# Funkcije više promenljivih

Uvod u funkcije više promenljivih

Na ovom predavanju će biti reči o:

- oznakama za funkcije više promenljvih
- domenu funkcija više promenljvih
- graficima funkcija više promenljvih
- nivo linijama za funkcije više promenljvih

# Oznake za funkcije više promenljvih

Do sada smo proučavali funkcije jedne promenljive, u oznaci y = f(x), gde je x bila nezavisna promenljiva, a y zavisna promenljiva. Proširujemo ovu ideju na funkcije koje mogu imati više od jedne nezavisne promenljive. Posmatrajmo, na primer, ove funkcije:

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$g(x, y, z) = 2xe^{yz}$$

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4$$

# Primer

Zapremina $V$ valjka zavisi od poluprečnika osnove $r$ i njegove visine $h$.

Znamo da je $V = \pi r^2 h$.

Kažemo da je $V$ funkcija od $r$ i $h$.

Pišemo $V(r, h) = \pi r^2 h$.

Kada se traži vrednost funkcije više promenljivih, umesto da zamenjujemo samo vrednost za x, zamenićemo vrednosti za svaku nezavisnu promenljivu.

Na primer, izračunati f(x, y) za (2, 3), (4, -3) i (5, y).

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

$$f(2,3) = 2 \cdot 2^2 + 3^2 = 2 \cdot 4 + 9 = 17$$

$$f(4,-3) = 2 \cdot 4^2 + (-3)^2 = 2 \cdot 16 + 9 = 41$$

$$f(5, y) = 2 \cdot 5^2 + y^2 = 2 \cdot 25 + y^2 = 50 + y^2$$

Funkcija dve promenljive: Funkcija dve promenljive x i y je pravilo koje svakom paru (x, y) iz datog skupa D (koji se naziva domen) dodeljuje jedinstvenu vrednost z=f (x, y).

Funkcije više od dve promenljive se definišu analogno.

Operacije koje možemo izvesti na funkcijama jedne promenljive, mogu se takođe izvesti i na funkcijama više promenljivih.

Na primer, za funkcije dve promenljive f i g važi:

$$(f \pm g)(x, y) = f(x, y) \pm g(x, y)$$

$$(f \cdot g)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \;, \; za \;\; g(x, y) \neq 0$$

## Domen funkcija više promenljivih

Osim u slučaju kada je domen unapred zadat, domenom ćemo smatrati skup svih tačaka za koje je dati izraz definisan (prirodni domen).

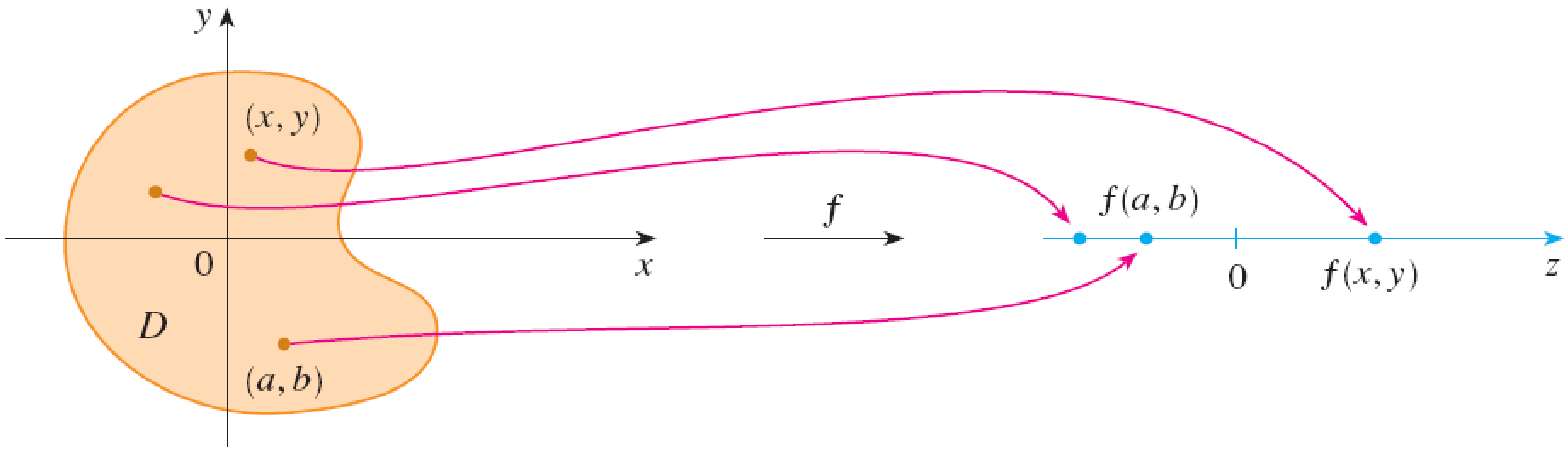
Na primer, posmatrajmo funkcije

$$f(x,y)=3x^2+y^2 \quad \text{i} \quad g(x,y)=\frac{1}{\sqrt{xy}}$$

Domen funkcije f(x,y) je cela xy-ravan. Za svaki par iz xy-ravni ćemo dobiti realnu vrednost za f.

Domen funkcije g(x, y) je skup svih tačaka (x, y) xy-ravni takvih da je proizvod xy veći od 0. To će biti sve tačke prvog i trećeg kvadranta.

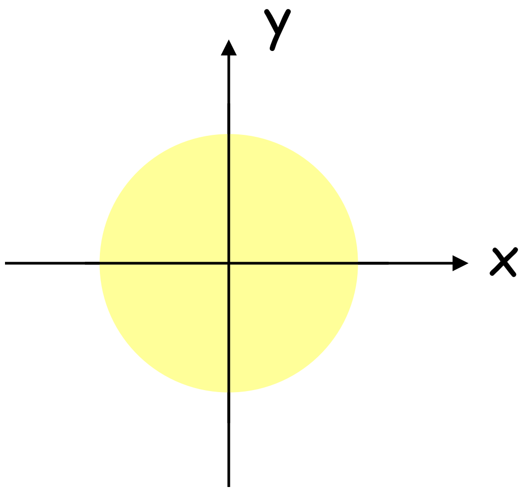
Jedan način vizualizacije funkcije dve promenljive pomoću dijagrama sa strelicama (domen *D* je podskup *xy*-ravni):



Primer 1: Odrediti domen funkcije $f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2}$

Rešenje: Domen funkcije f(x, y) je skup svih tačaka (x, y) koje zadovoljavaju nejednakost:

$$25-x^2-y^2 \geq 0 \quad \text{tj.} \quad 25 \geq x^2+y^2$$



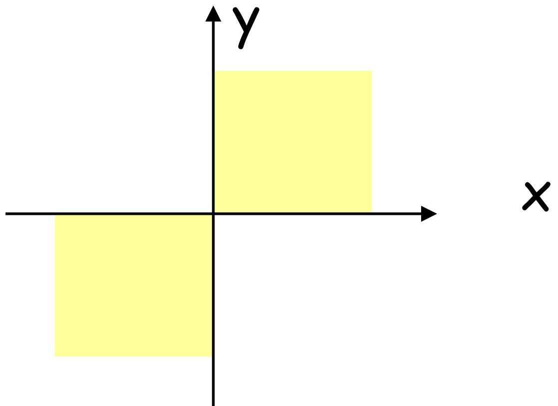
Primer 2: Odrediti domen funkcije

$$h(x,y)=\ln(xy)$$

Rešenje:
Znamo da argument logaritamske funkcije mora biti veći od nule, tako imamo

$$x \cdot y > 0$$

Ova nejednakost važi za tačke u I i III kvadratnu. Napomenimo da x-osa i y-osa NISU u domenu.



