(n) = b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0$$

polinomi k -tog, odnosno m -tog stepena, važi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(x)}{Q_m(x)} = \begin{cases} 0 & , m > k, \\ \frac{a_k}{b_k} & , m = k, \\ \pm\infty & , m < k. \end{cases}$$

Zadatak 1.5. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{5n^2 + n} \right)^n, \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3 + 2}{5n^3} \right)^{n^3}, \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n + 1} \right)^{2n}.$$

Napomena. Ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, tada je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} = e$.

Takođe, ako je $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ za $b \in \overline{\mathbb{R}}$, tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{a_n} \right)^{a_n} \right)^{b_n} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = e^b.$$

Rešenje.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{5n^2 + n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5} \right)^n = 0.$$

$$\begin{aligned} b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^3 + 2}{5n^3} \right)^{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{5n^3} \right)^{n^3} = \text{„}1^\infty\text{” - neodređen izraz} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5n^3}{2}} \right)^{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5n^3}{2}} \right)^{\frac{5n^3}{2} \cdot \frac{2}{5n^3} \cdot n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{5n^3}{2}} \right)^{\frac{5n^3}{2}} \right)^{\frac{2}{5}}}_{\rightarrow e} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{2}{5}} = e^{\frac{2}{5}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n + 3}{2n + 1} \right)^{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n + 1} \right)^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{2n+1}{2} \cdot \frac{2}{2n+1} \cdot 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\left(1 + \frac{1}{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{2n+1}{2}} \right)^{\frac{4n}{2n+1}}}_{\rightarrow e} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{2n+1}} = e^2. \end{aligned}$$

Zadatak 1.6. Izračunati $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^n - 5^n}$.

Rešenje.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^n - 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \left(\left(\frac{3}{5} \right)^{n+1} + 1 \right)}{5^n \left(\left(\frac{3}{5} \right)^n - 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \left(\underbrace{\left(\frac{3}{5} \right)^{n+1}}_{\rightarrow 0} + 1 \right)}{\underbrace{\left(\frac{3}{5} \right)^n}_{\rightarrow 0} - 1} = -5.$$

Zadatak 1.7. Izračunati sledeće granične vrednosti:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n+1)!}$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$, c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1)}{n^3}$.

Rešenje.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)!}{(n+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! + (n+1)n(n-1)!}{(n+1)n(n-1)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! (1 + n(n+1))}{(n-1)! n(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\rightarrow 0} + \dots + \underbrace{\frac{n-1}{n^2}}_{\rightarrow 0} \right) &= „0 \cdot \infty” = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + (n-1)}{n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Napomena. Zbir prvih n brojeva je dat sa

$$\boxed{1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1)}{n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (1+1) + 2 \cdot (2+1) + \dots + n \cdot (n+1)}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\underbrace{1 + 2 + \dots + n}_{\text{zbir prvih } n \text{ brojeva}} + \underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}_{\text{zbir kvadrata prvih } n \text{ brojeva}}}{n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}{n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n(n+1)(n+2)}{6n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n + 2}{3n^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Napomena. Zbir kvadrata prvih n brojeva je dat sa

$$\boxed{1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.}$$

Zadatak 1.8. Izračunati sledeće granične vrednosti:

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n - 5} - 2n), \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}), \quad \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n}).$$

