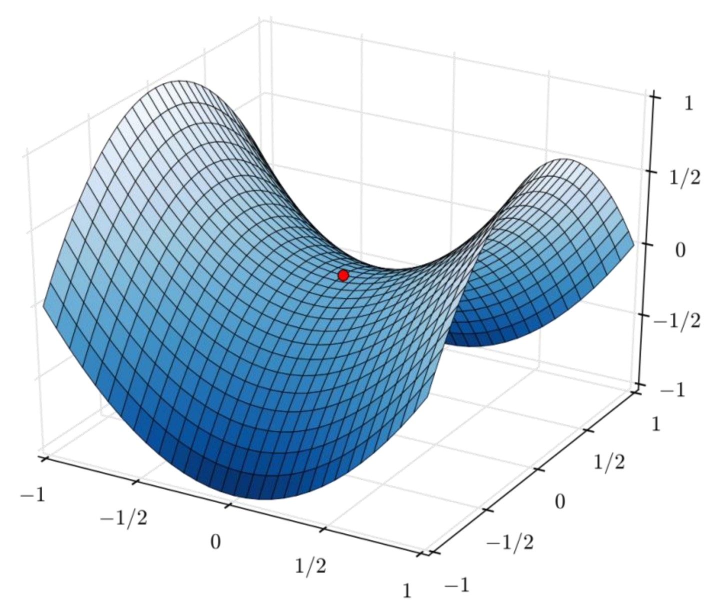
EKSTREMNE VREDNOSTI FUNKCIJE **DVE** PROMENLJIVE

Cilj ovih slajdova je da se nauči:

- Kako se određuju **stacionarne tačake** pomoću parcijalnih izvoda (stacionarne tačke su moguće tačke lokalnih ekstrema).
- Kako se koriste drugi parcijalni izvodi za funkciju dve promenljive da se utvrdi da li je stacionarna tačka **lokalni maksimum**, **lokalni minimum** ili **sedlasta tačka** (u jednom pravcu gledano je minimum, a u drugom pravcu gledano je maksimum).

sedlasta tačka:



Podsećanje

- Kako se za datu funkciju **jedne** promenljive f(x) traže **lokalni ekstremi**?

