

PRIMENA IZVODA



- Aproksimacija tangentom je jedna od primena izvoda koju smo videli do sada.
- U ovom delu gradiva ćemo predstaviti kako izvod opisuje oblik i tok funkcije, sa posebnim osvrtom na traženje minimalnih i maksimalnih vrednosti funkcije.

PRIMENA IZVODA



- U raznim praktičnim problemima se pojavljuje potreba da se npr. minimizuju troškovi, maksimizuje površina ili nekako pronade najbolji mogući ishod za neku situaciju.

PRIMENA IZVODA



Ispitivanje ekstremnih vrednosti funkcije

PROBLEMI OPTIMIZACIJE



- Diferencijalni račun ima veliku i veoma važnu primenu u problemima optimizacije.
- To su problemi u kojima se traži “najbolje” rešenje određenog, matematički definisanog problema.

NEKI PRIMERI



- Koliki je poluprečnik kontrahovanog dušnika kroz koji se prilikom kašlja najbrže izdiše vazduh?
- Pod kojim uglom treba da bude krvni sud tako da energija koju srce troši pri pumpanju krvi bude minimalna?
- Kog oblika treba da bude konzerva da bi troškovi proizvodnje bili minimalni?
- Koje je maksimalno ubrzanje spejs šatla?

PROBLEMI OPTIMIZACIJE



- Svi ovi problemi se mogu svesti na problem traženja minimalne ili maksimalne (ekstremne) vrednosti funkcije.
- Prvo ćemo definisati šta su to minimalna i maksimalna vrednost funkcije.



- Funkcija f ima **globalni maksimum** u c ako $f(c) \geq f(x)$ za svako x iz D , gde je D domen funkcije f .
- Broj $f(c)$ se zove maksimum funkcije f na D .



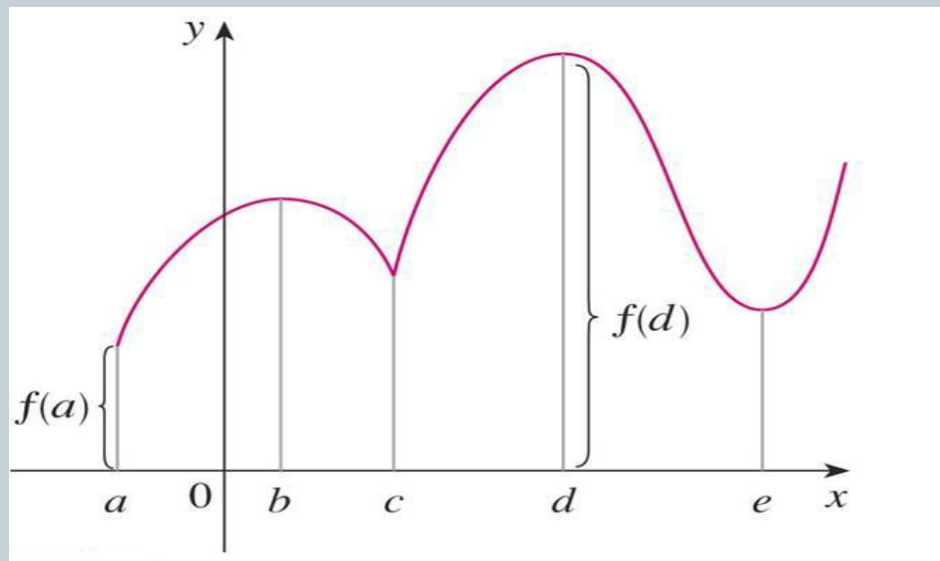
- Analogno, f ima **globalni minimum** u c ako $f(c) \leq f(x)$ važi sa svako x iz D i broj $f(c)$ se zove minimum funkcije f na D .
- Maksimum i minimum funkcije f su ekstremne vrednosti od f .

GLOBALNI EKSTREMI



- Na slici je prikazan grafik funkcije f (definisane nad ograničenim intervalom) koja ima globalni maksimum u d i globalni minimum u a .

- $(d, f(d))$ je najviša, a $(a, f(a))$ najniža tačka na grafiku.

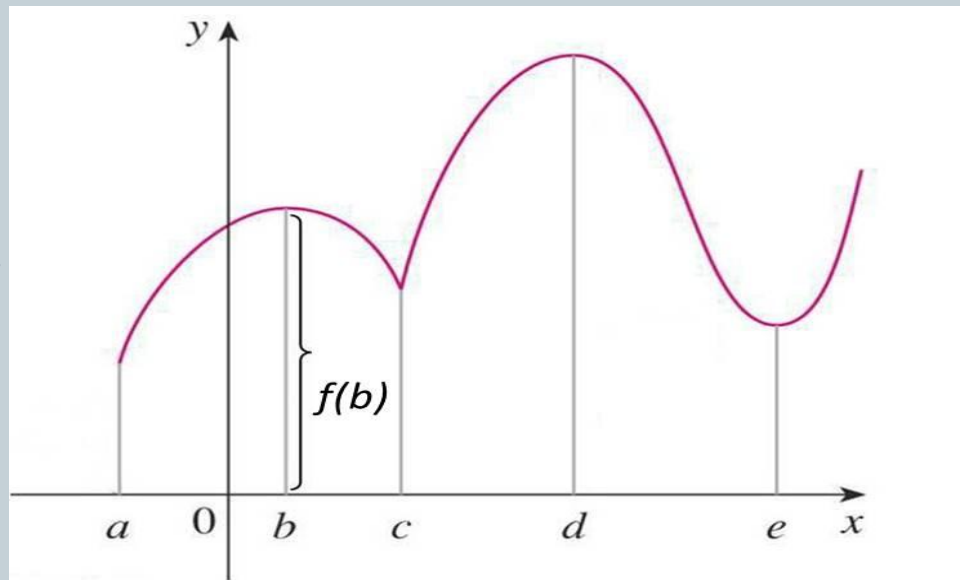


LOKALNI EKSTREMI



- Ako posmatramo samo vrednosti x koje su u blizini od b — ako se, na primer, ograničimo samo na interval (a, c) — onda će $f(b)$ biti najveća vrednost od svih $f(x)$ na tom intervalu.

