

FUNKCIJE I REALNI BROJEVI

februar 2023.

Definicija:

Funkcija $f : X \rightarrow Y$ je preslikavanje koje SVAKOM elementu skupa X dodeljuje TAČNO JEDAN element skupa Y .

Simbolički zapisano:

$$f : X \rightarrow Y \text{ je funkcija} \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\exists_1 y \in Y)(f(x) = y).$$

Skup X se naziva **domen**, oblast definisanosti ili skup originala, a skup Y se naziva **kodomen** f . Skup $\{f(x) \in Y : x \in X\}$ se zove **skup slika** funkcije f .

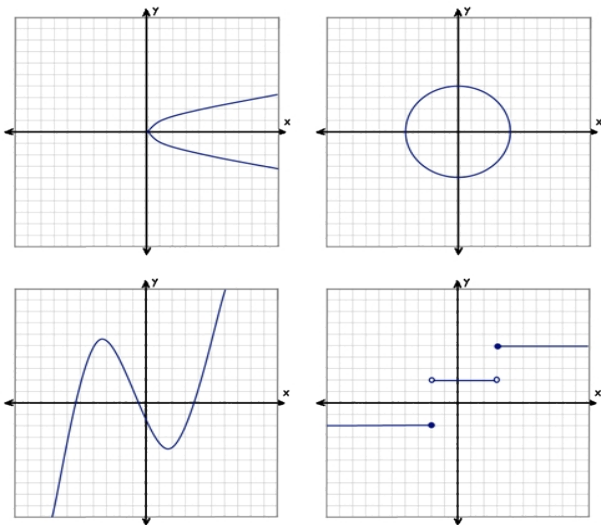
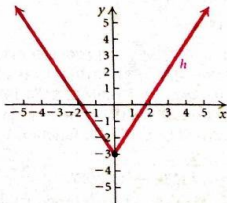
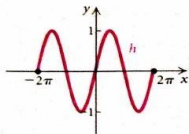
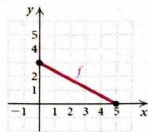
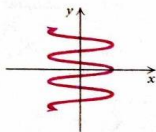
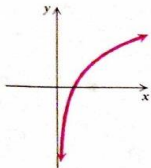


Figure: test vertikalne prave

Funkcija $f : X \rightarrow Y$ je "1 – 1" ili injekcija ako važi:

$$(\forall x_1, x_2 \in X)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)),$$

to jest ako različitim originalima odgovaraju različite slike.



Funkcija $f : X \rightarrow Y$ je "na" ili surjekcija ako važi:

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)(y = f(x)),$$

to jest ako za proizvoljan element kodomena postoji original koji se funkcijom f na njega preslikava.

Funkcija kod koje je skup slika jednak kodomenu je "na" funkcija.

Funkcija koja istovremeno i "1 – 1" i "na" naziva se **bijekcija**.

Osnovne elementarne funkcije:

- stepene funkcije
- eksponencijalne funkcije
- logaritamske funkcije
- trigonometrijske funkcije
- inverzne trigonometrijske funkcije (arkus ili ciklometrijske funkcije).

Elementarne funkcije se dobijaju iz osnovnih elementarnih funkcija pomoću konačnog broja elementarnih operacija (+, -, ·, :) i konačnog broja njihovih kompozicija.

Domen za funkcije u ovom kursu je **skup realnih brojeva** ili neki njegov podskup.

Prirodni brojevi

Neki skup X je određen ako postoji pravilo kojim se za proizvoljan objekat, to jest element x može utvrditi da li x pripada skupu X , $x \in X$, ili mu ne pripada, $x \notin X$.

Skup prirodnih brojeva se može zadati nabrojanjem i intuitivnim shvatanjem tog nabrojanja:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

pri čemu se podrazumeva da \dots označava pravilo po kojem važi da ako je neki broj n u skupu \mathbb{N} onda je i $n + 1$ u skupu \mathbb{N} .

Princip matematičke indukcije

Princip matematičke indukcije je od neprocenjivog značaja za izučavanje svojstava prirodnih brojeva i koristi se pri dokazivanju

- raznih nejednakosti,
- osobina deljivosti,
- identiteta u kojima figurišu prirodni brojevi.