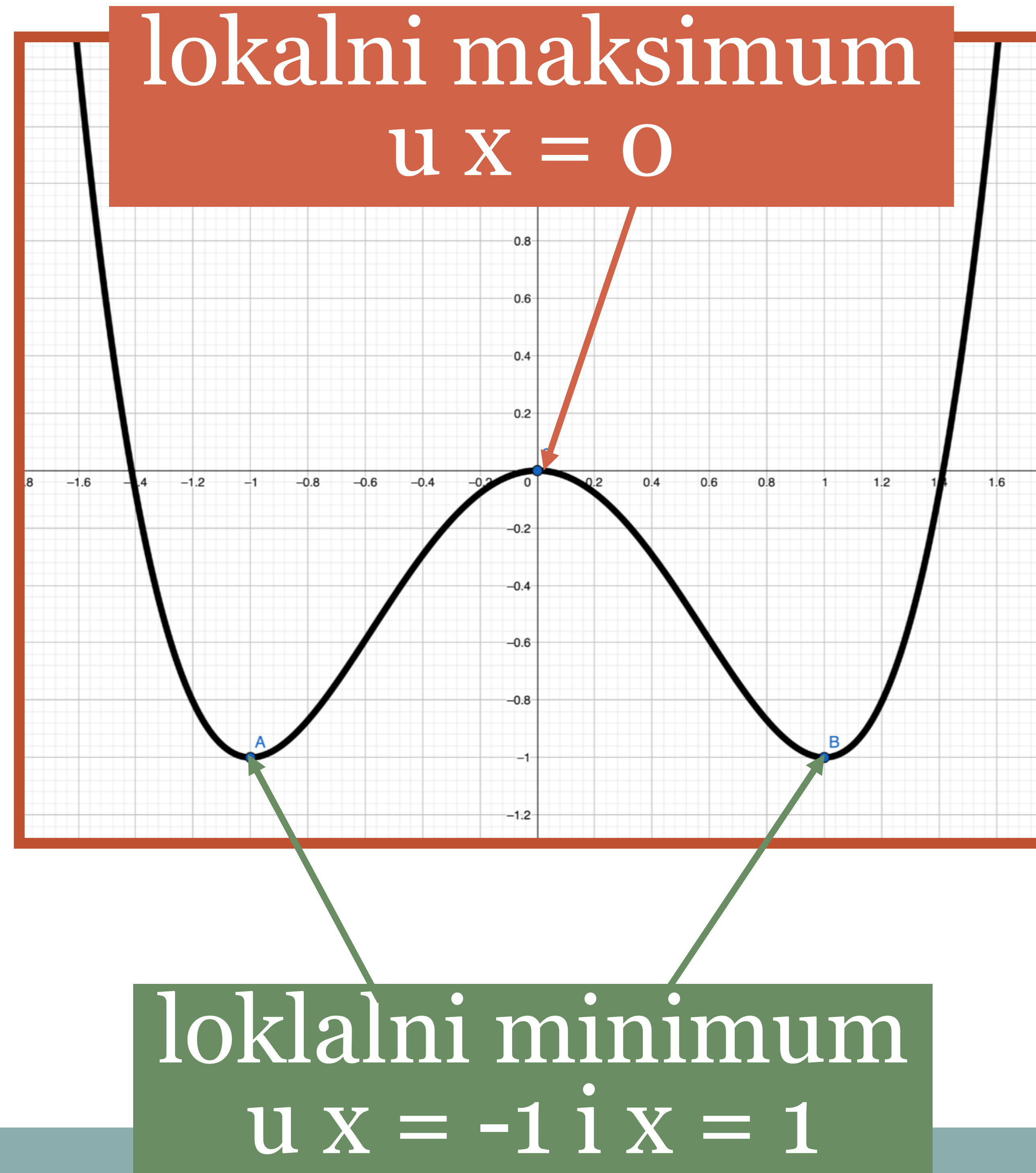
  - Prvo se pronađu **kritične tačke**:
    - $f'(x) = 0$ (ako ovo važi tačka se zove još i stacionarna)
    - f' nije definisan

  - Koristi se ili **prvi** ili **drugi izvod** da se odredi da li je i koji ekstrem u pitanju:
    - Prvi izvod: ispituje se znak od f'
    - Drugi izvod: ispituje se konveksnost/konkavnost u kritičnoj tački

Primer: upotreba drugog izvoda za određivanje ekstrema za funkciju jedne promenljive

- Posmatramo funkciju $f(x) = x^4 - 2x^2$
  - $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$
    - Stacionarne tačke: $x=-1,0,1$

      (jer je $f'(-1)=0$, $f'(0)=0$, $f'(1)=0$)
  - $f''(x) = 12x^2 - 4$
    - $f''(-1) = 8 > 0$, dakle f je **konveksna u x=-1**
    - $f''(0) = -4 < 0$, dakle f **konkavna u x=0**
    - $f''(1) = 8 >$, dakle f je **konveksna u x=1**



NOVO GRADIVO

- Postupak za pronalaženje lokalnih ekstrema za funkcije dve promenljive je sličan postupku za funkcije jedne promenljive kada se koristi drugi izvod za utvrđivanje da li je i koji ekstrem u pitanju.

  - Korak 1: Nađu se **stacionarne tačke**

    tj. tačke u kojima funkcija **<u>može</u>** imati lokalni ekstrem.

  - Korak 2: **Test zakrivljenosti** funkcije u stacionarnim tačkama:

    - Ako je funkcija **konveksna** u stacionarnoj tački, onda je u pitanju **lokalni minimum.**

    - Ako je funkcija **konkavna** u stacionarnoj tački, onda je u pitanju **lokalni maksimum.**

- Stacionarne tačke: Kažemo da je (x_0,y_0) **stacionarna tačka** funkcije f ako važi

$$f_x(x_0,y_0) = 0 \text{ i } f_y(x_0,y_0) = 0.$$

Ovo je u opštem slučaju sistem **nelinearnih jednačina** i za njegovo rešavanje ne postoji opšti postupak (kao što postoji Gausov metod za rešavanje sistema linearnih jednačina).