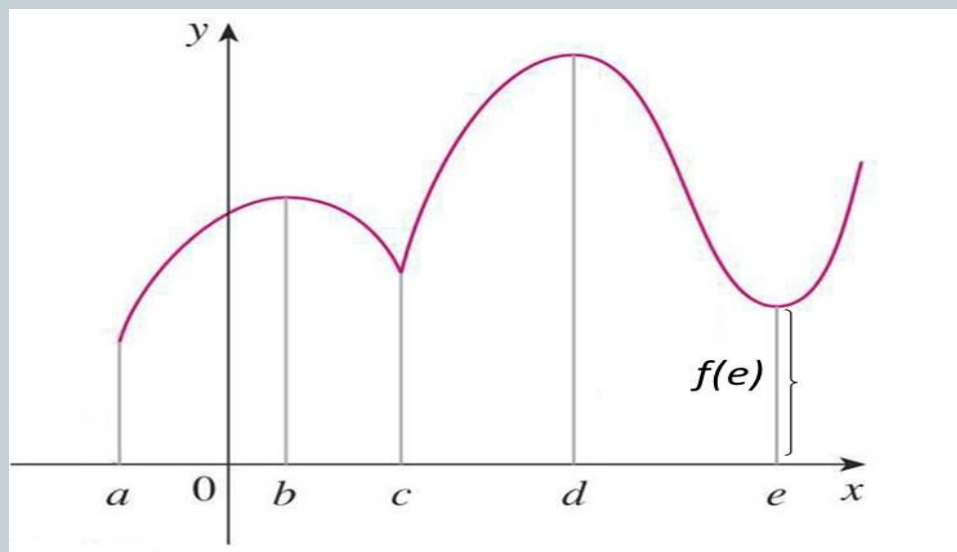
- To je onda **lokalni maksimum** funkcije f .



LOKALNI EKSTREMI



- Analogno, $f(c)$ je **lokalni minimum** funkcije f ako važi $f(c) \leq f(x)$ za sve x koji se nalaze u okolini od c —na primer, u intervalu (b, d) .
- Funkcije f ima lokalni minimum u e .





- Preciznija definicija lokalnog ekstrema:
- Funkcija f ima lokalni maksimum u c ako postoji njena ε -okolina u kojoj važi $f(c) \geq f(x)$ za svako $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$.
 - Dakle, $f(c) \geq f(x)$ važi za sve x koji pripadaju nekom otvorenom intervalu koji sadrži c .
 - Analogno, f ima lokalni minimum u c ako $f(c) \leq f(x)$ važi kada x pripada nekoj ε -okolini od c .



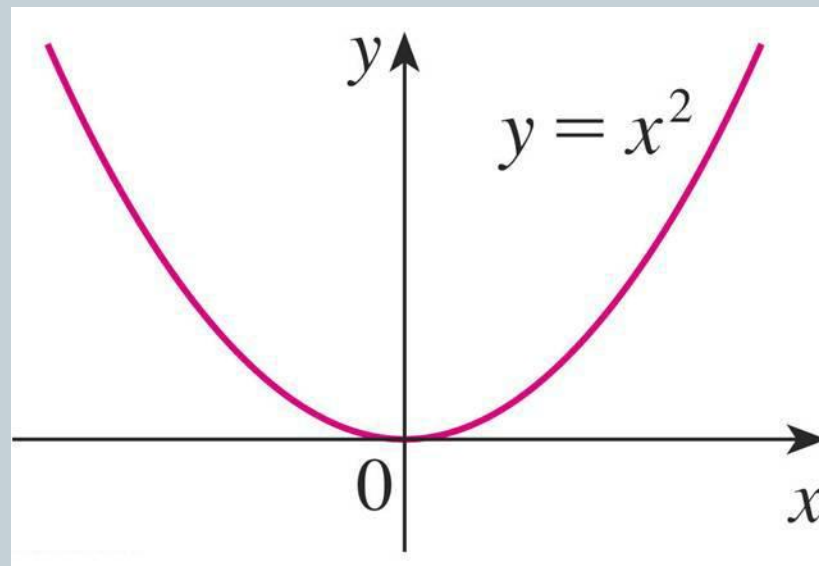
- Za elementarnu funkciju $f(x) = \cos x$ lokalni i globalni maksimum je 1 i dostiže se beskonačno mnogo puta jer je $\cos 2k\pi = 1$ za bilo koji ceo broj k , $-1 \leq \cos x \leq 1$ za svako x .
- Takođe, $\cos (2k + 1)\pi = -1$ je globalni minimum — gde je k ceo broj.