Princip matematičke indukcije:

Neka su dati iskazi $P(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Ako važi:

- 1) Iskaz $P(1)$ tačan (istinit).
- 2) Iz pretpostavke da je iskaz $P(k)$ istinit (za ma koji broj $k \in \mathbb{N}$) sledi da je iskaz $P(k + 1)$ istinit.

Tada je iskaz $P(n)$ istinit za sve prirodne brojeve n .

Primer

Dokazati da je zbir prvih n neparnih brojeva jednak kvadratu njihovog broja:

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Primer

Dokazati nejednakost

$$2^n \geq 2n + 1 \quad \text{za svako} \quad n \geq 3.$$

U skupu prirodnih brojeva definišu se operacije sabiranja i množenja i relacija poretka. Relacija poretka \leq je

- refleksivna: $(\forall x \in \mathbb{N})(x \leq x)$;
- antisimetrična: $(\forall x, y \in \mathbb{N})(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$;
- tranzitivna: $(\forall x, y, z \in \mathbb{N})(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$.

\mathbb{N} je totalno, to jest linearno uređen skup:

$$(\forall x, y \in \mathbb{N})(x \leq y \vee y \leq x).$$

Uz relaciju \leq (manje ili jednako), posmatra se i *strogo uređenje* (strogo manje):

$$x < y \iff x \leq y \wedge x \neq y.$$

U odnosu na sabiranje, prirodni brojevi obrazuju **grupoid**. To znači da je sabiranje zatvorena i asocijativna operacija.

Isto važi i za množenje, pri čemu je broj 1 jedinični element:

$$(\forall x \in \mathbb{N})(x \cdot 1 = x).$$

Celi brojevi

Prelazak sa prirodnih brojeva na cele brojeve, skup \mathbb{Z} , je posledica želje da se struktura $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ obogati tako da jednačina oblika

$$a + x = b$$

ima rešenje za sve $a, b \in \mathbb{N}$.

Jasno, ako je $a < b$ (znači $a \leq b$ i $a \neq b$) onda je rešenje $x = b - a$ prirodan broj. U suprotnom, $b - a$ je element nekog novog skupa.

Tako skup \mathbb{Z} može da se definiše kao skup u kojem se nalaze rešenja svih mogućih jednačina oblika $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$. Pri tome se operacije sabiranja i množenja i relacija poretka proširuju na odgovarajući način.

Ako je $b = 0$, onda se rešenje jednačine $a + x = 0$ zove suprotni broj broju a i uvodi se oznaka $x = -a$. Tako se dobija

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup -\mathbb{N},$$

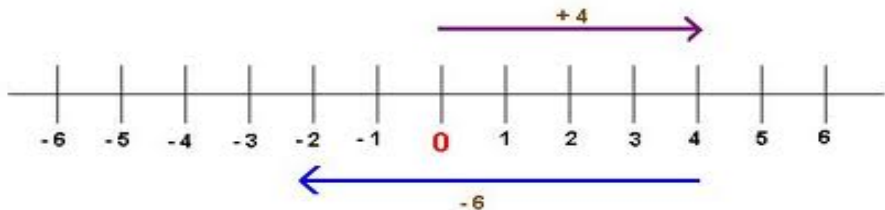
gde je $-\mathbb{N} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Za razliku od $(\mathbb{N}, +)$, struktura $(\mathbb{Z}, +)$ je komutativna grupa. U njoj je **0 neutralni element**, i svaki element ima **inverzni**:

$$(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})(x + y = 0).$$

Inverzni element sabiranja je, u stvari, suprotni broj posmatranog broja, pa je ovo proširenje prethodne strukture ekvivalentno gore opisanom proširenju skupa \mathbb{N} rešenjima linearnih jednačina.

Celi brojevi se, kao i prirodni, mogu predstaviti na brojnoj pravoj. Pri tome, $x < y$ implicira da je y desno od x . Svi brojevi $x \in \mathbb{Z}$ za koje važi $0 < x$ (koji se nalaze desno u odnosu na 0) su *pozitivni brojevi*, a brojevi koji su strogo manji od nule se zovu *negativni brojevi*.



Racionalni brojevi

Kao i kod uvođenja celih brojeva, motivacija za uvođenje racionalnih brojeva, to jest razlomaka, je algebarske prirode.