Primer 3: Odrediti domen funkcije

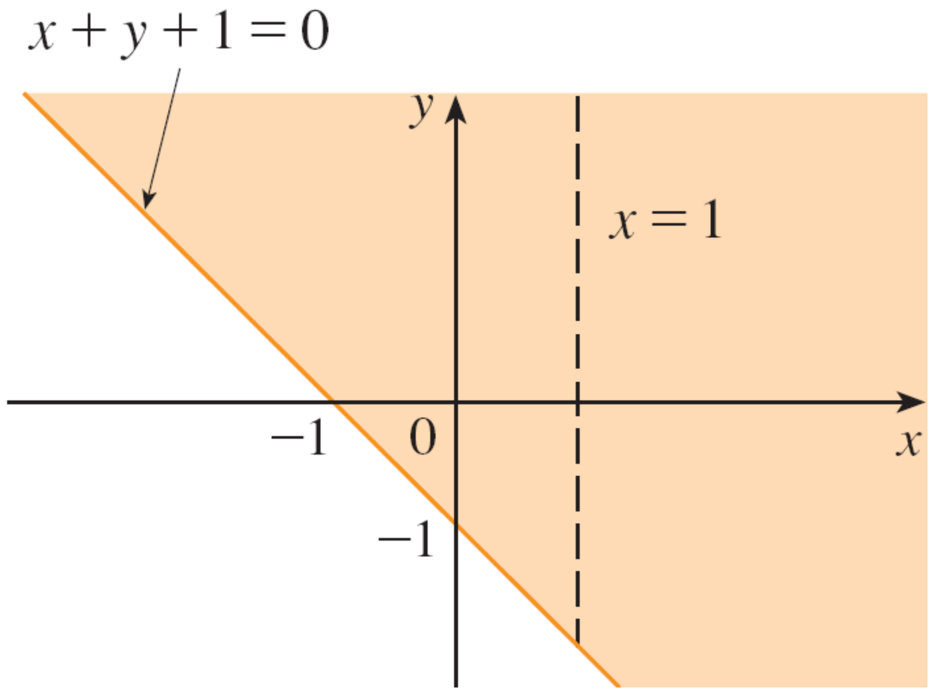
$$f(x,y)=\frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$$

Izraz za *f* ima smisla ako je imenilac različit od nule i veličina pod korenom nenegativna.

Tako da je domen funkcije *f*:

$$D = \{(x, y) \mid x + y + 1 \geq 0,\ x \neq 1\}$$

Nejednakost $x + y + 1 \geq 0$, tj. $y \geq -x - 1$, opisuje tačke koje se nalaze na pravi $y = -x - 1$ i iznad nje, a $x \neq 1$ znači da su tačke na pravi $x = 1$ isključene iz domena.



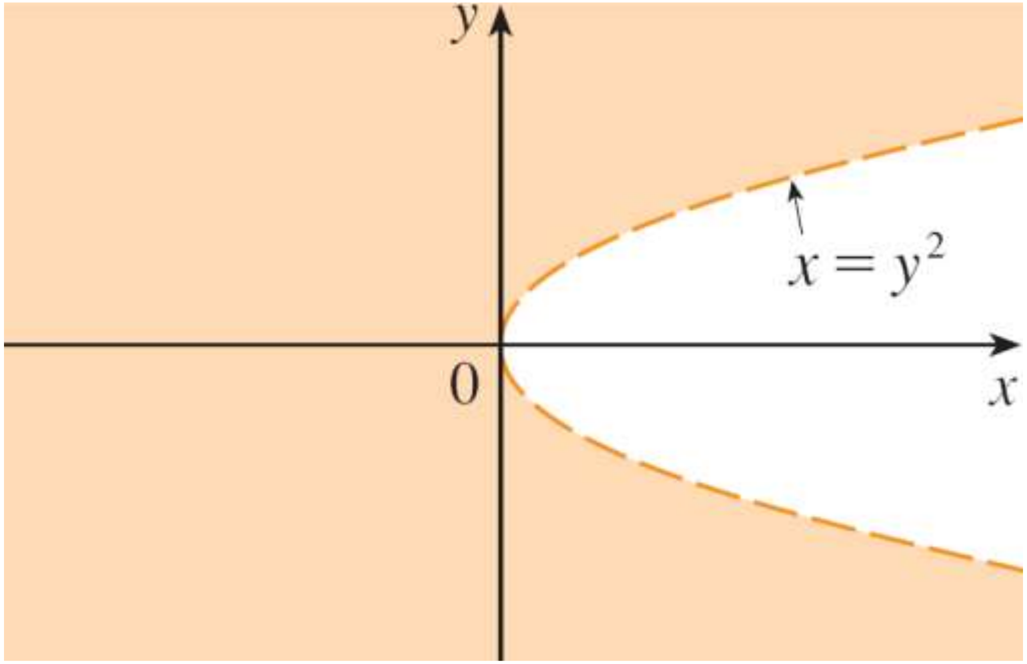
Primer 4: Odrediti domen funkcije

$$f(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$

Kako je $\ln(y^2 - x)$ definisano samo za $y^2 - x > 0$, tj. $x < y^2$, domen funkcije $f$ je

$$D = \{(x, y) | \, x < y^2 \}$$

To je skup tačaka koje se nalaze levo od parabole $x = y^2$.



Primer 5: Odrediti domen funkcije

$$g(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2-16}$$

Rešenje:
g je funkcija tri promenljive, tako da domen NIJE površina u xy-ravni. Domen funkcije g je telo u 3-dimenzionalnom koordinatnom sistemu.

Izraz pod korenom mora biti nenegativan, tako da dobijamo sledeće nejednakosti:

$$x^2+y^2+z^2-16\geq 0 \text{ tj. } x^2+y^2+z^2\geq 16$$

Iz ove nejednakosti sledi da domen čine sve trojke na sferi poluprečnika 4 sa centrom u koordinatnom početku i izvan nje.

# Grafici funkcija više promenljivih

Grafik funkcije dve promenljive, z = f(x, y), je skup uređenih trojki (x, y, z) za koje su uređene dvojke (x, y) iz domena.

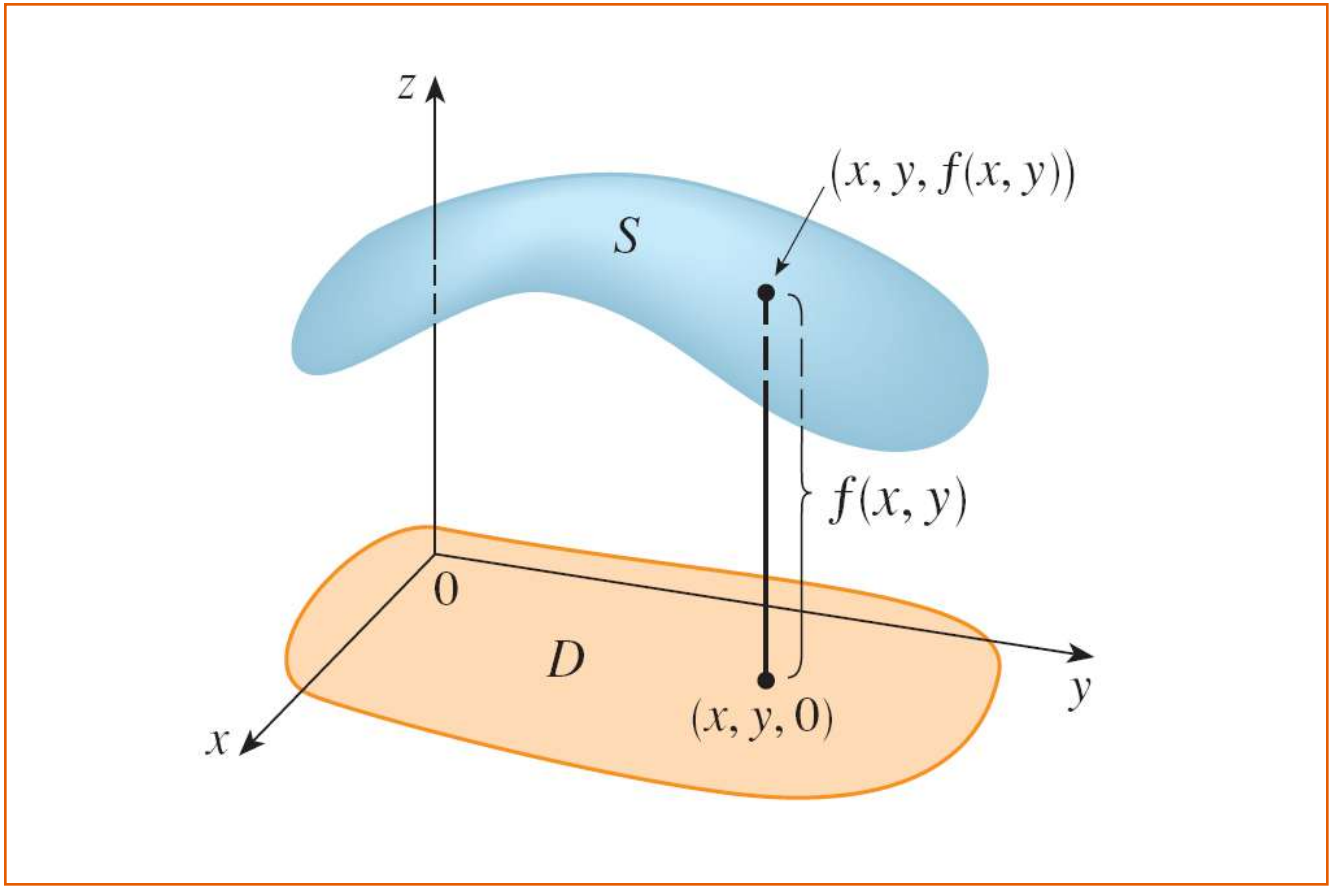
*Grafik funkcije z = f(x, y) je površ u 3-dimenzionalnom prostoru.