- Za $f(x) = x^2$, važi $f(x) \geq f(0)$ jer je $x^2 \geq 0$ za svako x .
- Tako da je $f(0) = 0$ globalni (i lokalni) minimum ove funkcije.

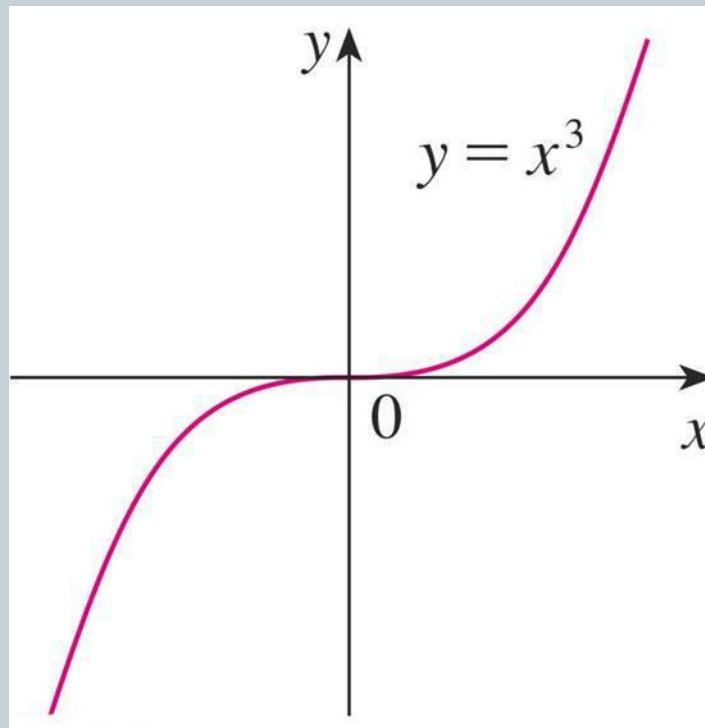


- Ovo odgovara činjenici da je koordinatni početak najniža tačka grafika parabole $y = x^2$.
- Međutim, grafik parabole nema najvišu tačku.
- Tako da ova funkcija nema maksimum na svom prirodnom domenu.





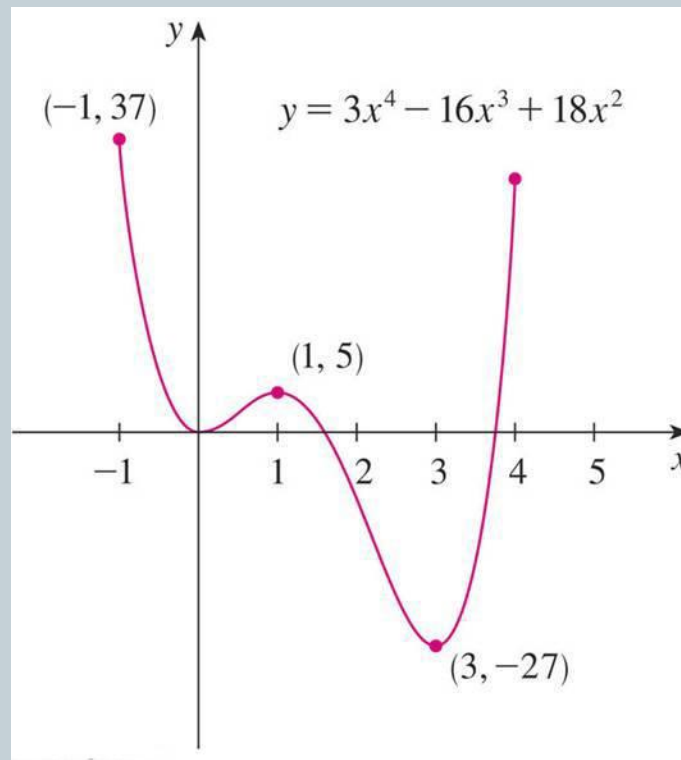
- Funkcija $f(x) = x^3$ na skupu realnih brojeva (prirodnom domenu) nema ni lokalnih ni globalnih ekstrema.





- Na slici je dat grafik funkcije

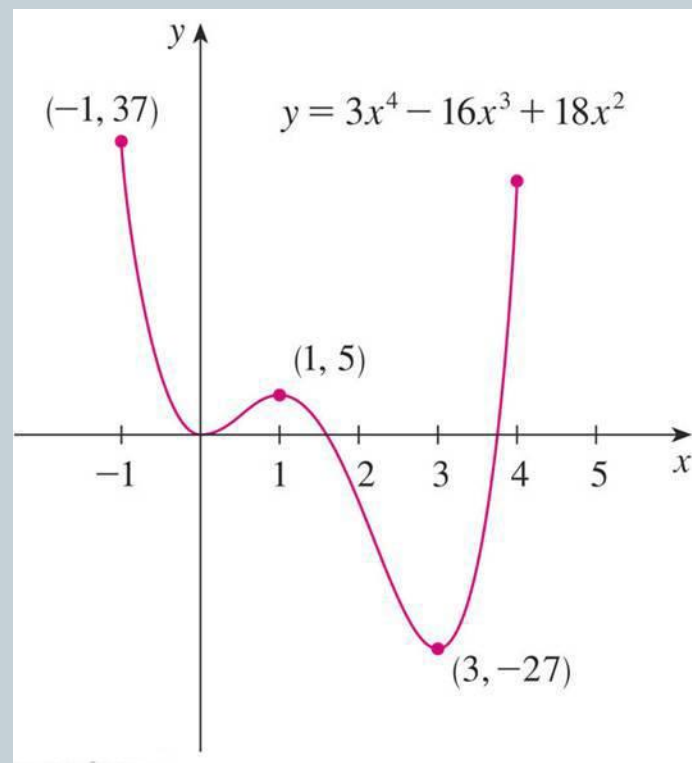
$$f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2, \quad -1 \leq x \leq 4$$



- Sa grafika se vidi da je $f(1) = 5$ lokalni maksimum, dok je globalni maksimum

$$f(-1) = 37.$$

- Ovaj globalni maksimum nije i lokalni maksimum jer se dostiže u krajnjoj tački intervala (tj. f nije definisana u (levoj) okolini od $x=-1$).