Struktura $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ je totalno uređen *prsten*.

Želja za proširenjem svojstva sabiranja na operaciju množenja, je, u stvari želja za proširenjem strukture prstena na strukturu *polja*.

Stoga se skup celih brojeva proširuje novim elementima koji čine

skup \mathbb{Q} racionalnih brojeva

tako da za svaki element $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ postoji njemu *inverzni element* $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tako da je $x \cdot x^{-1} = 1$. Jasno, broj nula se izuzima, jer $0 \cdot x = 0$ ne može da važi ni za koje $x \in \mathbb{Q}$.

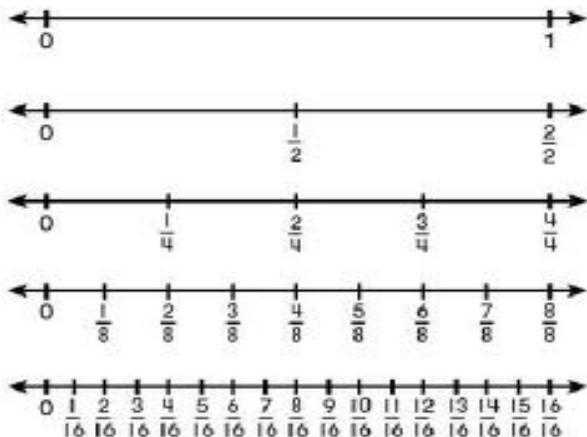
Ako su a i b uzajamno prosti brojevi (znači nemaju zajedničkih delitelja većih od 1) i ako uvedemo ograničenje: $a \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Z}$, onda ćemo dobiti jedinstvenu reprezentaciju svakog racionalnog broja u vidu razlomka.

Dakle,

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{b}{a} : a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Na ovaj način se dobija struktura totalno uređenog polja racionalnih brojeva, $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$.

Svi racionalni brojevi imaju geometrijsku reprezentaciju na brojnoj pravci.



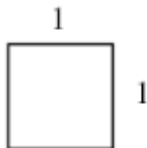
Osim ovakvog načina predstavljanja, racionalni brojevi se mogu predstaviti u jedinstveno određenom decimalnom zapisu. Pri tome, ili postoji **konačno mnogo cifara** u decimalnom zapisu ili se **nakon izvesnog perioda cifre u decimalnom zapisu ponavljaju**.

Tako je na primer $0,23232323 \dots = 0,\overline{23}$ jednak broju $\frac{23}{99}$ jer je

$$100 \cdot 0,\overline{23} = 23 + 0,\overline{23} \quad \Rightarrow \quad 99 \cdot 0,\overline{23} = 23 \quad \Rightarrow \quad 0,\overline{23} = \frac{23}{99}.$$

Realni brojevi

Do sada je motivacija za proširivanje skupa brojeva dolazila iz algebre, tj. rešavanja jednačina.



Međutim, sada se nailazi na prepreke i u geometriji pri merenju dužine, npr. dijagonale jediničnog kvadrata, $\sqrt{2}$ koja nije racionalan broj!

Zatim, npr. pozitivno rešenje jednačine

$$x^2 + x - 1 = 0$$

nije racionalan broj: $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0,618033\dots$ Ova jednačina takođe dolazi iz geometrijskog problema podele jedinične duži tako da se duži deo odnosi prema celoj duži kao kraći deo prema dužem delu ($x : 1 = (1 - x) : x$).

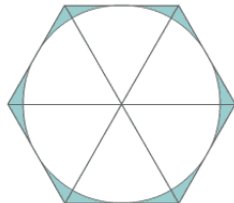
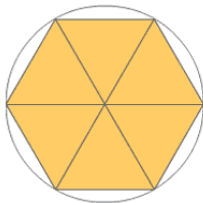
Tako da se razlomci prirodno proširuju tzv. **algebarskim brojevima** - korenima polinoma sa celobrojnim koeficijentima, tj. rešenjima algebarskih jednačina.

Postoje i brojevi, tj. primeri duži čija dužina nije rešenje algebarske jednačine. Posmatra se problem određivanja poluobima $\mathcal{O}/2$ jedinične kružnice, kružnice poluprečnika 1.

