

Diferencijalne jednačine

Uvod



Cilj prve lekcije iz diferencijalnih jednačina

- Uvođenje osnovnih pojmova:
 - Red
 - Linearnost
 - Početni uslovi
 - Rešenje
- Klasifikacija običnih diferencijalnih jednačina (odj) na osnovu:
 - Reda, linearnosti i uslova.
- Klasifikacija metoda za rešavanje odj.

Izvod funkcije

Izvod funkcije

Obični izvod

$$\frac{dv}{dt}$$

v je funkcija jedne nezavisne promenljive

Parcijalni izvod

$$\frac{\partial u}{\partial y}$$

u je funkcija više nezavisnih promenljivih

Diferencijalne jednačine

Diferencijalne jednačine

Obične diferencijalne jednačine (odj)

$$\frac{d^2 v}{dt^2} + 6tv = 1$$

sadrže jedan ili više

običnih izvoda

nepoznate funkcije

Parcijalne diferencijalne jednačine (pdj)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

sadrže jedan ili više

parcijalnih izvoda

nepoznate funkcije

Obične diferencijalne jednačine

Obične diferencijalne jednačine (ODJ) sadrže jedan ili više običnih izvoda nepoznate funkcije u odnosu na jednu nezavisnu promenljivu.

Primeri :

$$\frac{dv(t)}{dt} - v(t) = e^t$$

x(t): nepoznata funkcija

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 5 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$$

t: nezavisna promenljiva

Primer ODJ:

Model pada padobranca

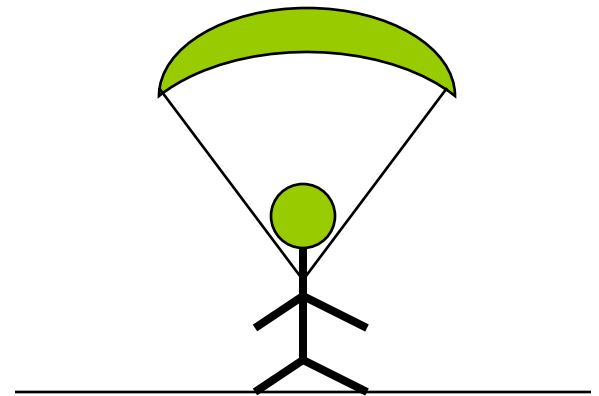
Brzina kojom padobranac pada je data sa:

$$\frac{d v}{d t} = 9.8 - \frac{c}{M} v$$

M : masa

c : koeficijent otpora

v : brzina

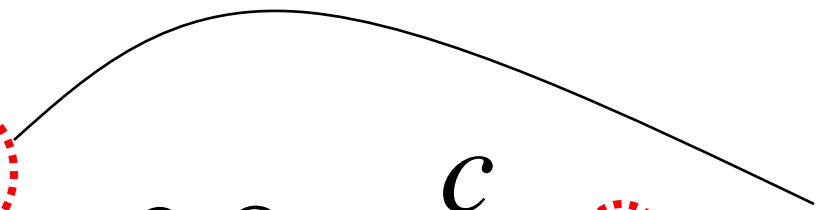


Definicije

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M} v$$

Obična
diferencijalna
jednačina

Definicije

$$\frac{dv}{dt} = 9.8 - \frac{c}{M} v$$


(Zavisna
promenljiva)
nepoznata
funkcija koju
treba odrediti

Definicije

$$\frac{d v}{d t} = 9.8 - \frac{c}{M} v$$

(nezavisna promenljiva)
promenljiva u odnosu na koju je
zavisna promenljiva diferencirana

Primer – Njutnov zakon hlađenja

- Ovo je model promene temperature nekog objekta koja nastaje usled njegovog hlađenja:

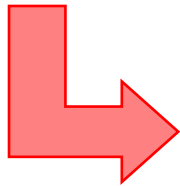
Temperatura objekta: T_{Obj}

Sobna temperatura: T_{Sobe}

Njutnov zakon: “Brzina promene *temperature objekta je proporcionalna razlici temperature objekta i sobne temperature*”

Pravi se

ODJ



$$\frac{dT_{Obj}}{dt} = -\alpha(T_{Obj} - T_{Sobe})$$

Rešenje

ODJ



$$T_{Obj}(t) = T_{Sobe} + (T_{Poč} - T_{Sobe})e^{-\alpha t}$$

Gde je $T_{Poč}$ početna temperatura objekta.

Red diferencijalne jednačine

- **Red** obične diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda koji se pojavljuje u jednačini.

Primeri :

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$$

$$\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2} \right)^3 - \frac{dx(t)}{dt} + 2x^4(t) = 1$$

Red diferencijalne jednačine

Red obične diferencijalne jednačine je red najvišeg izvoda koji se pojavljuje u jednačini.