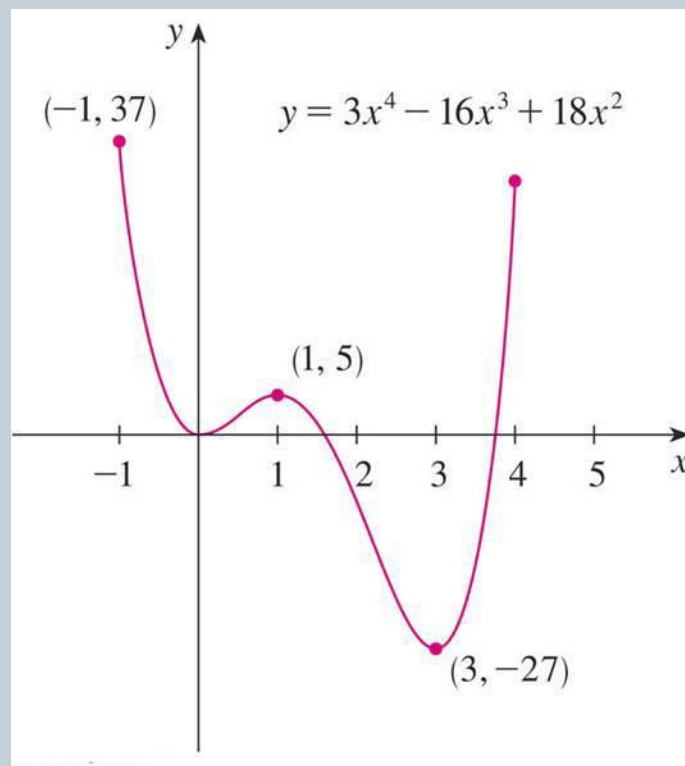




- Takođe, $f(0) = 0$ je lokalni minimum, a $f(3) = -27$ je i lokalni i globalni minimum.

○ Napomena:

f u $x = 4$ nema ni lokalni ni globalni maksimum.



EKSTREMNE VREDNOSTI



- Videli smo nekoliko primera funkcija koje imaju globalne i/ili lokalne ekstremne vrednosti, kao i primer funkcije koja ih nema.
- Sledeću teoremu smo već ranije videli na predavanjima. U njoj je dat uslov pod kojim funkcija sigurno ima globalne ekstreme.

TEOREMA O EKSTREMNIM VREDNOSTIMA

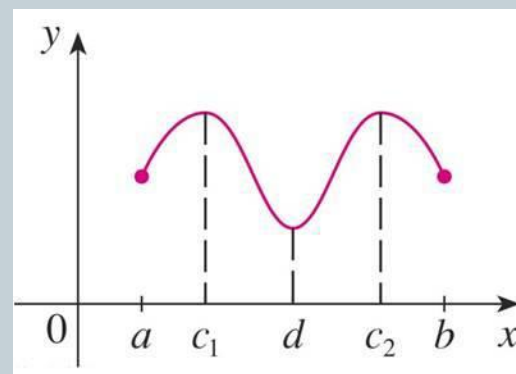
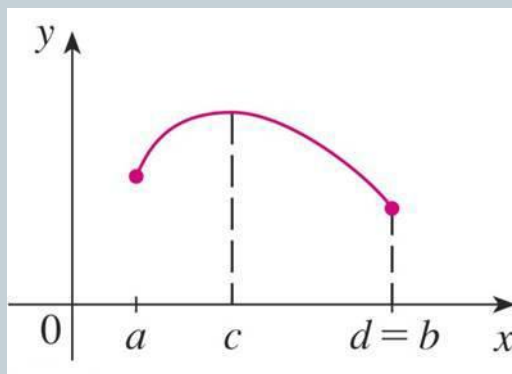
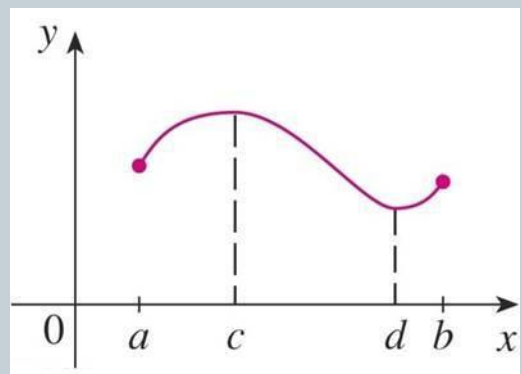


- Ako je f neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu $[a, b]$, onda f dostiže svoju globalnu maksimalnu vrednost $f(c)$ i globalnu minimalnu vrednost $f(d)$ u nekim tačkama c i d intervala $[a, b]$.