Grafik funkcije tri pormenljive w = f(x, y, z) je skup svih tačaka (x, y, z, w) za koje su uređene trojke (x, y, z) iz domena.

*Grafik funkcije w = f(x, y, z) je u 4 dimenzije.

Taj grafik ne možemo nacrtati, kao ni grafik bilo kakve funkcije koja ima 3 ili više nezavisnih promenljivih.

Grafik površi $f$ se nalazi tačno iznad ili ispod svog domena $D$ ($D$ je u $xy$-ravni):



Primer 6: Skicirati grafik funkcije

$$z = f(x, y) = 6 - 3x - 2y.$$

Jednačinu ove fukcije

$$z = 6 - 3x - 2y$$

možemo zapisati i u obliku

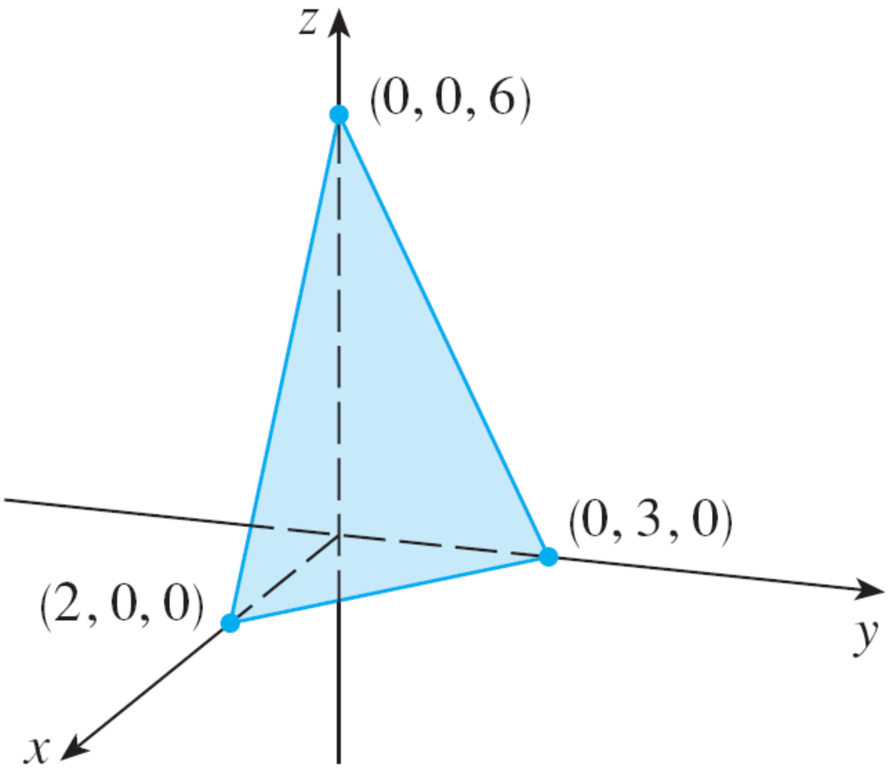
$$3x + 2y + z = 6.$$

Vidimo da je to jednačina ravni. Da bismo je nacrtali, prvo ćemo naći preseke sa koordinatnim osama.

Stavljajući da je $y = z = 0$ u jednačinu, dobijamo $x = 2$, što je tačka preseka sa $x$-osom.

Slično dobijamo da je presek sa $y$-osom u $y = 3$, a sa $z$-osom u $z = 6$.

To nam pomaže da skiciramo deo ravni koja se nalazi u prvom oktantu:



Funkcija iz prethodnog primera je specijalan slučaj funkcije

$$f(x, y) = ax + by + c$$

To je linearna funkcija dve promenljive.

Grafik takve funkcije je zadat jednačinom

$$z = ax + by + c$$

tj.

$$ax + by - z + c = 0$$

Tako da vidimo da je to ravan.

Videćemo kasnije da linearne funkcije dve promenljive (ravni) imaju izuzetno važnu ulogu u analizi funkcija dve promenljive.

Bitne su iz istog razloga zbog kog su linearne funkcije jedne promenljive (tj. prave) važne u analizi funkcija jedne promenljive.

Primer 7: Naći domen i kodomen funkcije i skicirati njen grafik.

$$z = f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$$

Rešenje: Na osnovu Primera1 znamo da domen ove funkcije čine svi uređeni parovi (x, y) na ili u unutrašnjosti kružnice sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika 5.

Za svako (x, y) važi nejednakost: $x^2 + y^2 \leq 25$

Kodomen se sastoji od svih mogućih vrednosti za z.
Kodomen mora biti pozitivan broj jer je z jednako kvadratnom korenu, a ograničenje za (x, y) nam daje: $x^2 + y^2 \leq 25$,
tako da vrednost pod korenom može varirati samo između 0 i 25.

Dakle, kodomen je $0 \leq z \leq 5$.

Rešenje Primera 7 - nastavak:

Skiciraćemo funkciju: $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$

Kvadriranjem obe strane dobijamo: $z^2 = 25 - x^2 - y^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

Ovo je sfera poluprečnika 5 sa centrom u koordinatnom početku. Ovo nam može pomoći da skiciramo grafik funkcije, ali moramo biti oprezni!!!

Funkcija $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ i jednačina $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

nisu iste! Jednačina ne predstavlja z kao funkciju od x i y – jer nemamo jednu vrednost za z za svako (x, y). Imajući na umu da je kodomen funkcije $0 \le z \le 5$ možemo zaključiti da ova funkcija predstavlja gornju polusferu.

Za skiciranje površi u 3-dimenzije može biti korisno posmatranje preseka sa koordinatnim ravnima:

1. Presek sa xy-ravni, z = 0, daje jednačinu:

$$0=\sqrt{25-x^2-y^2} \quad ili \quad x^2+y^2=25$$

2. Presek sa yz-ravni, x = 0, daje jednačinu:

$$z=\sqrt{25-y^2} \quad \text{tj.} \quad y^2+z^2=25$$

3. Presek sa xz-ravni, y = 0, daje jednačinu :

$$z=\sqrt{25-x^2} \quad \text{tj.} \quad x^2+z^2=25$$

Mogu se posmatrati i preseci sa ravnima koje su paralelne koordinatnim ravnima:

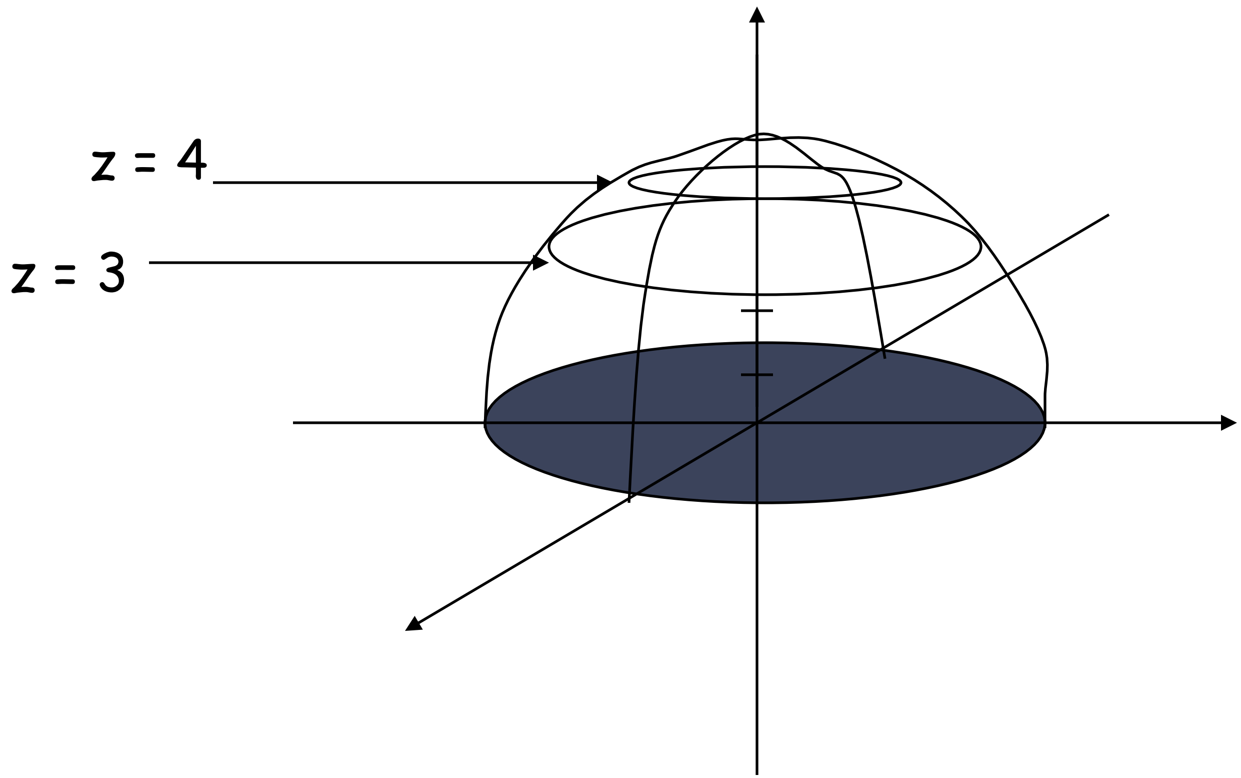
4. Neka je z = 3: $3 = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ tj. $x^2 + y^2 = 16$

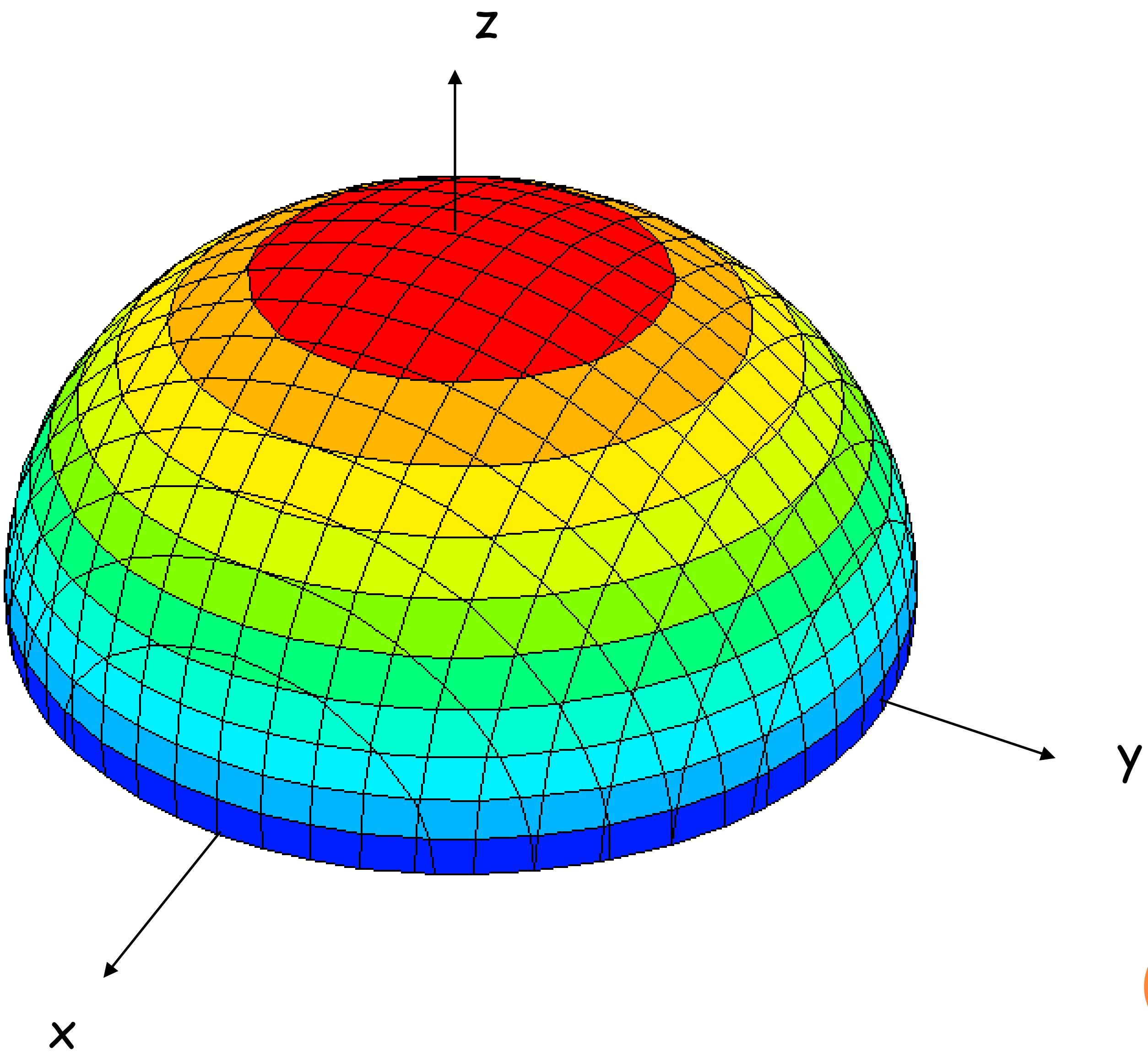
Tako da je presek površi i ravni z = 3 (koja je paralelna sa xy-ravni) kružnica sa centrom u (0,0,3) poluprečnika 4.

5. Neka je z = 4: $4 = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ tj. $x^2 + y^2 = 9$

Presek površi i ravni z = 4, (koja je paralelna sa xy-ravni) kružnica sa centrom u (0,0,4) poluprečnika 3.

Na slici je SKICA sa tri preseka, dva sa ravnima koje su paralelne sa xy-ravni i jedan sa ravni koja je paralelna sa xz-ravni.




z
y
x

Primer 8: Skicirati površ $z = 9 - x^2 - y^2$

Rešenje: Domen je cela xy-ravan, a kodomen $z \leq 9$

1. Presek sa xy-ravni, z = 0, je dat jednačinom

$$x^2 + y^2 = 9$$ kružnica

2. Presek sa yz-ravni, x = 0, je dat jednačinom :

$$z = 9 - y^2$$ parabola

3. Presek sa xz-ravni, y = 0, je dat jednačinom :

$$z = 9 - x^2$$ parabola

Rešenje Primera 8 - nastavak:

Preseci sa ravnima koje su paralelne xy-ravni:

4. Presek sa ravni z = 5 je dat jednačinom:

$$5 = 9 - x^2 - y^2$$

tj.

$$x^2 + y^2 = 4$$

Kružnica sa centrom u (0, 0, 5) poluprečnika 2.