Rešenje.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n - 5} - 2n) &= „\infty - \infty” - \text{ neodređen izraz} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + 3n - 5} - 2n) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 + 3n - 5} + 2n}{\sqrt{4n^2 + 3n - 5} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n - 5 - 4n^2}{\sqrt{4n^2 + 3n - 5} + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n - 5}{\sqrt{n^2(4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2})} + 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(3 - \frac{5}{n})}{n(\sqrt{4 + \frac{3}{n} - \frac{5}{n^2}} + 2)} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}) &= „\infty - \infty” - \text{ neodređen izraz} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}) \cdot \frac{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \sqrt{n} - n + \sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n}} + \sqrt{n - \sqrt{n}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}(\sqrt{1 + \frac{\sqrt{n}}{n}} + \sqrt{1 - \frac{\sqrt{n}}{n}})} = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + n}) &= „\infty - \infty” - \text{ neodređen izraz} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2 + 1} - n + n - \sqrt[3]{n^3 + n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt{n^2 + 1} - n) + \lim_{n \rightarrow \infty} n (n - \sqrt[3]{n^3 + n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} + \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n - \sqrt[3]{n^3 + n})(n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt[3]{(n^3 + n)^2})}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt[3]{(n^3 + n)^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^2 + 1 - n^2)}{\sqrt{n^2 + 1} + n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n^3 - (n^3 + n))}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt[3]{(n^3 + n)^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1} + n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n^2 + n\sqrt[3]{n^3 + n} + \sqrt[3]{(n^3 + n)^2}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1)} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2}{n^2(1 + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n^2}} + \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{n^2})^2})} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Zadatak 1.9. Izračunati: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + n})$, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n})$.

Rešenje.

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2 + n}) = „\sin \infty” \rightarrow \text{ ne postoji}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+n} \pm n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\underbrace{\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi}_{\alpha} + \underbrace{n\pi}_{\beta}\right) \\
&\quad \left[\text{Koristimo: } \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) \underbrace{\cos n\pi}_{=(-1)^n} + \cos(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) \underbrace{\sin n\pi}_{=0} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(-1)^n}_{a_n} \underbrace{\sin(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi)}_{b_n}.
\end{aligned}$$

Ovde ne možemo primeniti $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, jer $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ ne postoji. Međutim, posmatraćemo posebno niz b_n i kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left[\pi(\sqrt{n^2+n} - n) \cdot \frac{(\sqrt{n^2+n} + n)}{(\sqrt{n^2+n} + n)}\right] \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi(n^2 + n - n^2)}{\sqrt{n^2+n} + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n} + n} \\
&= \sin \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n} + n} = \sin \frac{\pi}{2} = 1,
\end{aligned}$$

sledi da ni $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi)$ ne postoji.

b) Analogno, kao i prethodnom zadatku, dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n} - n\pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \frac{\pi}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Zadatak 1.10. Dat je niz sa opštim članom

$$a_n = n - 1 - \sqrt{pn^2 + qn},$$

gde su $p, q \in \mathbb{R}$, $p > 0$. U zavisnosti od p i q odrediti kada ovaj niz:

- konvergira,
- divergira.

U slučaju konvergencije, odrediti kada ovaj niz konvergira ka nuli, a kada broju različitom od nule.

Rešenje.

Kako je

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - 1 - \sqrt{pn^2 + qn} \right) \cdot \frac{n - 1 + \sqrt{pn^2 + qn}}{n - 1 + \sqrt{pn^2 + qn}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)^2 - (pn^2 + qn)}{n - 1 + \sqrt{pn^2 + qn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 2n + 1 - pn^2 - qn}{n - 1 + \sqrt{pn^2 + qn}} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1-p)n^2 - (2+q)n + 1}{n - 1 + \sqrt{pn^2 + qn}},
\end{aligned}$$

dobijamo da

- za $p = 1$ i sve $q \in \mathbb{R}$ niz konvergira,
- za $p \neq 1$ i sve $q \in \mathbb{R}$ niz divergira.

U nastavku posmatramo slučaj kada je $p = 1$, dobijamo da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(2+q)n+1}{n-1+\sqrt{n^2+qn}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(-2+q)n+\frac{1}{n}}{n(1-\frac{1}{n}+\sqrt{1+\frac{q}{n}})} = \frac{-(2+q)}{2}.$$

Primetimo da konvergencija niza ne zavisi od q , dok je granična vrednost niza $\{a_n\}$ za $p = 1$ i $q = -2$ jednaka 0, a za $p = 1$ i $q \neq -2$ jednaka broju A , $A \neq 0$.

1.2. Ograničeni i monotoni nizovi

Definicija 1.11. Za realni niz $\{a_n\}$ kažemo da je

- **ograničen sa gornje strane** ako postoji realan broj M takav da je $a_n \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Broj M nazivamo gornje ograničenje niza $\{a_n\}$;
- **ograničen sa donje strane** ako postoji realan broj m takav da je $a_n \geq m$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Broj m nazivamo donje ograničenje niza $\{a_n\}$;
- **ograničen** ako postoje realni brojevi $m, M \in \mathbb{R}$ takvi da za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $m \leq a_n \leq M$.