TEOREMA O EKSTREMNIM VREDNOSTIMA

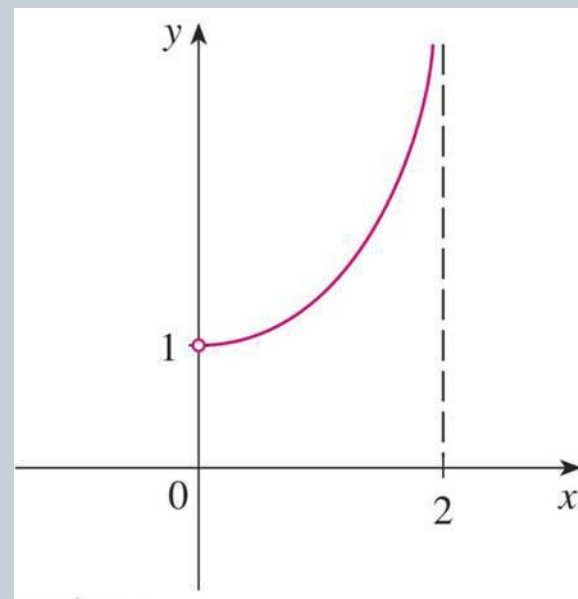
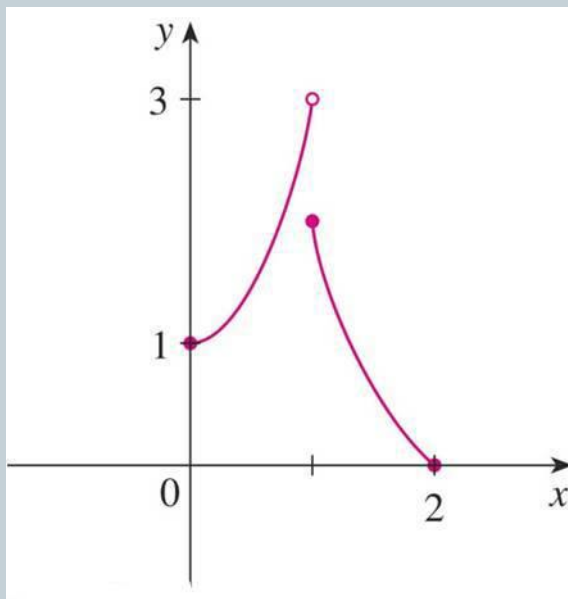


- Rezultat ove teoreme je ilustrovan na slikama.
- Treba uočiti da funkcija može imati više tačaka u kojima su dostignute ekstremne vrednosti (kao na trećoj slici).



TEOREMA O EKSTREMNIM VREDNOSTIMA

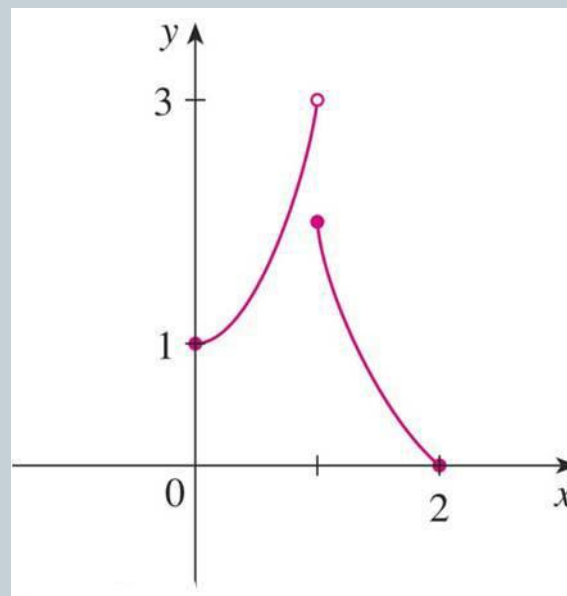
- Ponovljamo najbitnije. Na slikama su prikazani slučajevi kada jedan od uslova (neprekidnost ili zatvorenost intervala) nije ispunjen. Tada funkcija ne mora imati ekstremnu vrednost.



TEOREMA O EKSTREMNIM VREDNOSTIMA



- Funkcija f čiji grafik vidimo na slici je definisana na zatvorenom intervalu $[0, 2]$ ali nema maksimum.
- Kodomen funkcije f je $[0, 3)$.
(U okviru ovog kursa, kodomen je skup slika funkcije.)
- Funkcija uzima vrednosti koje su proizvoljno blizu 3, ali ne dostiže vrednost 3.



TEOREMA O EKSTREMNIM VREDNOSTIMA

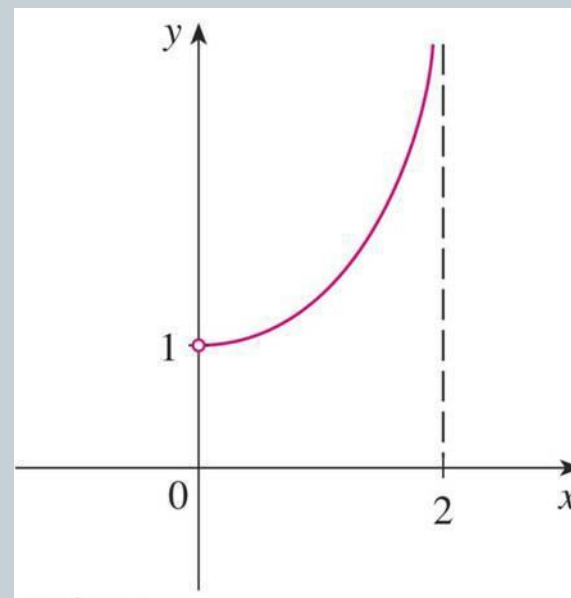


- U ovom primeru f nije neprekidna funkcija, pa se teorema o ekstremnim vrednostima ne može primeniti.
- Treba imati na umu da prekidna funkcija može imati minimum i maksimum.