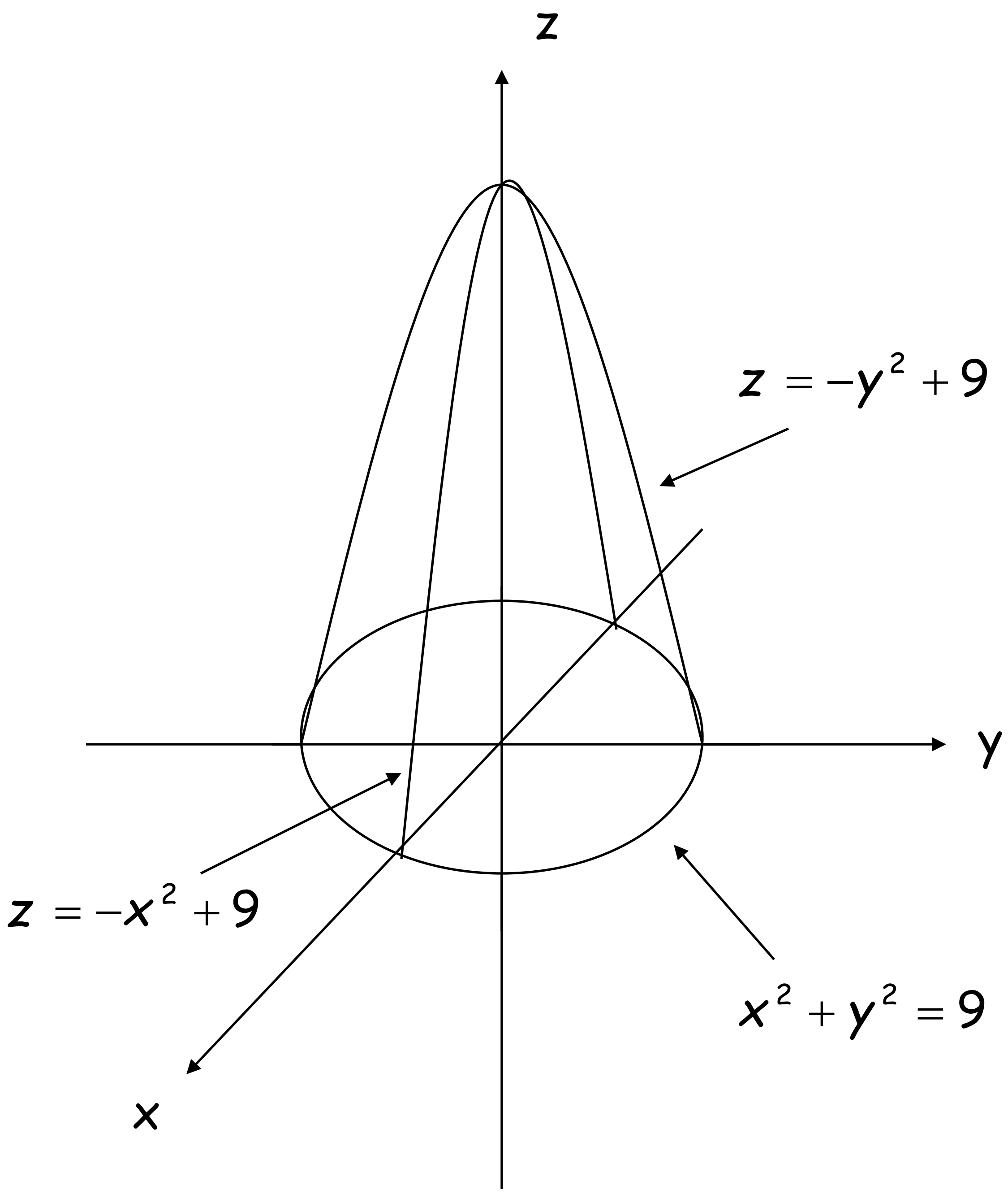
5. . Presek sa ravni z = -7 je dat jednačinom:

$$-7 = 9 - x^2 - y^2$$

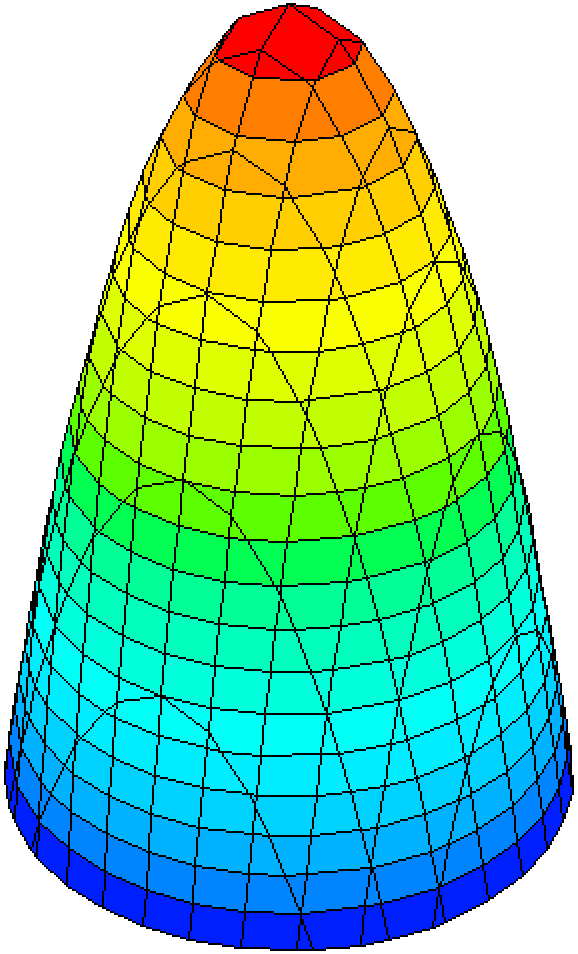
tj.

$$x^2 + y^2 = 16$$

Kružnica sa centrom u (0, 0, -7) poluprečnika 4.


z
$z = -y^2 + 9$
y
$z = -x^2 + 9$
$x^2 + y^2 = 9$
x

Grafik površi

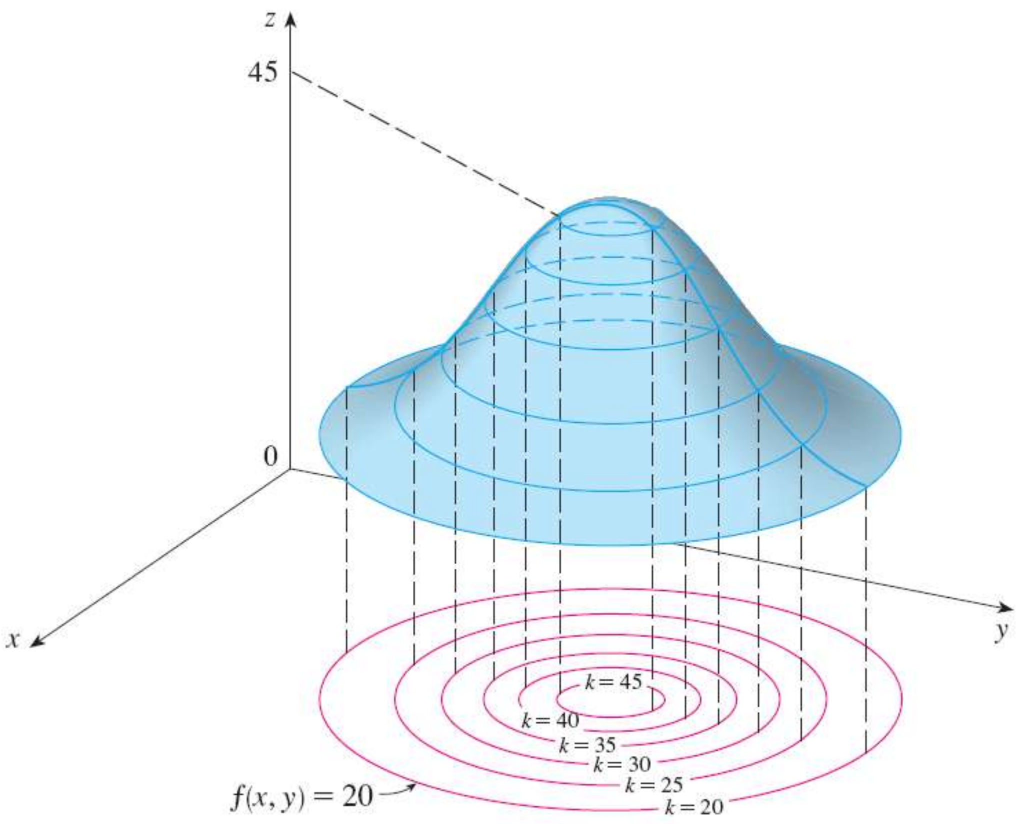


# Nivo - krive

Preseci površi i ravni koje su paralelne xy-ravni, tj. preseci dobijeni kada je $z = c$ ($f(x,y) = c$) gde je c konstanta, nacrtani u xy-ravni, zovu se nivo-krive površi.