Svaki konvergentan niz je ograničen. Obratno ne mora da važi.

Definicija 1.12. Broj s je **supremum niza** $\{a_n\}$, u oznaci $s = \sup\{a_n\}$, ako važi:

1. $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \leq s$,
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(a_{n_0} > s - \varepsilon)$.

Supremum niza je njegovo najmanje gornje ograničenje.

Definicija 1.13. Broj i je **infimum niza** $\{a_n\}$, u oznaci $i = \inf\{a_n\}$, ako važi:

1. $(\forall n \in \mathbb{N}) a_n \geq i$,
2. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(a_{n_0} < i + \varepsilon)$.

Infimum niza je njegovo najveće donje ograničenje.

Definicija 1.14. Za realni niz $\{a_n\}$ kažemo da je

- **monotono rastući** ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n < a_{n+1}$;
- **monotono neopadajući** ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n \leq a_{n+1}$;
- **monotono nerastući** ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n \geq a_{n+1}$;
- **monotono opadajući** ako za sve $n \in \mathbb{N}$ važi da je $a_n > a_{n+1}$.

Teorema 1.15. *Svaki monoton i ograničen niz je konvergentan. Specijalno:*

- 1) *monotono rastući (neopadajući) niz koji je ograničen sa gornje strane, konvergira svom supremumu;*
- 2) *monotono opadajući (nerastući) niz koji je ograničen sa donje strane, konvergira svom infimumu.*

Zadatak 1.16. Ispitati monotonost, ograničenost, supremum, infimum, tačke nagomilavanja i graničnu vrednost (ukoliko postoji) za niz $\{a_n\}$ čiji je opšti član niza dat sa

$$a_n = \frac{3n-1}{5n+1}.$$

Rešenje. Kako je

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+1} - \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3n+2}{5n+6} - \frac{3n-1}{5n+1} \\ &= \frac{(3n+2)(5n+1) - (5n+6)(3n-1)}{(5n+6)(5n+1)} \\ &= \frac{8}{(5n+6)(5n+1)} > 0, \end{aligned}$$

dobijamo da je niz monotono rastući, a samim tim $a_n \geq a_1 = \frac{1}{3}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je ograničen i sa donje strane. Primetimo da je imeniilac veći od brojioca, pa je i $a_n < 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Dakle, niz je ograničen.

Iz monotonosti i ograničenosti sledi da je niz konvergentan i pri tome je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{3n-1}{5n+1} = \frac{3}{5}.$$

Jedina tačka nagomilavanja je $\frac{3}{5}$, supremum $\sup\{a_n\} = \frac{3}{5}$ i infimum $\inf\{a_n\} = \frac{1}{3}$.

Zadatak 1.17. Za prethodni primer odrediti počev od kog člana se svi naredni nalaze u ε -okolini granične vrednosti za $\varepsilon = 0.1$.

Rešenje. Posmatramo za koje vrednosti n će važiti $|a_n - a| < \varepsilon$, odnosno za koje vrednosti n važi

$$\left| \frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| < 0.1.$$

Pošto je

$$\begin{aligned} \left| \frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| < 0.1 &\Leftrightarrow \left| \frac{15n-5-15n-3}{5(5n+1)} \right| < \frac{1}{10} \Leftrightarrow \left| -\frac{8}{5(5n+1)} \right| < \frac{1}{10} \\ &\Leftrightarrow \frac{8}{5(5n+1)} < \frac{1}{10} \Leftrightarrow 16 < 5n+1 \Leftrightarrow 5n > 15 \Leftrightarrow n > 3, \end{aligned}$$

dobijamo da za sve $n > 3$ važi nejednakost, odnosno počevši od $n_0 := 4$ svi naredni članovi niza se nalaze u ε -okolini.

