Parcijalni Izvodi

- Želimo da:
  - Definišemo parcijalne izvode
  - Uvedemo oznake i pravila računanja parcijalnih izvoda
  - Damo geometrijsku interpretaciju parcijalnih izvoda
  - Razmotrimo izvode višeg reda
  - Vidimo primenu kod parcijalnih diferencijalnih jednačina

- Ako je f funkcija dve promenljive x i y, pretpostavimo da se samo x menja dok je y fiksirano, recimo $y = b$, gde je b konstanta.

- Tada zapravo imamo funkciju jedne promenljive x, tj. $g(x) = f(x, b)$.

- Ako g ima izvod u tački a, onda taj izvod nazivamo *parcijalni izvod funkcije f u odnosu na promenljivu x u tački* (a, b) i označavamo sa $f_x(a, b)$.

- Tako

$$f_x(a, b) = g'(a) \quad \text{gde je} \quad g(x) = f(x, b).$$

- Na osnovu definicije izvoda sledi

$$f_x(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

- Slično, *parcijalni izvod od f u odnosu na promenljivu y u tački* (a, b), u oznaci $f_y(a, b)$, se dobija stavljajući da je $x = a$ i traženjem izvoda funkcije $G(y) = f(a, y)$ u tački b :

$$f_y(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}$$

Definicija

- Ako sada pustimo da se tačka (a, b) menja, f_x i f_y postaju funkcije dve promenljive:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

Oznake

- Postoji više oznaka koje se koriste za parcijalne izvode. Ako je $z=f(x,y)$, onda se ravnopravno koriste sledeće oznake:

$$f_x(x, y) = f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = f_1 = D_1 f = D_x f$$

$$f_y(x, y) = f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y} = f_2 = D_2 f = D_y f$$

Primer

- Za funkciju $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, naći $f_x(2, 1)$ i $f_y(2, 1)$.
- <u>Rešenje:</u> Smatrajući y konstanim,diferenciranjem u odnosu na x, dobijamo

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$$

i tako

$$f_x(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$$

Rešenje, nastavak

- Smatrajući x konstantnim i diferencirajući u odnosu na y, dobijamo

$$f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

i

$$f_y(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$$

Geometrijska interpretacija

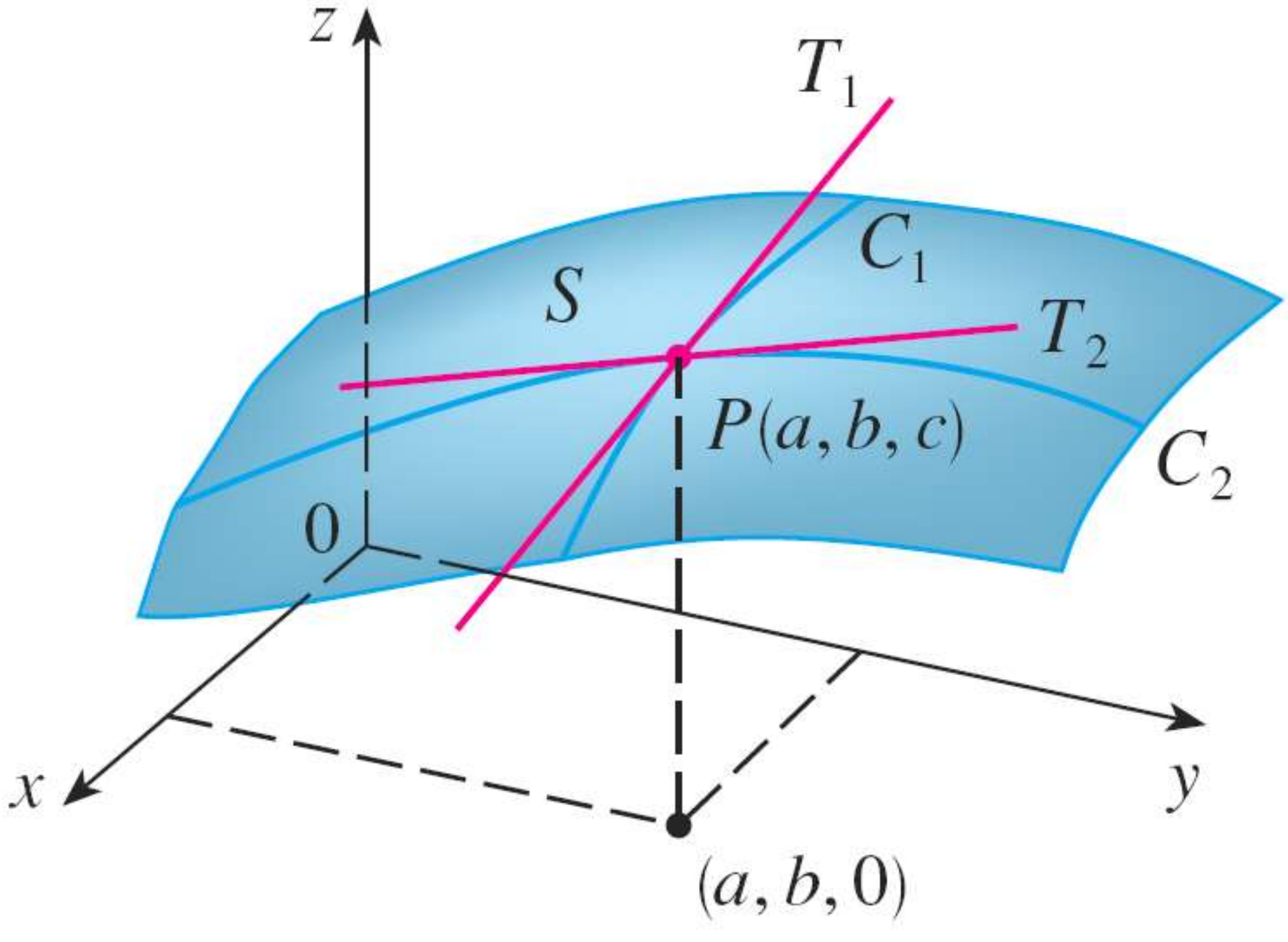
- Da bi nam bila jasna geometrijska interpretacija parcijalnih izvoda, podsetimo se da jednačina
  $z = f(x, y)$ predstavlja neku površ S.