Metod je pozajmljen iz kartografije. Na osnovu grafika se vidi veza između nivo-krivih i horizontalnih preseka.

Nivo-krive $f(x, y) = k$ su "tragovi" grafika funkcije $f$ u horizontalnoj ravni $z = k$ projektovani dole u $xy$-ravan.



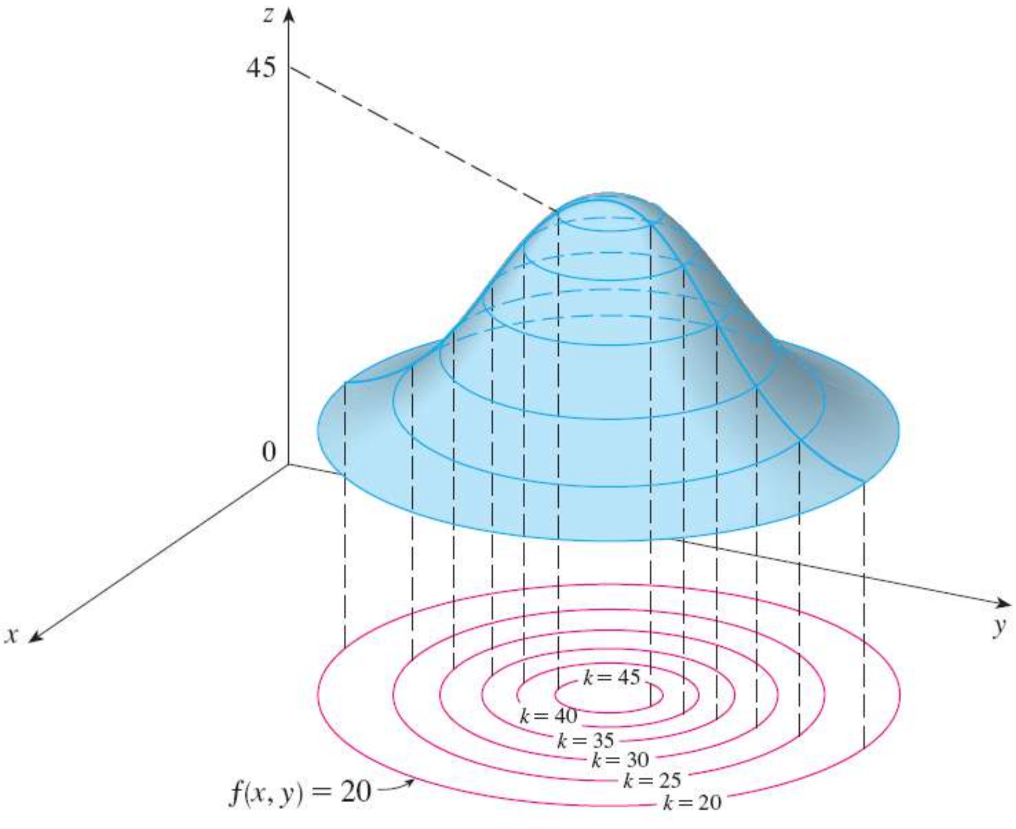
Pretpostavimo da imamo nacrtane nivo-krive funkcije. Da bi dobili grafik funkcije, treba da ih zamislimo“podignute” na površ na naznačenoj visini.

Tada možemo mentalno da “sastavimo” sliku grafika.

Površ je:

- strma tamo gde su nivo-krive blizu jedna drugoj

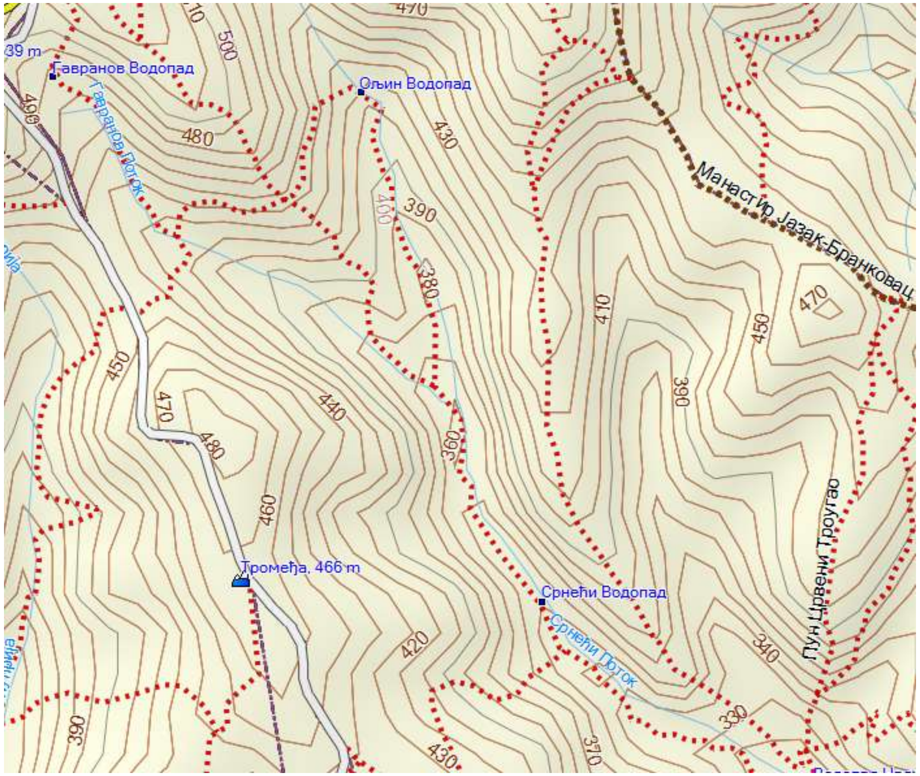
- nešto ravnija tamo gde su nivo-linije udaljenije jedna od druge