Primeri :

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t$$

ODJ prvog reda

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 5 \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t) = \cos(t)$$

ODJ drugog reda

$$\left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right)^3 - \frac{dx(t)}{dt} + 2x^4(t) = 1$$

ODJ drugog reda

Rešenje diferencijalne jednačine

Rešenje diferencijalne jednačine je funkcija koja zadovoljava tu jednačinu.

Primer :

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 0$$

Rešenje $x(t) = e^{-t}$

Dokaz :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -e^{-t}$$

$$\frac{dx(t)}{dt} + x(t) = -e^{-t} + e^{-t} = 0$$

Linearne ODJ

- ODJ je linearna ako
- se nepoznata funkcija i njeni izvodi pojavljuju samo na prvi stepen,
- ako nema proizvoda nepoznate funkcije i/ili njenih izvoda i ako u ODJ ne učestvuju nelinearne funkcije od nepoznate funkcije i njenih izvoda.

Primeri :

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 5 \frac{dx(t)}{dt} + 2t^2 x(t) = \cos(t)$$

$$\left(\frac{d^2 x(t)}{dt^2} \right)^3 - \frac{dx(t)}{dt} + \sqrt{x(t)} = 1$$

Linearne ODJ

ODJ je linearna ako

- se nepoznata funkcija i njeni izvodi pojavljuju samo na prvi stepen,
- ako nema proizvoda nepoznate funkcije i/ili njenih izvoda i ako u ODJ ne učestvuju nelinearne funkcije od nepoznate funkcije i njenih izvoda.

Primeri :

$$\frac{dx(t)}{dt} - x(t) = e^t$$

Linearna ODJ

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} - 5\frac{dx(t)}{dt} + 2t^2x(t) = \cos(t)$$

Linearna ODJ

$$\left(\frac{d^2x(t)}{dt^2}\right)^3 - \frac{dx(t)}{dt} + \sqrt{x(t)} = 1$$

Nelinearna ODJ

Nelinearne ODJ

Primeri nelinearni h ODJ :

$$\frac{dx(t)}{dt} - \cos(x(t)) = 1$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - 5 \frac{dx(t)}{dt} x(t) = 2$$

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} - \left| \frac{dx(t)}{dt} \right| + x(t) = 1$$

Rešenja običnih diferencijalnih jednačina

$$x(t) = \cos(2t)$$

je jedno rešenje ODJ

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0$$

Da li je ono jedino (jedinствeno)?

Sve funkcije oblika $x(t) = \cos(2t + C)$
(gde je C realna konstanta) su rešenja.

Jedinstvenost rešenja

Da bismo odredili jedinstveno rešenje jednačine n -tog reda, potrebno nam je n uslova.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 4x(t) = 0$$

ODJ drugog reda

$$x(0) = a$$

$$\dot{x}(0) = b$$

Potrebna su dva uslova da bi rešenje moglo biti jedinstveno određeno

Dodatni uslovi

Dodatni uslovi

```
graph TD; A[Dodatni uslovi] --> B[Početni uslovi]; A --> C[Granični (konturni) uslovi];
```

Početni uslovi

- Svi uslovi su zadati u jednoj tački (u jednoj vrednosti nezavisne promenljive)

Granični (konturni) uslovi

- Uslovi su zadati u tačkama krajeva intervala na kom se traži rešenje

Granični i početni problemi

Početni problemi

Svi uslovi su zadati u
jednoj vrednosti nezavisne
promenljive

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$$

$$x(0) = 1, \dot{x}(0) = 2.5$$

ista

Granični (konturni) problemi

Uslovi nisu zadati samo u
jednoj vrednosti nezavisne
promenljive

Teži su za rešavanje od
početnih problema

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + x = e^{-2t}$$

$$x(0) = 1, x(2) = 1.5$$

različita

Familija rešenja, opšte rešenje tj. opšti integral:

Rešenje koje sadrži proizvoljnu konstantu C se zove **jedno-parameterska familija rešenja** i predstavlja **opšte rešenje** diferencijalne jednačine PRVOG REDA.

Analogno, rešenje koje sadrži n proizvoljnih konstanti C_1, C_2, \dots, C_n predstavlja **opšte rešenje** diferencijalne jednačine n -tog REDA.