- Ako je $f(a, b) = c$, onda tačka $P(a, b, c)$ leži na S. Kada fiksiramo $y = b$, dobijamo krivu C_1 koja je presek vertikalne ravni $y = b$ i površi S.

Geometrijska interpretacija

- Tako isto vertikalna ravan $x = a$ seče površ S po krivoj C_2.
- Obe krive C_1 i C_2 prolaze kroz tačku P.
- Ovo je ilustrovano na sledećem slajdu:

Geometrijska interpretacija



Geometrijska interpretacija-nastavak

- Primetimo:
  - C_1 je grafik funkcije $g(x) = f(x, b)$, tako da je nagib (koeficijent pravca) njene tangente T_1 u tački P: $g'(a) = f_x(a, b)$;
  - C_2 je grafik funkcije $G(y) = f(a, y)$, tako da je nagib njene tangente T_2 u tački P: $G'(b) = f_y(a, b)$.

- Tako da su f_x i f_y <u>nagibi tangenti</u> na krive C_1 i C_2 u tački $P(a, b, c)$, respektivno.

INTERPRETACIJA-NASTAVAK

- Parcijalni izvod se takođe može interpretirati i kao brzina promene.

- Ako je $z = f(x, y)$, tada…
  - $\partial z/\partial x$ predstavlja brzinu promene funkcije z u odnosu na x kada je y fiksirano.
  - Slično, $\partial z/\partial y$ predstavlja brzinu promene funkcije z u odnosu na y kada je x fiksirano.

Primer

- Ako je $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, naći $f_x(1, 1)$ i $f_y(1, 1)$.
- Interpretirati ove brojeve kao nagibe.
- Rešenje: Imamo

$$f_x(x, y) = -2x \qquad f_y(x, y) = -4y$$

$$f_x(1, 1) = -2 \qquad f_y(1, 1) = -4$$

Rešenje -nastavak

- Grafik funkcije f je paraboloid $z = 4 - x^2 - 2y^2$ i vertikalna ravan $y = 1$ ga preseca po paraboli
  $z = 2 - x^2$, $y = 1$.

- Nagib tangente na tu parabolu u tački (1, 1, 1) je $f_x(1, 1) = -2$.

- Slično, ravan $x = 1$ seče grafik funkcije f po paraboli $z = 3 - 2y^2$, $x = 1$.