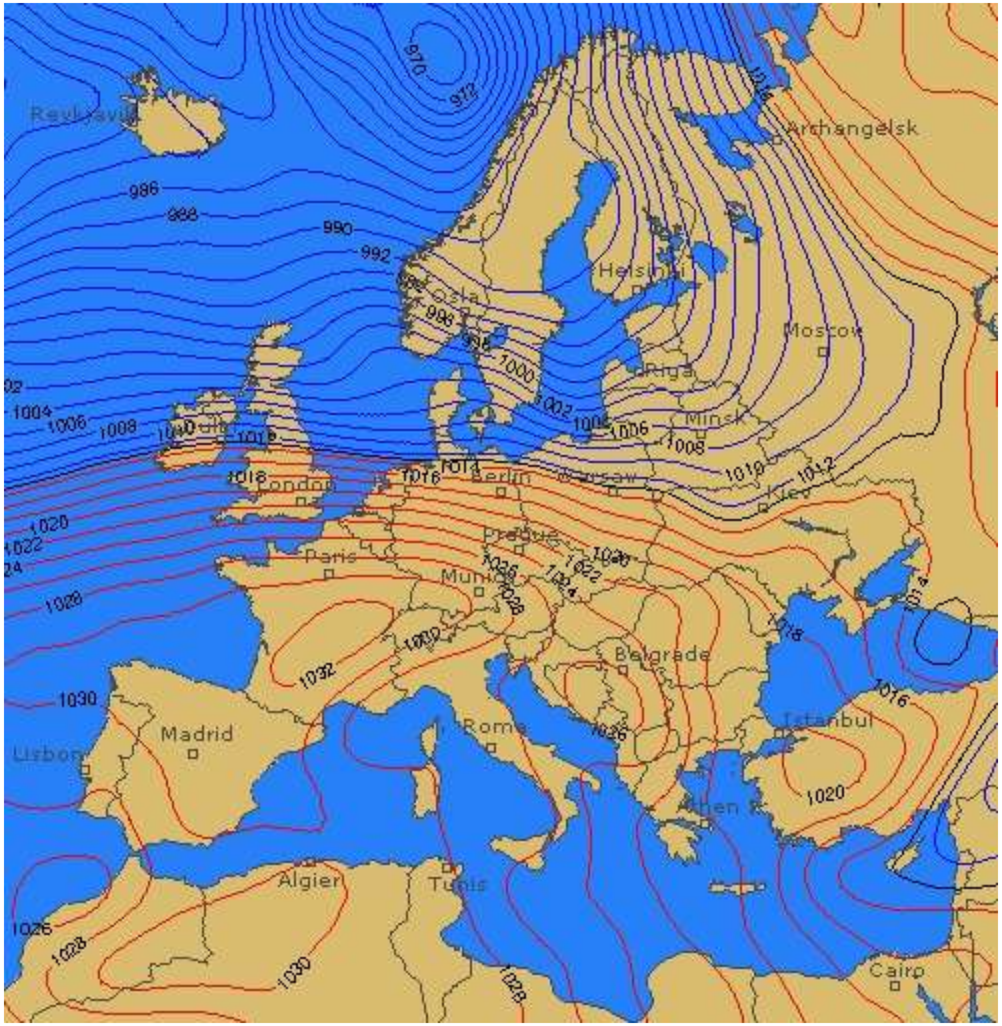
Primer nivo-krivih u topografskim mapama planinskih predela:

Nivo-krive ovde su krive gde je konstantna nadmorska visina, tj.

kada bismo hodali po ovim nivo-krivama ne bismo se ni penjali ni silazili.



Primer nivo-krivih su i izobare na ovoj karti vazdušnog pritiska:



Primer 9: Skicirati nivo-krive za c = 5,4,3,2,1,0 za funkciju iz Primera 7,
$z = f(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

Rešenje:

$$c = 5: \quad 5 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \to \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 0 \to (0,0)$$

$$c = 4: \quad 4 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \to \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 9 \to \text{Kružnica sa } \mathrm{r} = 3$$

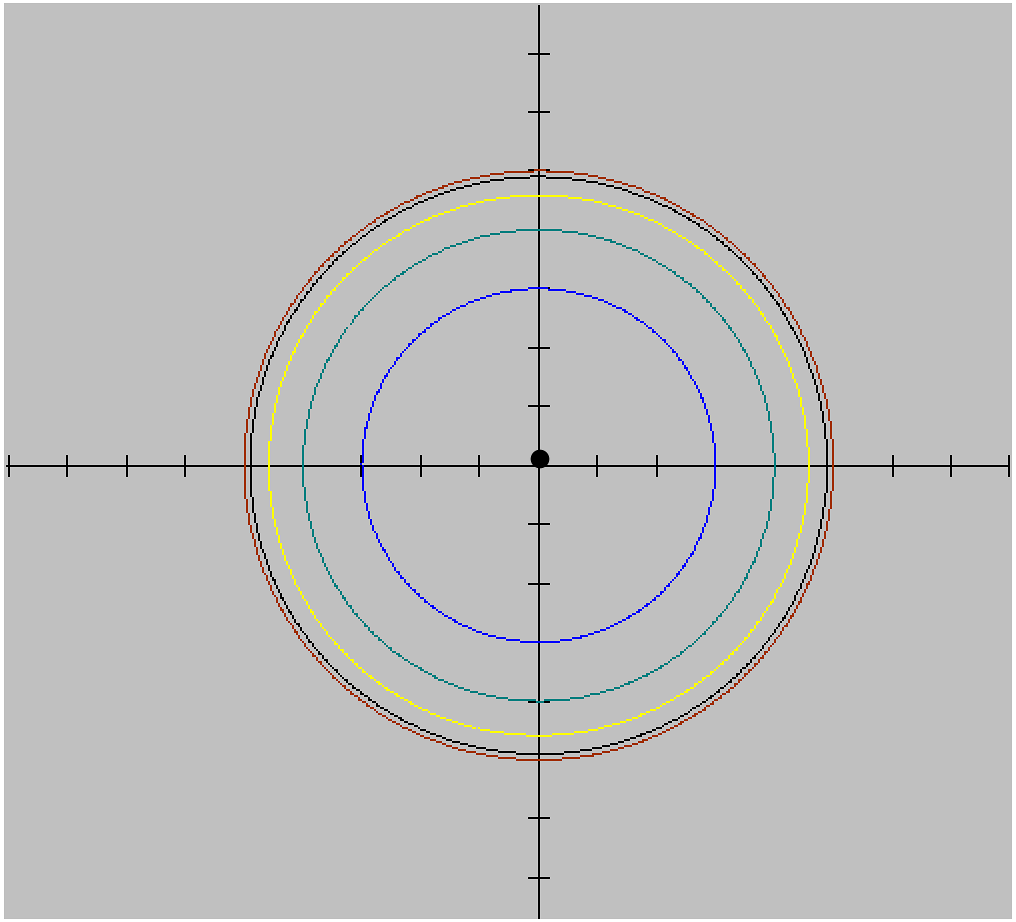
$$c = 3: \quad 3 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \to \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 16 \to \text{Kružnica sa } \mathrm{r} = 4$$

$$c = 2: \quad 2 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \to \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 21 \to \text{Kružnica sa } \mathrm{r} = \sqrt{21}$$

$$c = 1: \quad 1 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \to \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 24 \to \text{Kružnica sa } \mathrm{r} = \sqrt{24}$$

$$c = 0: \quad 0 = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \to \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = 25 \to \text{Kružnica sa } \mathrm{r} = 5$$

Nivo-krive sa tačkom (0, 0) za c = 5 i kružnicama dobijenim za razne vrednosti c.



Uočimo:
Vrednosti od c su jednako raspoređene, ali nivo-krive nisu.

Tamo gde su nivo-krive dalje jedna od druge, vrednosti funkcije se postepeno menjaju.

Tamo gde su nivo-krive bliže jedna drugoj (blizu c = 0), tamo imamo naglu promenu vrednosti funkcije.

Primer 10: Skicirati nivo-krive za c = 0, 2, 4, 6, 8 za funkciju

$$z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$$

Rešenje: Stavimo da je funkcija jednaka konstanti.