Partikularno rešenje: Rešenje koje se dobija za jedan izbor konstante ili konstanti, na primer:

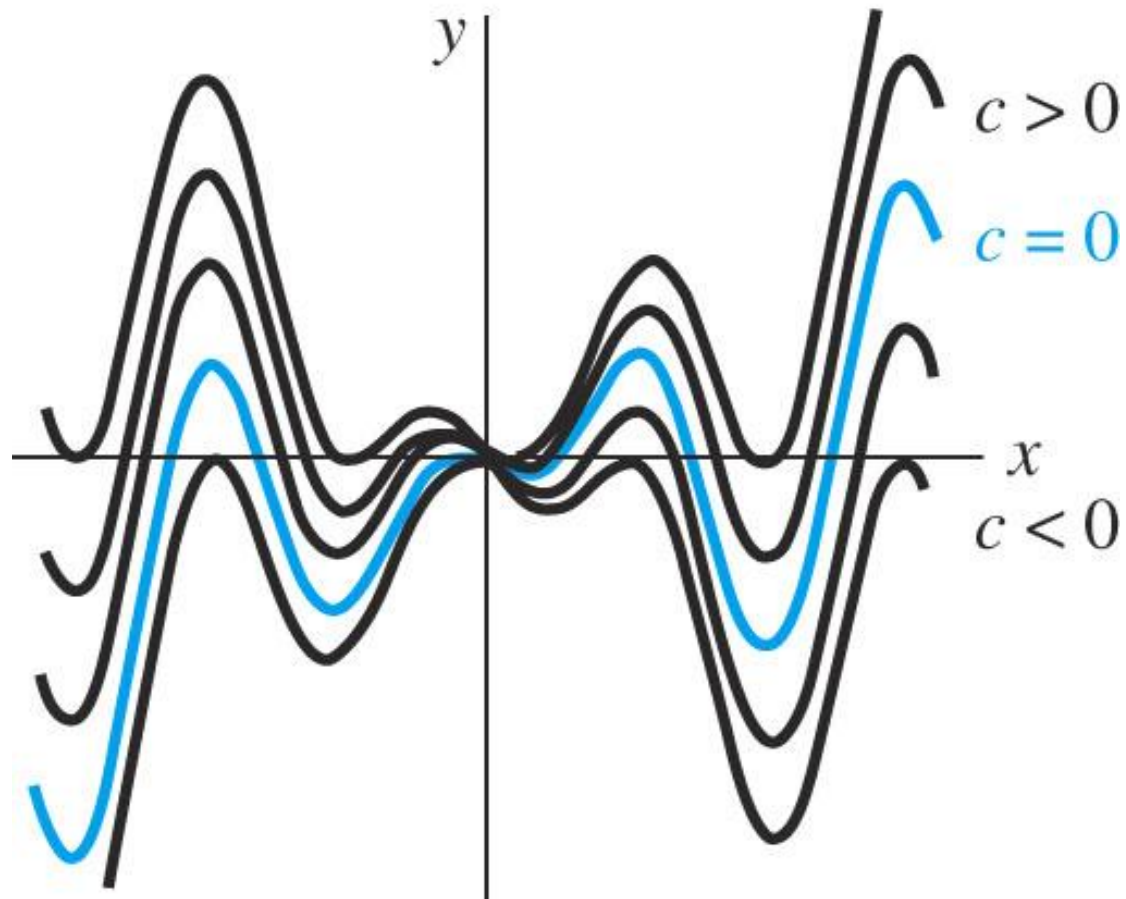
$y = Cx - x \cos x$ je opšte rešenje d.j.

$xy' - y = x^2 \sin x$ na $(-\infty, \infty)$,

a $y = -x \cos x$ je partikularno rešenje koje se dobija za $C = 0$.

Slika 1.3

Slika 1.3



Singularno rešenje je rešenje koje se ne može dobiti od opšteg rešenja ni za jedan izbor konstanti (parametara).

Primer: $y = (x^2/4 + C)^2$ je opšte rešenje d.j. $dy/dx = xy^{1/2}$, međutim, $y = 0$ je takođe rešenje ove d.j.

Ni za jednu vrednost konstante C se od opšteg ne može dobiti rešenje $y = 0$. Dakle, $y = 0$ je singularno rešenje.

Klasifikacija ODJ

ODJ se mogu klasifikovati na više različitih načina:

□ Red

- ODJ prvog reda
- ODJ drugog reda
- ODJ n-tog reda

□ Linearnost

- Linearne ODJ
- Nelineare ODJ

□ Uslovi

- Početni problemi
- Konturni problemi

□ Homogenost

Primeri

$$\frac{dv}{dt} = g$$

$$v(0) = v_0$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = w$$

$$M(0) = 0$$

i

$$M(l) = 0$$

Primeri

$$\frac{dv}{dt} = g$$
$$v(0) = v_0$$

- Prvog reda
- Linearna
- Nehomogena
- Početni problem

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = w$$
$$M(0) = 0$$

i

$$M(l) = 0$$

Primeri

$$\frac{dv}{dt} = g$$
$$v(0) = v_0$$

- Prvog reda
- Linearna
- Nehomogena
- Početni problem

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = w$$
$$M(0) = 0$$

i

$$M(l) = 0$$

- Drugog reda
- Linearna
- Nehomogena
- Konturni problem

Primeri

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

Primeri

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

- Drugog reda
- Nelinearna
- Homogena
- Početni problem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