Napomena. Broj n_0 zavisi od ε i on pokazuje koliko se članova niza nalazi izvan ε -okoline tačke a . Da bismo videli tu zavisnost, pretpostavimo da nam vrednost za ε nije data u zadatku. U tom slučaju potrebno je odrediti prvi prirodan broj za koji važi

$$\left| \frac{3n-1}{5n+1} - \frac{3}{5} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{8}{5(5n+1)} < \varepsilon \Leftrightarrow 5n+1 > \frac{8}{5\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{5} \left(\frac{8}{5\varepsilon} - 1 \right).$$

U opštem slučaju broj $\frac{1}{5} \left(\frac{8}{5\varepsilon} - 1 \right)$ nije prirodan broj. Dakle, prvi prirodan broj veći od njega je dat sa

$$n_0 = \left\lceil \frac{1}{5} \left(\frac{8}{5\varepsilon} - 1 \right) \right\rceil + 1.$$

Funkcija $\lceil \cdot \rceil$ je najveće donje celo - $\lfloor x \rfloor$ je najveći prirodan broj koji je manji ili jednak sa x .

1.3. Teorema o uklještenju

Teorema 1.18. Neka su $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ i $\{c_n\}$ realni nizovi. Ako važi:

(1) $a_n \leq c_n \leq b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ su konvergentni i pri tome je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$.

Tada je niz $\{c_n\}$ konvergentan i $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$.

Zadatak 1.19. Pokazati da je niz $\{c_n\}$ čiji je opšti član $c_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}$ konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Pošto je

$$3^n \leq 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n,$$

sledi

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot 3^n},$$

odnosno

$$3 \leq \sqrt[n]{2^n + 3^n} \leq 3 \sqrt[n]{2}.$$

S obzirom da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3 \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \sqrt[n]{2} = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} = 3 \cdot 1 = 3,$$

ispunjena su oba uslova teoreme o uklještenju, pa je niz $\{c_n\}$ konvergentan i važi $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 3$.

Zadatak 1.20. Pokazati da je niz $\{c_n\}$ dat sa opštim članom

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Pre svega, primetimo da je

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\sqrt{1^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ c_2 &= \frac{1}{\sqrt{2^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2^2+2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ c_3 &= \frac{1}{\sqrt{3^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+3}} = \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}}, \\ &\vdots \\ c_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}, \end{aligned}$$

odnosno, n -ti član niza c_n ima n sabiraka. Kako je

$$\underbrace{n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\text{kandidat za } a_n} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}}_{\substack{\text{najveći sabirak} \\ \text{najmanji sabirak} \\ \text{\small } n \text{ sabiraka}}} \leq \underbrace{n \cdot \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}}_{\text{kandidat za } b_n},$$

dobijamo da je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je uslov (1) iz teoreme o uklještenju ispunjen. Takođe, važi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = 1, \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = 1,$$

tj. imamo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$, pa je i uslov (2) iz teoreme o uklještenju ispunjen. Dakle, na osnovu teoreme o uklještenju niz $\{c_n\}$ je konvergentan i važi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$.

Zadatak 1.21. Pokazati da je niz $\{c_n\}$ dat sa opštim članom

$$c_n = \frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^6+5n^2}}$$

konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Kako je

$$a_n = \frac{5n^2}{\sqrt[3]{8n^6 + 5n^2}} \leq \underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{8n^6 + 1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^6 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{8n^6 + 5n^2}}}_{5n^2 \text{ sabiraka}} \leq \frac{5n^2}{\sqrt[3]{8n^6 + 1}} = b_n,$$

imamo da je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Takođe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{\sqrt[3]{8n^6 + 5n^2}} = \frac{5}{2} \quad \text{i} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2}{\sqrt[3]{8n^6 + 1}} = \frac{5}{2},$$

pa na osnovu teoreme o uklještenju dobijamo da je i niz $\{c_n\}$ konvergentan i pri tome je $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{5}{2}$.