Test (samo za funkcije dve promenljive)

- Uvodimo oznaku: $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$
  - Ako je **$D(x_0,y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$**, onda f ima **lokalni maksimum** u (x_0,y_0).
  - Ako je **$D(x_0,y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$**, onda f ima **lokalni minimum** u (x_0,y_0).
  - Ako je **$D(x_0,y_0) < 0$**, onda f u (x_0,y_0) nema ekstremnu vrednost, već je (x_0,y_0) **sedlasta tačka** funkcije f.
  - Ako je $D(x_0,y_0) = 0$, onda se za tu tačku na ovaj način **ne može** ništa zaključiti.

Primer 1

- Dat je paraboloid $f(x,y) = x^2 + y^2$
  - Iako već znamo da ova funkcija ima lokalni minimum u (0,0), na ovom lakom primeru ćemo pokazati kako se prethodni test primenjuje.
- Nalaženje stacionarnih tačaka:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x \\ f_y(x,y) = 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

- Dakle, imamo jednu stacionarnu tačku: (0,0)

◊ Treba izračunati vrednost D u tački (0,0):

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

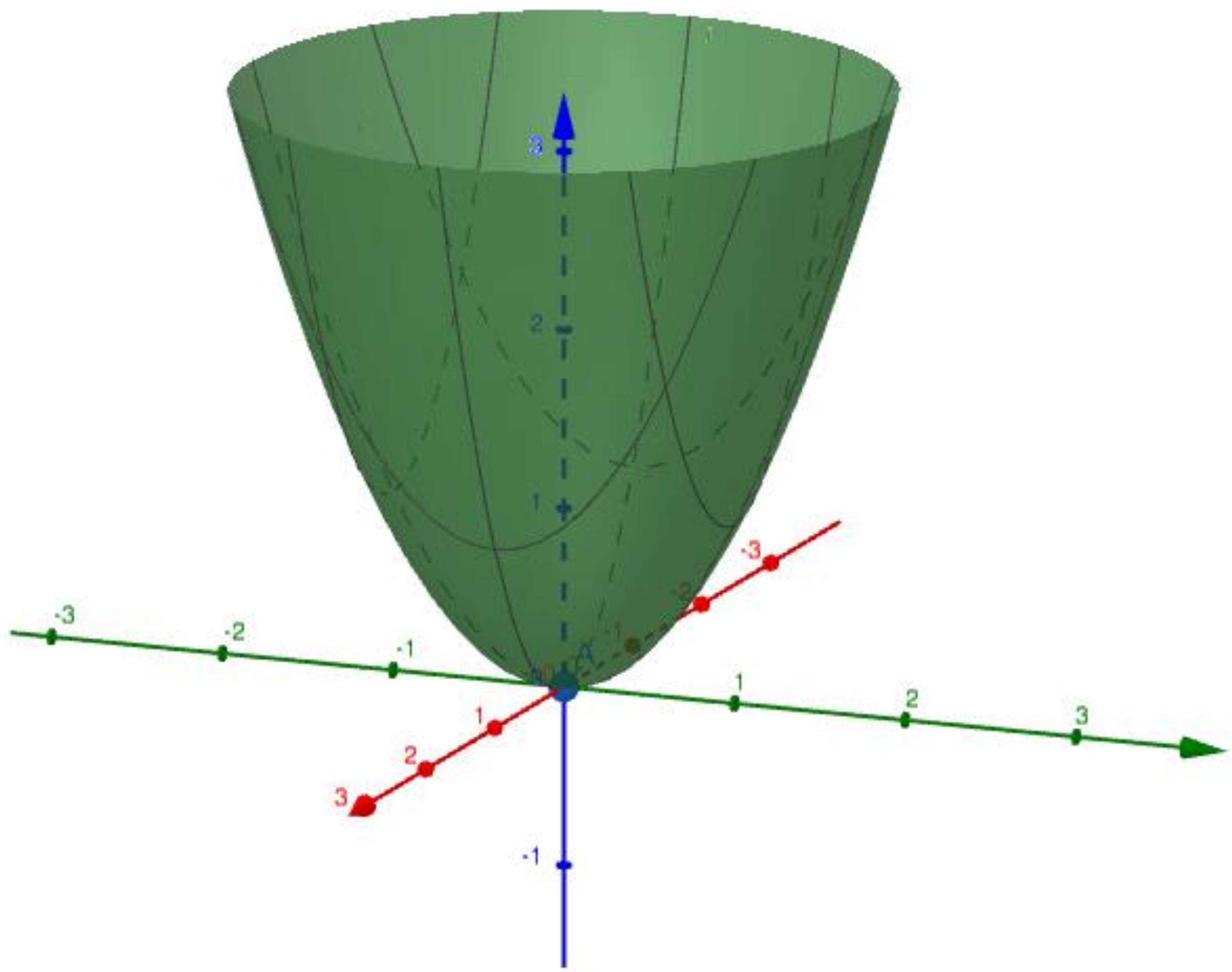
- Za to su nam potrebni drugi parcijalni izvodi:

$$f_{xx}(x,y) = 2;\ f_{yy}(x,y) = 2;\ f_{xy}(x.y) = 0$$

- Svi drugi parcijalni izvodi su jednaki nekoj konstanti, tako da za bilo koju tačku, pa i za (0,0) sledi:

D(0,0) = (2)(2) - 0 = 4 > 0.

- Kako je D(0,0) > 0 i f_{xx}(0,0) > 0, **u (0,0) ova funkcija ima lokalni minimum.**



3
2
1
-1
-3
-2
-1
1
2
3
-3
-2
-1
1
2
3

Primer 2

◊ Data je funkcija

$$f(x,y) = x^2y^3 - \frac{3}{2}y^2 - x^2$$

- Stacionarne tačke se dobijaju izjednačavajući f_x i f_y sa nulom:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy^3 - 2x \\ f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} 2xy^3 - 2x = 0 \\ 3x^2y^2 - 3y = 0 \end{cases}$$

- U prvoj jednačini se može izdvojiti zajednički činilac 2x:

$$2x(y^3 - 1) = 0$$

OVO NE ZNAČI DA JE (0,1) STACIONARNA TAČKA!

- 1) Kada je $x = 0$, onda je parcijalni izvod po x jednak nuli za bilo koju vrednost y. Kada uvrstimo to u parcijalni izvod po y sledi:

$$3x^2y^2 - 3y = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0^2 \cdot y^2 - 3y = 0$$

Tako se dobija prva stacionarna tačka: A(0,0)

- 2) Kada je y = 1, na isti način dobijamo:

$$\begin{aligned} 3x^2y^2 - 3y = 0 \Longrightarrow 3x^2(1)^2 - 3(1) &= 0 \\ 3x^2 - 3 &= 0 \\ x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1 \end{aligned}$$

Iz čega sledi da su još dve stacionarne tačke: B(-1,1) i C(1,1).

- Dakle, dobili smo tri stacionarne tačke i sada primenjujemo test:

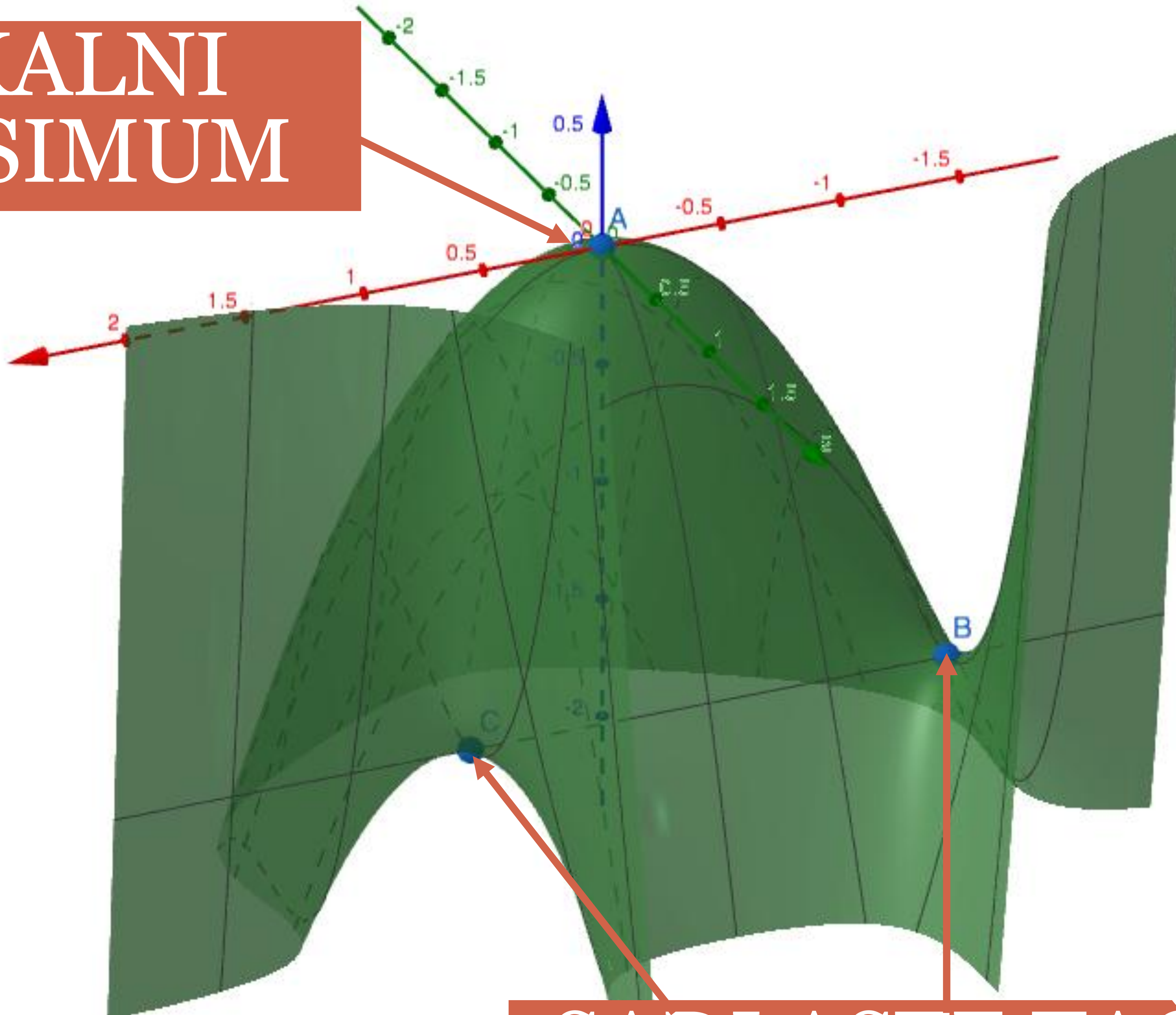
$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

$$f_{xx} = 2y^3 - 2; \quad f_{yy} = 6x^2y - 3; \quad f_{xy} = 6xy^2$$

- Podsetimo se:

Ako važi **$D(x_0,y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$**, onda f ima **lokalni maksimum** u (x_0,y_0).
Ako važi **$D(x_0,y_0) > 0$ i $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$**, onda f ima **lokalni minimum** u (x_0,y_0).
Ako važi **$D(x_0,y_0) < 0$**, onda f nema ekstrem u (x_0,y_0), već je to **sedlasta tačka.**

LOKALNI MAKSIMUM



SADLASTE TAČKE

Primer 3

- Naći ekstremne vrednosti funkcije f(x,y) = 4 + x³ + y³ - 3xy

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 - 3y \\ f_y(x,y) = 3y^2 - 3x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

- Iz prve jednačine sledi:

$$3y = 3x^2 \Longrightarrow y = x^2$$

- Kada se ovo uvrsti u drugu jednačinu, dobija se:

$$\begin{aligned} 3(x^2)^2 - 3x &= 0 \\ 3x^4 - 3x &= 0 \\ 3x(x^3 - 1) &= 0 \\ x &= 0, 1 \end{aligned}$$