REŠENJE -NASTAVAK

- Nagib tangente na ovu parabolu u tački(1, 1, 1) je $f_y(1, 1) = -4$:

FIGURE 2

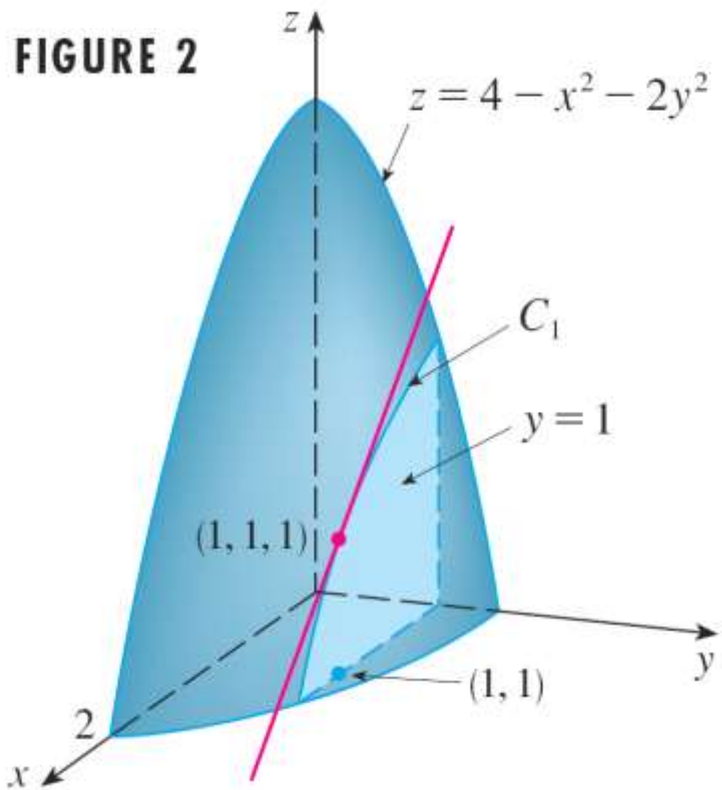
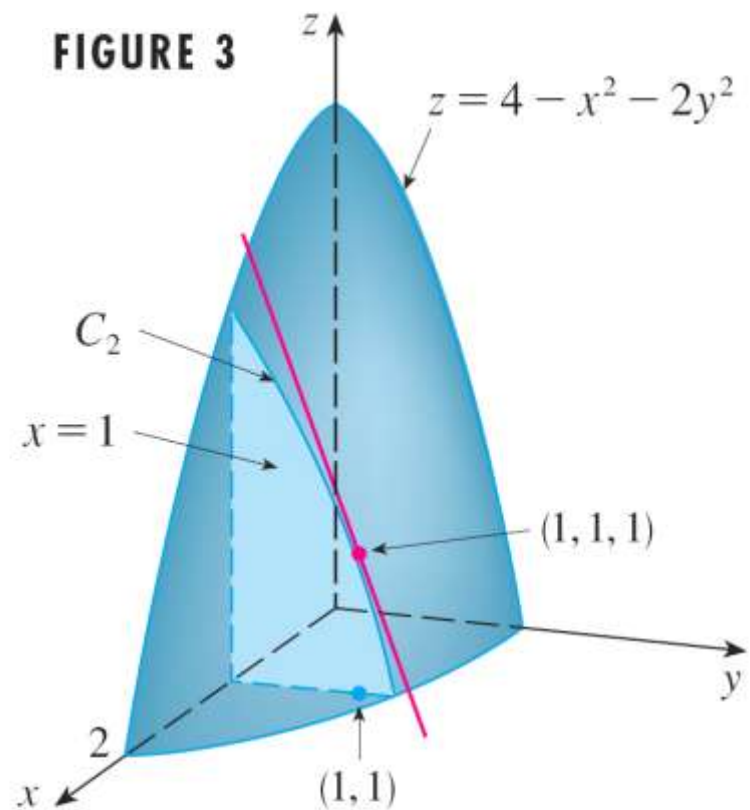


FIGURE 3



PRIMER

- Ako je $f(x,y)=\sin\left(\dfrac{x}{1+y}\right)$, odrediti $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
- Rešenje: Koristeći pravilo za izvod složene funkcije jedne promenljive, dobijamo

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{1+y}\right)=\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{1}{1+y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{1+y}\right)=-\cos\left(\frac{x}{1+y}\right)\cdot\frac{x}{(1+y)^2}$$

Primer

- Naći $\partial z/\partial x$ i $\partial z/\partial y$ ako je z definisana **implicitno** kao funkcija od x i y sa

$$x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$$

- <u>Rešenje:</u> Da bismo pronašli $\partial z/\partial x$, diferenciramo implicitno u odnosu na x, pazeći da smatramo y konstantom:

$$3x^2 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

PRIMER

- Rešavajući jednačinu po $\partial z/\partial x$, dobijamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x^2 + 2yz}{z^2 + 2xy}$$