TEOREMA O EKSTREMNIM VREDNOSTIMA



- Funkcija g prikazana na ovoj slici je neprekidna na otvorenom intervalu $(0, 2)$, ali nema ni minimum ni maksimum.
 - Kodomen od g je $(1, \infty)$.
 - Funkcija neograničeno raste.
 - U ovom slučaju, interval $(0, 2)$ nije zatvoren i zato se teorema ne može primeniti.



TEOREMA O EKSTREMNIM VREDNOSTIMA

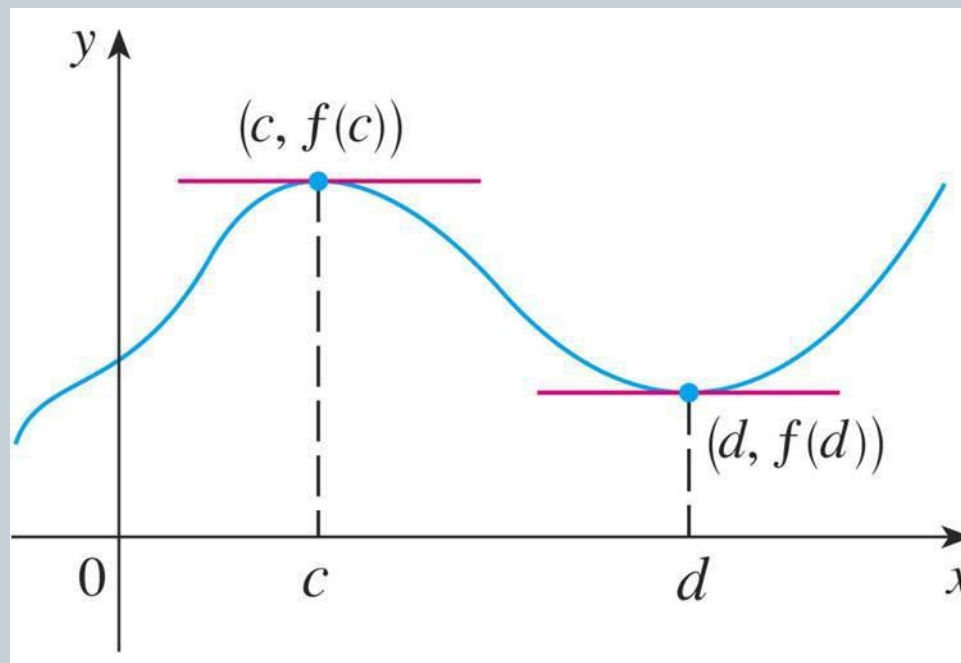


- Dakle, teorema o ekstremnim vrednostima govori da neprekidna funkcija na zatvoremnom intervalu ima globalne ekstreme.
- Međutim, ona ne govori ništa o tome **kako** da se te ekstremne vrednosti zaista i nađu.
 - Počecemo sa traženjem **lokalnih** ekstrema.

LOKALNI EKSTREMI



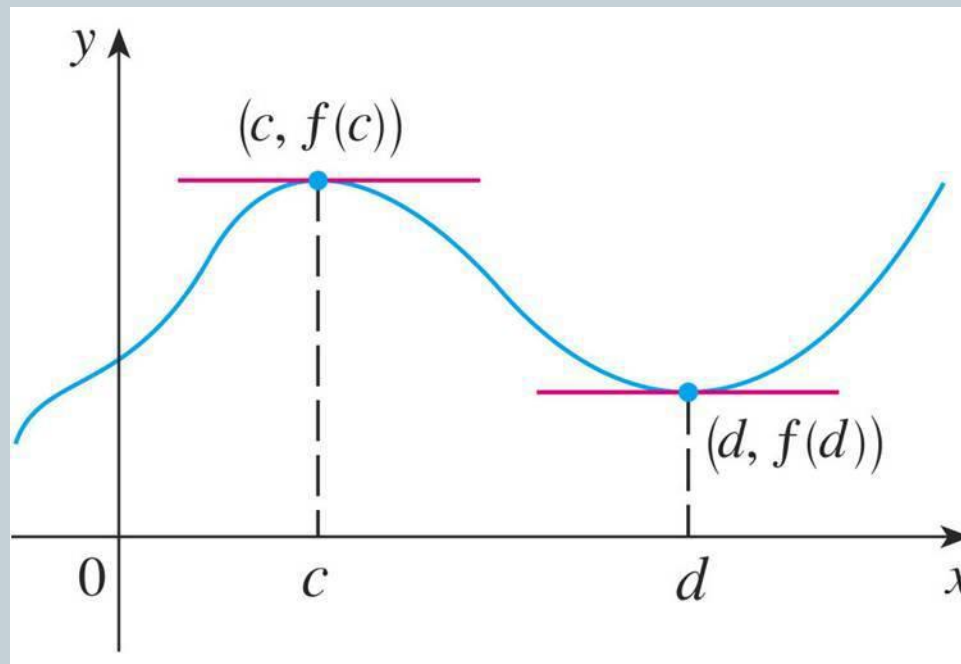
- Na slici je prikazan grafik funkcije f koja ima lokalni maksimum u c i lokalni minimum u d .