$$c = 0: \quad 0 = x^2 + 2y^2 \rightarrow (0,0)$$

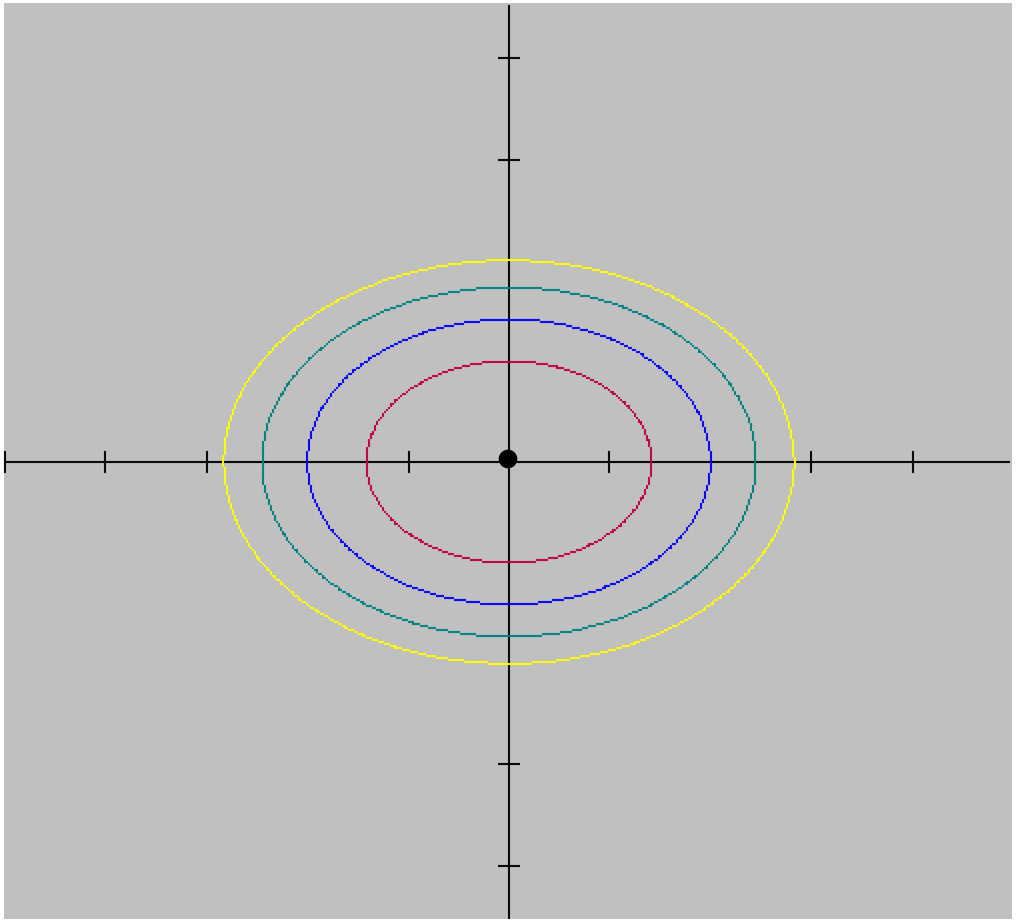
$$c = 2: \quad 2 = x^2 + 2y^2 \rightarrow \text{Elipsa}: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$c = 4: \quad 4 = x^2 + 2y^2 \rightarrow \text{Elipsa}: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

$$c = 6: \quad 6 = x^2 + 2y^2 \rightarrow \text{Elipsa}: \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

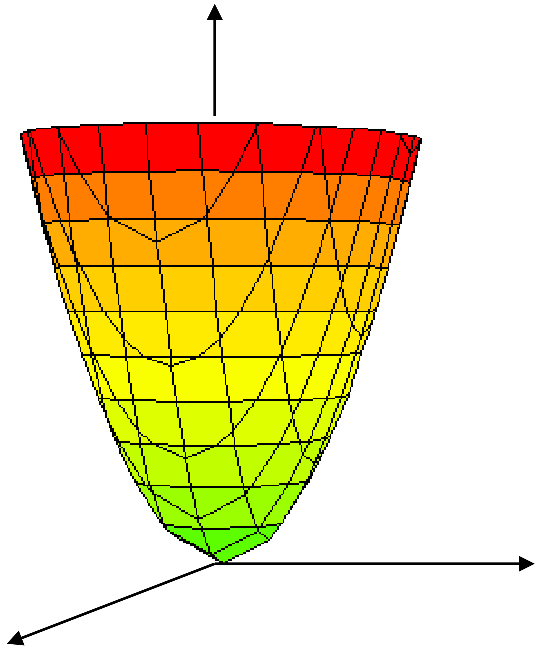
$$c = 8: \quad 8 = x^2 + 2y^2 \rightarrow \text{Elipsa}: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Nivo-krive sa tačkom (0, 0) za c = 0 i elipse koje se povećavaju za ostale vrednosti c.

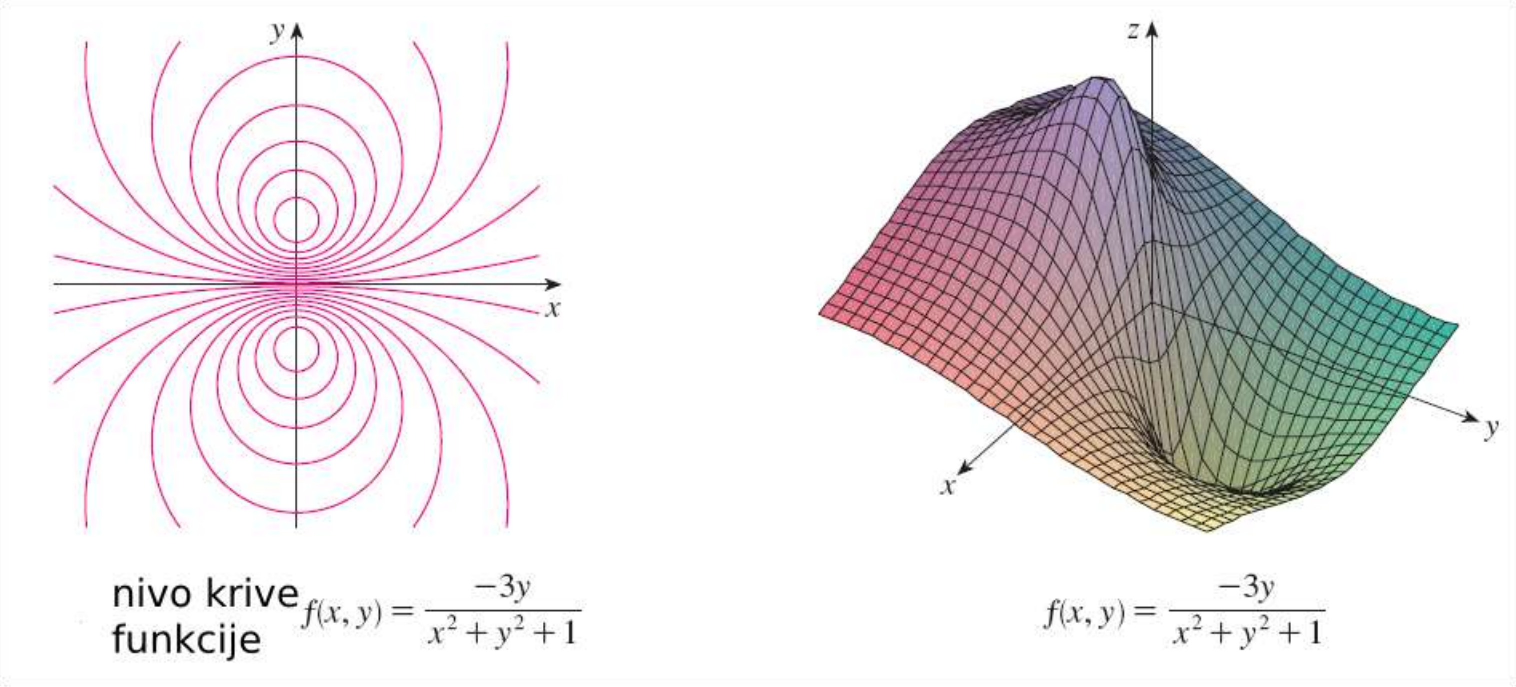


Primer 10:

Ovo je grafik površi $z = f(x, y) = x^2 + 2y^2$ koja se zove eliptični paraboloid.



Primer 11: Nivo-krive funkcije f su zgusnute blizu koordinatnog početka. To odgovara činjenici da se u blizini koordinatnog početka funkcija f veoma naglo menja.



Uočimo da je:

1. Skiciranje grafika funkcije dve promenljive u 3 dimenzije izazovan zadatak i zahteva veštinu i vežbu. Upotreba nivo-krivih može biti od velike koristi.

2. Ideja nivo-krivih se može uopštiti za funkcije tri promenljive. Ako je $w = g(x, y, z)$ funkcija tri promenljive i $k$ konstanta, onda je $g(x, y, z) = k$ nivo-površ funkcije $g$. Iako ćemo možda biti u mogućnosti da nacrtamo nivo površ, i dalje nećemo moći da nacrtamo funkciju $g$ u 4 dimenzije.

Primer 12: Naći nivo-površi za funkciju

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

Rešenje: Nivo-površi su date sa: $x^2 + y^2 + z^2 = c$ gde je $c \geq 0$. One čine familiju koncentričnih sfera poluprečnika $\sqrt{c}$ .

Tako da znamo da dok se $(x, y, z)$ menja po bilo kojoj sferi sa centrom u $O$, vrednosti $f(x, y, z)$ ostaju konstantne.