Zadatak 1.22. Pokazati da je niz $\{a_n\}$ dat sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{\sqrt[7]{n^{14} + 2}} + \frac{1}{\sqrt[7]{n^{14} + 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[7]{n^{14} + 2n^2}}$$

konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Primitimo da je opšti član niza $\{a_n\}$ dat kao zbir $2n^2 - 1$ sabiraka od kojih je prvi sabirak najveći, a poslednji najmanji, pa važi:

$$b_n = \frac{2n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} + 2n^2}} \leq a_n \leq \frac{2n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} + 2}} = c_n.$$

Kako je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} + 2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 \sqrt[7]{1 + \frac{2}{n^{12}}}} = 2$$

i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{\sqrt[7]{n^{14} + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2 \sqrt[7]{1 + \frac{2}{n^{14}}}} = 2,$$

važi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 2.$$

Na osnovu teoreme o uklještenim nizovima sledi da je niz $\{a_n\}$ konvergentan i da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

1.4. Granična vrednost rekursivno zadatih nizova

Zadatak 1.23. Dokazati da je niz $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dat sa

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = x_n^2$$

konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Prvo ćemo pokazati da za sve članove niza važi $0 < x_n < 1$.

Ograničenost:

BI Za $n = 1$ je $x_1 = \frac{1}{2}$, pa je zadovoljeno $0 < x_1 < 1$.

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $0 < x_k < 1$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $0 < x_{k+1} < 1$.
Iz indukcijske hipoteze dobijamo

$$0 < x_{k+1} = x_k^2 < x_k < 1.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{x_n\}$ ograničen.

Pokažimo sada da je niz monotono opadajući.

Monotonost:

Primitimo da je $x_1 = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = x_1^2 = x_2$, pa važi $x_1 > x_2$.

Treba pokazati da važi $x_k > x_{k+1}$ za svako $k \in \mathbb{N}$,

$$x_{k+1} - x_k = x_k^2 - x_k = (x_k - 1)x_k < 0,$$

jer je $0 < x_k < 1$, za sve $k \in \mathbb{N}$. Dakle, niz je monotono opadajući.

Kako je niz je monotono opadajući i ograničen sa donje strane, sledi da je konvergentan i da konvergira ka svom infimumu.

Konvergenција:

Neka je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Iz

$$x_{n+1} = x_n^2$$

sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^2,$$

odnosno

$$x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1,$$

a kako je niz opadajući, sledi da je

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = 0.}$$

Zadatak 1.24. Pokazati konvergenciju i odrediti graničnu vrednost niza

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 > 2.$$

Rešenje. Dokazaćemo da je niz monotono opadajući i ograničen sa donje strane brojem 2.

Monotonost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati $a_1 > a_2$,

$$a_2 = \sqrt{2 + a_1} < \sqrt{a_1 + a_1} = \sqrt{2a_1} < \sqrt{a_1^2} = a_1.$$

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_{k-1} > a_k$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_k > a_{k+1}$.

Iz indukcijske hipoteze dobijamo

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + a_{k-1}} = a_k.$$

Dakle, niz je monotono opadajući.

Ograničenost:

BI Za $n = 1$ je $a_1 > 2$ po pretpostavci.

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_k > 2$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_{k+1} > 2$.
Iz indukcijske hipoteze dobijamo

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} > \sqrt{2 + 2} = 2,$$

pa je niz ograničen.

Iz monotonosti i ograničenosti sledi da je niz konvergentan, tj. postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Konvergenција:

Neka je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Kako je

$$a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \sqrt{2 + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n},$$

sledi

$$\begin{aligned} A = \sqrt{2 + A} &\Leftrightarrow A^2 - A - 2 = 0 \wedge A > 0 \\ &\Leftrightarrow (A_1 = 2 \vee A_2 = -1) \wedge A > 0 \\ &\Rightarrow A = 2. \end{aligned}$$

Prema tome,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2.}$$

Zadatak 1.25. Neka je niz $\{a_n\}$ dat sa

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 3 \cdot \frac{2a_n + 1}{a_n + 4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pokazati da je niz $\{a_n\}$ konvergentan i naći njegovu graničnu vrednost.

Rešenje. Prva tri člana niza su

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{9}{5}, \quad a_3 = 3 \cdot \frac{2a_2 + 1}{a_2 + 4} = 3 \cdot \frac{2 \cdot \frac{9}{5} + 1}{\frac{9}{5} + 4} = \frac{69}{29}, \dots$$

Očigledno je da je niz $\{a_n\}$ niz pozitivnih brojeva, tj. $\boxed{a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}}$.