Primeri

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin \theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

- Drugog reda
- Nelinearna
- Homogena
- Početni problem

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$$

$$\theta(0) = \theta_0, \quad \frac{d\theta}{dt}(0) = 0$$

- Drugog reda
- Linearna
- Homogena
- Početni problem

Diferencijalne jednačine prvog reda

1. Oblik sa izvodima:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad \text{tj.} \quad a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

2. Oblik sa diferencijalima:

$$(1+x)dy - ydx = 0$$

3. Normalni oblik:

$$y' = f(x, y)$$

4. Opšti oblik

$$F(x, y, y') = 0$$

Analitičko rešenje

- Analitičko rešenje za ODJ se može dobiti za linearne ODJ i neke specijalne slučajeve nelinearnih diferencijalnih jednačina.
- Mi ćemo rešavati sledeće tipove ODJ:
 - d.j. koje se mogu rešiti direktnom integracijom, d. j. koja razdvaja promenljive, homogena d.j. i one d.j. koje se svode na homogene, linearna d.j., Bernulijeva d.j., jednačina totalnog diferencijala

Metodi za rešavanje – direktna integracija

- Ovaj metod se može primeniti na one d.j. kod kojih desna strana jednačine ne zavisi od nepoznate funkcije
- Opšti oblik je:

$$\frac{dy}{dt} = f(t)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = f(t)$$

⋮

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f(t)$$

Direktna integracija – primer

Naći brzinu automobila koji kreće iz mirovanja ubrzanjem od 3 m/s²:

$$a = \frac{dv}{dt} = 3$$

$$\Rightarrow v = 3t + C$$

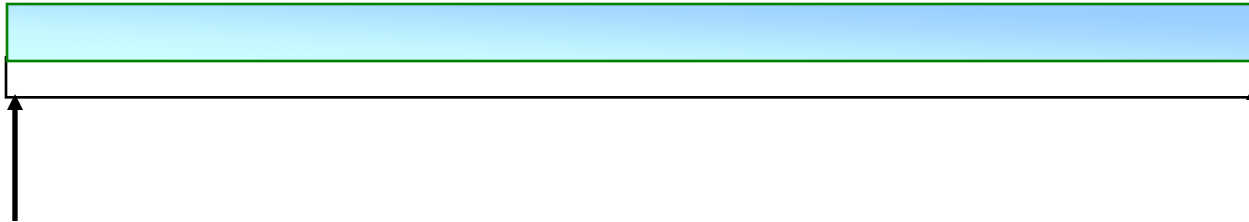
Pošto je automobil krenuo iz stanja mirovanja, imamo uslov:

$$v(0) = 0 \Rightarrow 0 = 3 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\Rightarrow v = 3t$$

Savijanje grede - primer

- Greda pod uniformnim opterećenjem

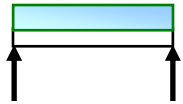


Teorija daje odgovarajuću jednačinu:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = w$$

sa graničnim uslovima:

$$y(0) = 0 \quad \text{i} \quad y(l) = 0 \quad (\text{fiksirani krajevi})$$



Savijanje grede - rešenje

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = w$$

- **1. korak:**

Integracija

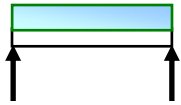
$$\frac{dy}{dx} = wx + A$$

- **2. korak:**

Ponovo

integralimo da
bismo dobili
opšte rešenje
(opšti integral)

$$y = \frac{1}{2} wx^2 + Ax + B$$



Savijanje grede - rešenje

■ 3. korak:

Koristimo granične uslove da dobijemo partikularno rešenje.

$$y = \frac{1}{2} wx^2 + Ax + B$$

$$y(0) = 0$$

$$y(l) = 0$$

$$0 = \frac{1}{2} w \cdot 0^2 + A \cdot 0 + B \Rightarrow B = 0$$

$$0 = \frac{1}{2} w \cdot l^2 + A \cdot l + \cancel{B} \Rightarrow A = -\frac{1}{2} wl$$

■ 4. korak:

Zamenimo vrednosti za A i B

$$y = \frac{1}{2} wx^2 - \frac{1}{2} wlx$$

$$y = \frac{1}{2} wx(l - x)$$

Metod rešavanja – razdvajanje promenljivih

Metod razdvajanja promenljivih se primenjuje samo na ODJ prvog reda.

Može se upotrebiti samo kada se desna strana jednačine može faktorisati na funkciju od x pomnoženu sa funkcijom od y :

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

Numeričko rešenje

- Numerički metodi se koriste da bi se dobile vrednosti nepoznate funkcije u nekim tačkama – dobijamo tabelu vrednosti
- U osnovi većine numeričkih metoda koji se koriste za rešavanje ODJ direktno (ili indirektno) se nalazi Tejlorov razvoj