LOKALNI EKSTREMI



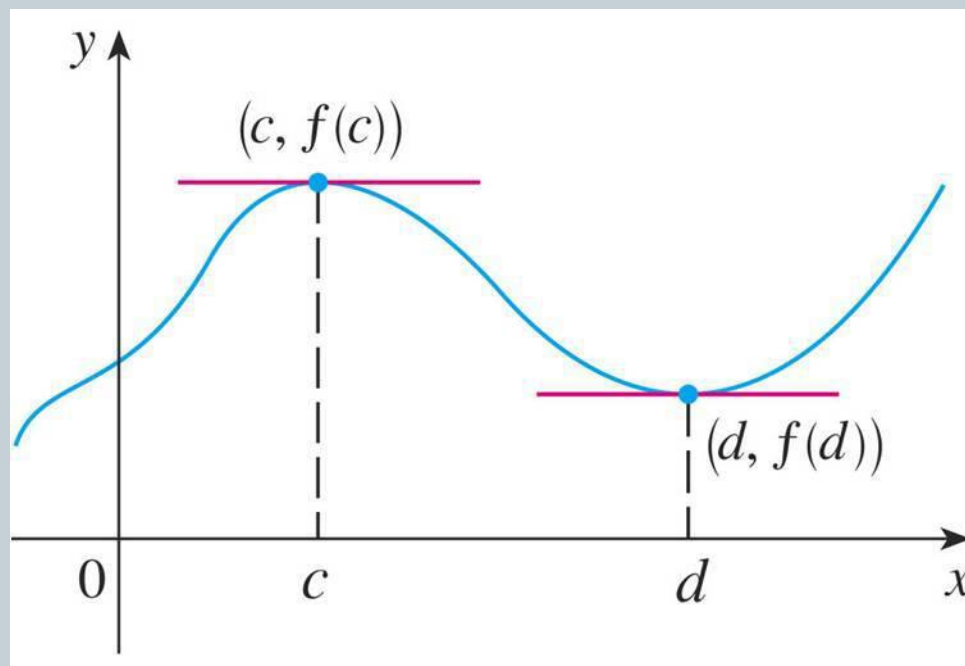
- Može se uočiti da je u tačkama minimuma i maksimuma tangenta paralelna sa x -osom , tj. da je njen nagib jednak nuli.



LOKALNI EKSTREMI



- Od ranije znate da je izvod nagib tangente (njen koeficijent pravca).
 - Tako da je $f'(c) = 0$ i $f'(d) = 0$.



LOKALNI EKSTREMI



- Sledeća teorema govori o tome da ovo važi za svaku diferencijabilnu funkciju.

FERMAOVA TEOREMA



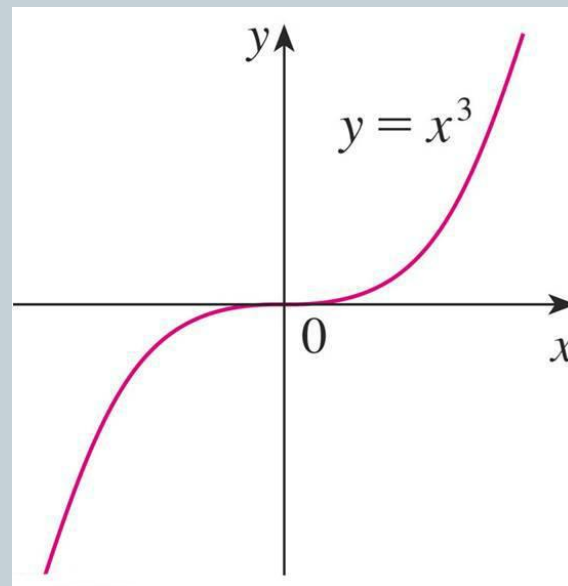
- Ako f ima lokalni maksimum ili minimum u c , i ako $f'(c)$ postoji, onda je $f'(c) = 0$.

FERMAOVA TEOREMA



- Primer koji sledi pokazuje da obrnuto ne mora da važi.
 - Dakle, da bi se mogle pronaći ekstremne vrednosti, nije dovoljno da se samo reši jednačina $f'(x) = 0$.

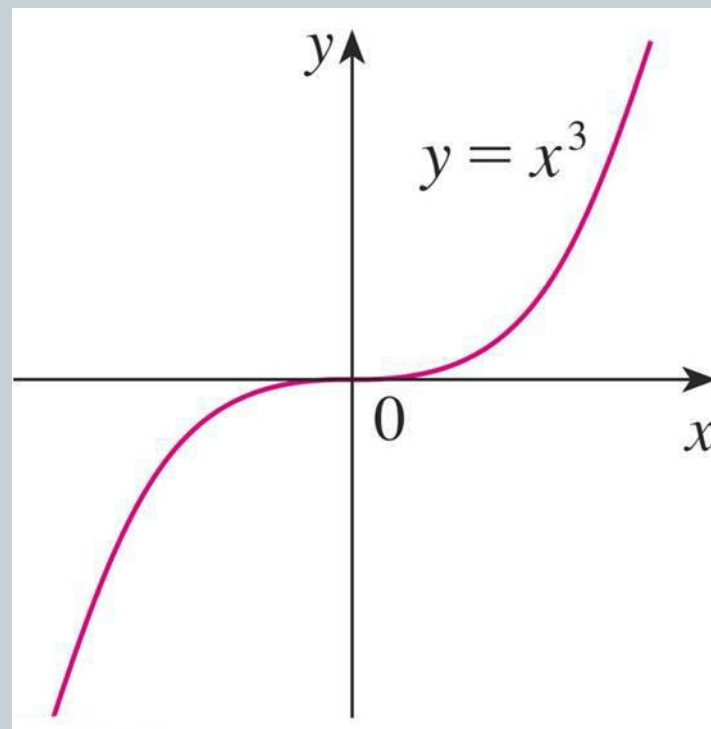
- Za $f(x) = x^3$, prvi izvod je $f'(x) = 3x^2$, tako da je $f'(0) = 0$.
- Međutim, f nema ni maksimum ni minimum u 0, što se može videti i na grafiku od f .