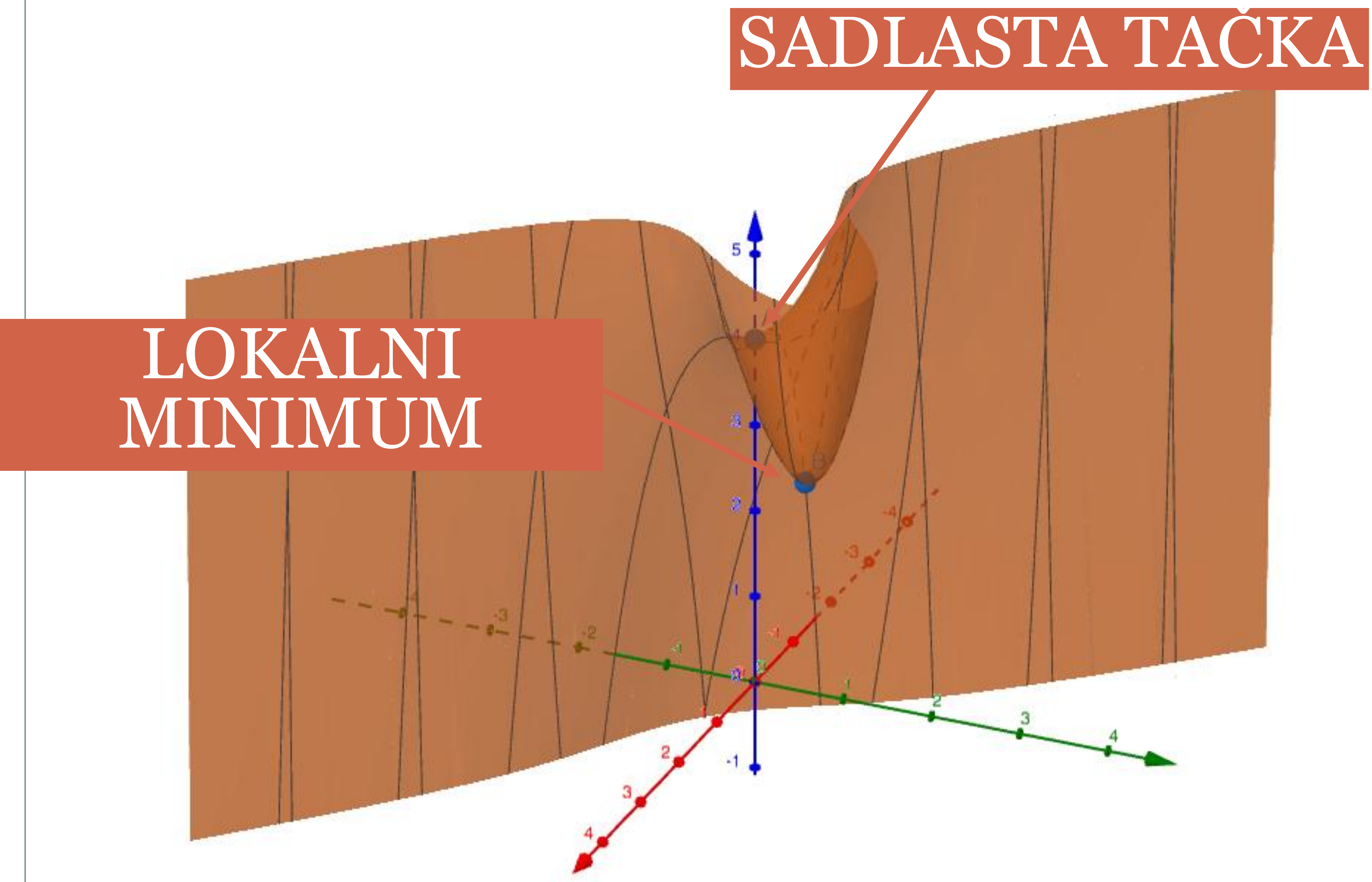
- Na osnovu izračunatog:
  - $y = x^2$ i x = 0 ili $x = 1$
    - y = $(0)^2 = 0$
    - $y = (1)^2 = 1$
  - Stacionarne tačke su: A(0,0), B(1,1)
- Test nam daje konačne odgovore.

$$f_{xx}(x,y) = 6x$$

$$f_{yy}(x,y) = 6y$$

$$f_{xy}(x,y) = -3$$

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$$


SADLASTA TAČKA
LOKALNI MINIMUM