Arhimed je, u III veku pre Hrista utvrdio da važi

$$\frac{223}{71} < \frac{\mathcal{O}}{2} < \frac{22}{7}.$$

Da bi ovo pokazao izvršio je merenje poluobima pravilnih mnogouglova upisanih u i opisanih oko jedinične kružnice.



Arhimed je uzastopno duplirao broj stranica, mereći pritom odgovarajuće poluobime dvanaestougla, četrdesetougla i devedesetšestougla. Ova metoda se naziva iscrpljivanje ili ekshaustija.

Istom metodom Ludolf fon Cojlen je u XVI veku izračunao poluobim jedinične kružnice sa 35 cifara iza decimalnog zareza:

3.14159265358979323846264338327950288,

a 29. januara 2020. godine izračunato je $50 \cdot 10^{12}$ cifara tog broja. Tek u XVIII veku je dokazano da π nije racionalan broj, a u XIX da nije algebarski.

Još neki transcendentni brojevi:

0,123456789101112...

$$10^{-1!} + 10^{-2!} + \dots + 10^{-10!} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281828459045235360287471352662497757$$

$$e^\pi$$

Dakle, skup realnih brojeva čine **RACIONALNI** i **IRACIONALNI** brojevi:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}, \quad \text{gde je} \quad \mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset.$$

Iracionalni brojevi se sastoje od **algebarskih** i **transcendentnih** brojeva i ta dva skupa su diskjunktna.

Struktura totalno uređenog polja racionalnih brojeva se mora proširiti strukturom koja bi očuvala operacije i totalno uređenje, a koja bi obuhvatila i iracionalne brojeve. Ta nova struktura se uvodi dodatnom aksiomom kompletnosti (neprekidnosti ili potpunosti) koja dodaje i sve iracionalne brojeve.

Dakle, $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ je totalno uređeno polje i u $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ važi aksioma kompletnosti. Navodimo jednu od njenih ekvivalentnih formulacija - princip supremuma:

Svaki neprazan podskup skupa \mathbb{R} koji je ograničen sa gornje strane ima supremum.

Definicije:

- Skup $S \subset \mathbb{R}$ je *ograničen sa gornje strane* (ograničen odozgo) ako postoji $M \in \mathbb{R}$ takav da je

$$x \leq M \quad \text{za svako} \quad x \in S.$$

- Skup $S \subset \mathbb{R}$ je *ograničen sa donje strane* (ograničen odozdo) ako postoji $m \in \mathbb{R}$ takav da je

$$m \leq x \quad \text{za svako} \quad x \in S.$$

Skup $S \subset \mathbb{R}$ je **ograničen** ako je ograničen i sa gornje i sa donje strane.

Najmanje gornje ograničenje ograničenog skupa S se zove **SUPREMUM** skupa S i označava $\sup S$, a najveće donje ograničenje **INFIMUM** skupa S i označava sa $\inf S$.

$\sup S$ i $\inf S$ mogu ali ne moraju pripadati skupu S . Ako $\sup S \in S$, onda se to zove maksimalni element skupa S i označava $\max S$. Analogno za $\inf S \in S$ je to minimalni element skupa S : $\min S$.

Elementi koji nam još trebaju za rad su intervali - skupovi realnih brojeva čiji elementi zadovoljavaju određene nejednakosti:

- otvoreni interval: $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- zatvoreni interval: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- poluotvoreni intervali: $(a, b]$ i $[a, b)$
- beskonačni intervali: $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$,
 $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$
i analogno (a, ∞) , $[a, \infty)$

Kod transcendentnog broja π smo videli da se do njega došlo metodom uzastopnog približavanja njegovoj stvarnoj vrednosti, tj. neograničenom broju aproksimacija koje su racionalni brojevi. Isto tako se dobija i transcendentan broj e , a ovo važi i za algebarski broj $\sqrt{2}$ koji se može aproksimirati nizom brojeva definisanih na primer sa

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ovo nas uvodi u prvu temu našeg kursa - Brojni nizovi, i pokazuje da nam treba nova operacija koja podrazumeva i mogućnost manipulisanja sa beskonačnom količinom razlomaka. Ta operacija se naziva **granična vrednost** i implicitno se nalazi u srcu konstrukcije realnih brojeva - principu supremuma.