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući.

Monotonost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati $a_2 > a_1$,

$$a_1 = 1 < \frac{9}{5} = a_2.$$

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_k > a_{k-1}$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_{k+1} > a_k$, odnosno da je

$$a_k < a_{k+1} \Leftrightarrow a_{k+1} - a_k > 0.$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot \frac{2a_k + 1}{a_k + 4} - 3 \cdot \frac{2a_{k-1} + 1}{a_{k-1} + 4} &= 3 \cdot \frac{(2a_k + 1)(a_{k-1} + 4) - (2a_{k-1} + 1)(a_k + 4)}{(a_{k-1} + 4)(a_k + 4)} \\ &= 3 \cdot \frac{2a_k a_{k-1} + 8a_k + a_{k-1} + 4 - (2a_k a_{k-1} + 8a_{k-1} + a_k + 4)}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} \\ &= 3 \cdot \frac{7a_k - 7a_{k-1}}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} = \frac{21(a_k - a_{k-1})}{(a_k + 4)(a_{k-1} + 4)} > 0. \end{aligned}$$

Dakle, niz je monotono rastući, odnosno $\boxed{a_n \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}}$.

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane brojem 3.

Ograničenost:

BI Za $n = 1$ je $a_1 < 3$.

IH Pretpostavimo da za neko $n = k$ važi $a_k < 3$.

IK Treba pokazati da za $n = k + 1$ važi $a_{k+1} < 3$.

$$a_k < 3 \Rightarrow a_k = 3 - \delta, \delta > 0$$

$$a_{k+1} = 3 \cdot \frac{2a_k + 1}{a_k + 4} = 3 \cdot \frac{2(3 - \delta) + 1}{3 - \delta + 4} = 3 \cdot \underbrace{\frac{7 - 2\delta}{7 - \delta}}_{< 1} < 3.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane, tj.

$$\boxed{a_n < 3, \forall n \in \mathbb{N}}.$$

Iz monotonosti i ograničenosti sledi da je niz konvergentan, tj. postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Konvergenција:

Neka je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A.$$

Iz

$$a_{n+1} = 3 \cdot \frac{2a_n + 1}{a_n + 4}$$

sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 3 \cdot \frac{2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + 4},$$

odnosno

$$A = 3 \cdot \frac{2A + 1}{A + 4} \Leftrightarrow A^2 + 4A = 6A + 3 \Leftrightarrow A^2 - 2A - 3 = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su:

$$A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2},$$

odnosno

$$A_1 = -1 \text{ i } A_2 = 3.$$

Kako je $a_n > 0$, sledi da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq 0$, odnosno $A \geq 0$. Dakle,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3.}$$

Zadatak 1.26. Neka je niz $\{a_n\}$ definisan na sledeći način

$$a_1 = \frac{c}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}, \quad c \in \mathbb{R}^+.$$

- Pokazati da je niz monotono rastući.
- Dokazati da je niz konvergentan ako i samo ako $c \in (0, 1]$ i naći njegovu graničnu vrednost.

Rešenje.

- Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući.

Monotonost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_2 - a_1 > 0$,

$$a_2 = \frac{c}{2} + \frac{a_1^2}{2} = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} \Rightarrow a_2 - a_1 = \frac{c}{2} + \frac{c^2}{8} - \frac{c}{2} = \frac{c^2}{8} > 0.$$

IH Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k - a_{k-1} > 0$.

IK Za $n = k + 1$ treba pokazati da je $a_{k+1} - a_k > 0$,

$$a_{k+1} - a_k = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} - \left(\frac{c}{2} + \frac{a_{k-1}^2}{2} \right) = \frac{a_k^2 - a_{k-1}^2}{2} = \frac{(a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1})}{2} > 0,$$

zbog IH i zbog $a_n > 0$, za sve $n \in \mathbb{N}$.