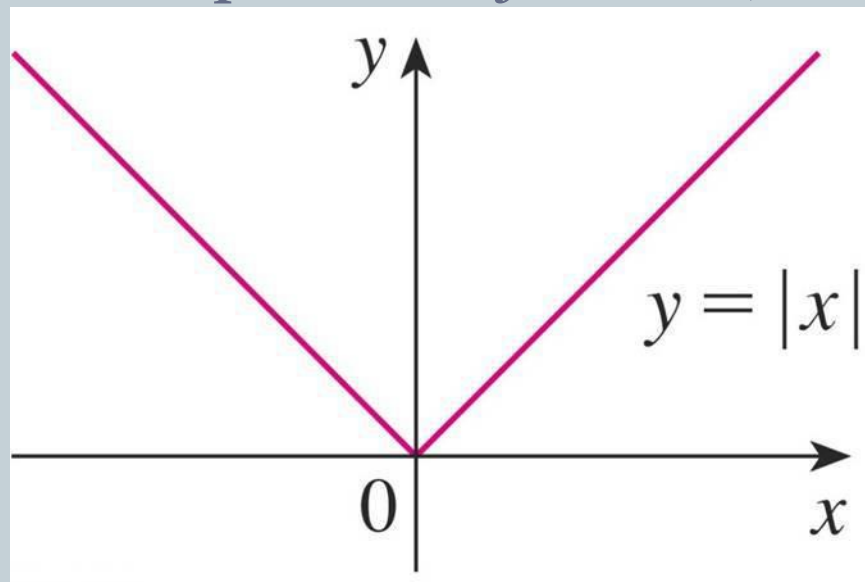
- Činjenica da je $f'(0) = 0$ samo znači da kriva $y = x^3$ u tački $(0, 0)$ ima horizontalnu tangentu.

- Dakle, kriva $y = x^3$ umesto minimuma i maksimuma u $(0, 0)$ ima tangentu koja je u horizontalnom položaju. Ovde je ta tangenta x -osa.





- Funkcija $f(x) = |x|$ ima (lokalni i globalni) minimum u 0.
- Međutim, ta vrednost se ne može pronaći iz $f'(x) = 0$, zato što $f'(0)$ ne postoji (to smo već ranije utvrdili).



Primeri 5 i 6 - zaključak



- Na Primeru 5 smo videli da se može desiti da i kada je $f'(c) = 0$, funkcija ne mora imati maksimum ili minimum u c .
- Dakle, obrnuto tvrđenje teoreme ne mora da važi u opštem slučaju.
- Druga stvar je da ekstremne vrednosti mogu da postoje u c i u slučaju kada $f'(c)$ ne postoji (Primer 6).

FERMAOVA TEOREMA



- Teorema nam sugeriše vrednosti među kojima treba da tražimo ekstremne vrednosti funkcije f . To su oni brojevi c za koje važi:

- $f'(c) = 0$

ili

- $f'(c)$ ne postoji

Ti brojevi se zovu kritične tačke.



- Kritična tačka funkcije f je broj c iz domena od f takav da važi $f'(c) = 0$ ili $f'(c)$ ne postoji.



- Naći kritične tačke funkcije

$$f(x) = x^{3/5}(4 - x).$$

- Primenom pravila za izvod proizvoda, dobija se:

$$f'(x) = x^{3/5}(-1) + (4 - x)\left(\frac{3}{5}x^{-2/5}\right)$$

$$= -x^{3/5} + \frac{3(4 - x)}{5x^{2/5}}$$

$$= \frac{-5x + 3(4 - x)}{5x^{2/5}} = \frac{12 - 8x}{5x^{2/5}}$$



- Naravno, isti rezultat bismo dobili i da smo funkciju prvo zapisali u obliku $f(x) = 4x^{3/5} - x^{8/5}$.
- Imamo da je $f'(x) = 0$ za $12 - 8x = 0$.
- Tako da je, $x = \frac{3}{2}$, a $f'(x)$ ne postoji za $x = 0$.
- Dakle, kritične tačke su $\frac{3}{2}$ i 0 .



- Ako f ima lokalni ekstrem u c , onda je c kritična tačka funkcije f .

GLOBALNI EKSTREMI (na zatvorenom intervalu)



- Dakle, za globalni ekstrem neprekidne funkcije na zatvorenom intervalu važi nešto od sledećeg:
 - To je ili lokalni ekstrem (u tom slučaju je on i kritična tačka funkcije f).
 - Ili se dostiže na kraju intervala.