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je niz $\{a_n\}$ monotono rastući, odnosno važi $\boxed{a_n < a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}}$.

b) Pokažimo da je niz konvergentan ako i samo ako $c \in (0, 1]$.

(\Rightarrow) Ako je niz konvergentan ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$), onda $c \in (0, 1]$.

Iz $a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}$ sledi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2,$$

odnosno

$$A = \frac{c}{2} + \frac{A^2}{2} \Leftrightarrow A^2 - 2A + c = 0.$$

Rešenja poslednje jednačine su:

$$A_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4c}}{2} = 1 \pm \sqrt{1 - c}.$$

Da bi ova rešenja bila realna mora da važi:

$$1 - c \geq 0 \Rightarrow c \leq 1 \wedge c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow c \in (0, 1].$$

(\Leftarrow) Ako $c \in (0, 1]$, onda je niz konvergentan.

Pokažimo da je niz $\{a_n\}$ ograničen sa gornje strane.

Ograničenost:

BI Za $n = 1$ treba pokazati da je $a_1 < 1$,

$$a_1 = \frac{c}{2} \leq \frac{1}{2} < 1.$$

IH Za $n = k$ pretpostavimo da važi $a_k < 1$.

IK Za $n = k + 1$ treba pokazati da je $a_{k+1} < 1$,

$$a_{k+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_k^2}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{a_k^2}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Na osnovu principa matematičke indukcije možemo tvrditi da je $\boxed{a_n < 1, \forall n \in \mathbb{N}}$.

Kako je niz $\{a_n\}$ monoton i ograničen, sledi da je niz $\{a_n\}$ konvergentan, tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$.

Konvergenција:

Moguće granične vrednosti su:

$$A_1 = 1 + \sqrt{1 - c} \geq 1 \quad \text{i} \quad A_2 = 1 - \sqrt{1 - c} \leq 1.$$

Pošto je $a_n < 1$ za svako $n \in \mathbb{N}$, sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 - \sqrt{1 - c}.$$

1.5. Košijevi nizovi

Definicija 1.27. Niz $\{a_n\}$ je **Košijev niz** ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, m \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon).$$

Definicija 1.28. Niz $\{a_n\}$ je **Košijev niz** ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Svaki konvergentan niz je Košijev.

U metričkom prostoru \mathbb{R} važi: niz $\{a_n\}$ je Košijev ako i samo ako je konvergentan.

Zadatak 1.29. Pokazati da je niz $\{a_n\}$ sa opštim članom

$$a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2}$$

Košijev.

Rešenje. Niz $\{a_n\}$ je Košijev ako važi:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Tada za bilo koja dva prirodna broja n i p važi:

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| 1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} - \left(1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right) \right| \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2} \\ &\quad \left[\text{iskoristimo nejednakost: } \frac{1}{(n+i)^2} < \frac{1}{(n+i-1) \cdot (n+i)} \right] \\ &< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} \\ &\quad \left[\text{svaki sabirak predstavimo kao } \frac{1}{(n+i)(n+i+1)} = \frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+i+1} \right] \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-2} - \frac{1}{n+p-1} + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Prethodna procena pokazuje da je $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$ za sve $n, p \in \mathbb{N}$ takve da je

$$n \geq n_0(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Zadatak 1.30. Neka je opšti član niza $\{a_n\}$ dat sa

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Pokazati da je niz $\{a_n\}$ divergentan.

Rešenje.

Pokazaćemo da niz $\{a_n\}$ nije Košijev, odnosno da važi

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \wedge |a_{n+p} - a_n| \geq \varepsilon).$$

Kako je

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right| \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}, \end{aligned}$$

za $p = n$ se dobija

$$|a_{2n} - a_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Dakle, niz $\{a_n\}$ nije Košijev, pa nije ni konvergentan.

Zadatak 1.31. Koristeći Košijev kriterijum ispitati da li je niz $\{c_n\}$ s opštim članom

$$c_n = \frac{\cos 27}{1 \cdot 2} + \frac{\cos 27^2}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{\cos 27^n}{n \cdot (n+1)}$$

konvergentan.

Rešenje. Niz $\{c_n\}$ je Košijev ako važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |c_{n+p} - c_n| < \varepsilon).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Tada za bilo koja dva prirodna broja n i p važi:

$$\begin{aligned} |c_{n+p} - c_n| &= \left| \frac{\cos 27^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2)} + \frac{\cos 27^{n+2}}{(n+2) \cdot (n+3)} + \dots + \frac{\cos 27^{n+p}}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \right| \\ &\quad \text{[iskoristimo nejednakost trougla: } |A+B| \leq |A|+|B|\text{]} \\ &\leq \left| \frac{\cos 27^{n+1}}{(n+1) \cdot (n+2)} \right| + \dots + \left| \frac{\cos 27^{n+p}}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \right| \\ &\quad \text{[iskoristimo ograničenost funkcije: } |\cos x| \leq 1\text{]} \\ &\leq \frac{1}{(n+1) \cdot (n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p) \cdot (n+p+1)} \\ &\quad \left[\text{svaki sabirak predstavimo kao } \frac{1}{(n+i)(n+i+1)} = \frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+i+1} \right] \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1} \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Prethodna procena pokazuje da je $|c_{n+p} - c_n| < \varepsilon$ za sve $n, p \in \mathbb{N}$ takve da je

$$n \geq n_0(\varepsilon) := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1.$$

Dokazali smo da je niz $\{c_n\}$ Košijev, te sledi da je niz konvergentan.

Zadatak 1.32. Neka je opšti član niza $\{b_n\}$ dat sa

$$b_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n}.$$

Pomoću Košijevog kriterijuma pokazati da je niz $\{b_n\}$ divergentan.

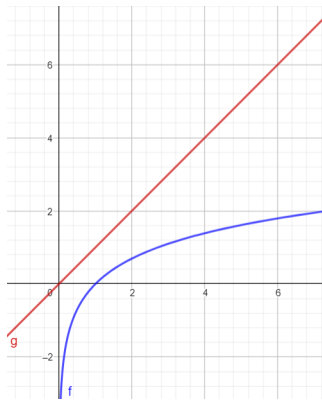
Rešenje.

Pokazaćemo da niz $\{b_n\}$ nije Košijev, odnosno da važi

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \wedge |b_{n+p} - b_n| \geq \varepsilon).$$

Za proizvoljne $n, p \in \mathbb{N}$ važi

$$\begin{aligned} |b_{n+p} - b_n| &= \left| \frac{1}{\ln 2} + \dots + \frac{1}{\ln n} + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} - \left(\frac{1}{\ln 2} + \dots + \frac{1}{\ln n} \right) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} \right| \\ &\quad \text{[iskoristimo: } \ln x \geq 0 \text{ za } x \geq 1\text{]} \\ &= \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \dots + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p} \end{aligned}$$



Za $p = n$ važi

$$|b_{2n} - b_n| > \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}.$$

Kako niz $\{b_n\}$ nije Košijev, sledi da niz $\{b_n\}$ nije konvergentan.

Zadatak 1.33. Neka je opšti član niza $\{a_n\}$ dat sa

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Pomoću Košijevog kriterijuma pokazati da je niz $\{a_n\}$ konvergentan.

Rešenje.

Pokazaćemo da je niz $\{a_n\}$ Košijev, odnosno da važi

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon).$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj. Tada za bilo koja dva prirodna broja n i p važi:

$$\begin{aligned}
 |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\sin 1}{2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} + \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} - \left(\frac{\sin 1}{2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n} \right) \right| \\
 &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \\
 &\leq \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} \right| + \dots + \left| \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \\
 &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} \\
 &< \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^{n+p+1}} + \frac{1}{2^{n+p+2}} + \dots \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} + \dots \right)}_{\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, |q| < 1} \\
 &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon
 \end{aligned}$$

Dakle, dobijamo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2^n} < \varepsilon &\Rightarrow 2^n > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n \ln 2 > \ln \frac{1}{\varepsilon} \\
 &\Rightarrow n > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \Rightarrow n_0 := \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil + 1.
 \end{aligned}$$

Kako je niz $\{a_n\}$ Košijev, sledi da je niz $\{a_n\}$ konvergentan.