- Slično, implicitno diferenciranje u odnosu na y daje

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y^2 + 2xz}{z^2 + 2xy}$$

Više od dve promenljive

- Parcijalni izvodi se mogu definisati i za funkcije tri ili više promenljivih, na primer

$$f_x(x, y, z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

VIŠE OD DVE PROMENLJIVE - NASTAVAK

- Ali parcijalni izvod f_x se ne možemo interpretirati geometrijski jer grafik funkcije f leži u 4-dimenzionalnom prostoru.
- Generalno, ako je $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, onda

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} = f_{x_i} = f_i = D_i f$$

PRIMER

- Naći f_x, f_y i f_z ako je $f(x, y, z) = e^{xy} \ln z$.
- <u>Rešenje:</u> Smatrajući y i z konstantama i diferenciranjem u odnosu na x, dobijamo

$$f_x = ye^{xy} \ln z$$

- Slično,

$$f_y = xe^{xy} \ln z \quad \text{i} \quad f_z = e^{xy}/z$$

Izvodi višeg reda

- Ako je f funkcija dve promenljive, onda su njeni parcijalni izvodi f_x i f_y takođe funkcije dve promenljive, tako da možemo posmatrati njihove parcijalne izvode

$$(f_x)_x\,,\ (f_x)_y\,,\ (f_y)_x\ \text{ i }\ (f_y)_y\,,$$

koji se zovu *parcijalni izvodi drugog reda* ili *drugi parcijalni izvodi* funkcije f.

IZVODI VIŠEG REDA-NASTAVAK

- Ako je $z = f(x, y)$, koristimo sledeće oznake:

$$(f_x)_x = f_{xx} = f_{11} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$(f_x)_y = f_{xy} = f_{12} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$

$$(f_y)_x = f_{yx} = f_{21} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$

$$(f_y)_y = f_{yy} = f_{22} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Primer

- Naći druge parcijalne izvode za funkciju

$$f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$$

- <u>Rešenje:</u> Ranije smo pronašli

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3 \qquad f_y(x, y) = 3x^2y^2 - 4y$$

- Tako da imamo

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 2xy^3) = 6x + 2y^3 \qquad f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 2xy^3) = 6xy^2$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2 - 4y) = 6xy^2 \qquad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2 - 4y) = 6x^2y - 4$$

MEŠOVITI PARCIJALNI IZVODI

- Uočimo da u prethodnom primeru važi
  $f_{xy} = f_{yx}$, što nije puka slučajnost.
- Pokazalo se da za većinu funkcija sa kojima se susrećemo u praksi važi $f_{xy} = f_{yx}$:

Klero-ova teorema

Pretpostavimo da je funkcija f definisana na oblasti D koja sadrži tačku (a, b). Ako su funkcije f_x, f_y, f_{xy} i f_{yx} neprekidne u (a, b), onda važi

$$f_{xy}(a, b) = f_{yx}(a, b).$$

Mešoviti parcijalni izvodi-nastavak

- Parcijalni izvodi trećeg i višeg reda se takođe mogu definisati. Na primer

$$f_{xyy} = (f_{xy})_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}$$

  i koristeći Klero-ovu teoremu može se pokazati da važi $f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$ ako su ove fukcije neprekidne.

Primer

- Izračunati f_{xxyz} ako je $f(x, y, z) = \sin(3x + yz)$.
- Rešenje

$$f_x = 3\cos(3x + yz)$$

$$f_{xx} = -9\sin(3x + yz)$$

$$f_{xxy} = -9z\cos(3x + yz)$$

$$f_{xxyz} = -9\cos(3x + yz) + 9yz\sin(3x + yz)$$

Parcijalne diferencijalne jednačine

- Parcijalni izvodi se pojavljuju u *parcijalnim diferencijalnim jednačinama* kojima se opisuju određeni fizički zakoni.
- Na primer, parcijalna diferencijalna jednačina

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

se zove *Laplasova jednačina.*

Parcijalne diferencijalne jednačine - nastavak

- Rešenja Laplasove diferencijalne jednačine se zovu *harmonijske funkcije* koje imaju svoju ulogu u problemima provođenja toplote, protoku fluida, električnog potencijala, astronomiji...

- Na primer, možemo pokazati da je funkcija $u(x, y) = e^x \sin y$ rešenje Laplasove jednačine:

Parcijalne diferencijalne jednačine - nastavak

$$u_x = e^x \sin y \qquad u_y = e^x \cos y$$

$$u_{xx} = e^x \sin y \qquad u_{yy} = -e^x \sin y$$

$$u_{xx} + u_{yy} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

- Dakle, u zadovoljava Laplasovu jednačinu.

Parcijalne diferencijalne jednačine - nastavak

- *Talasna jednačina*

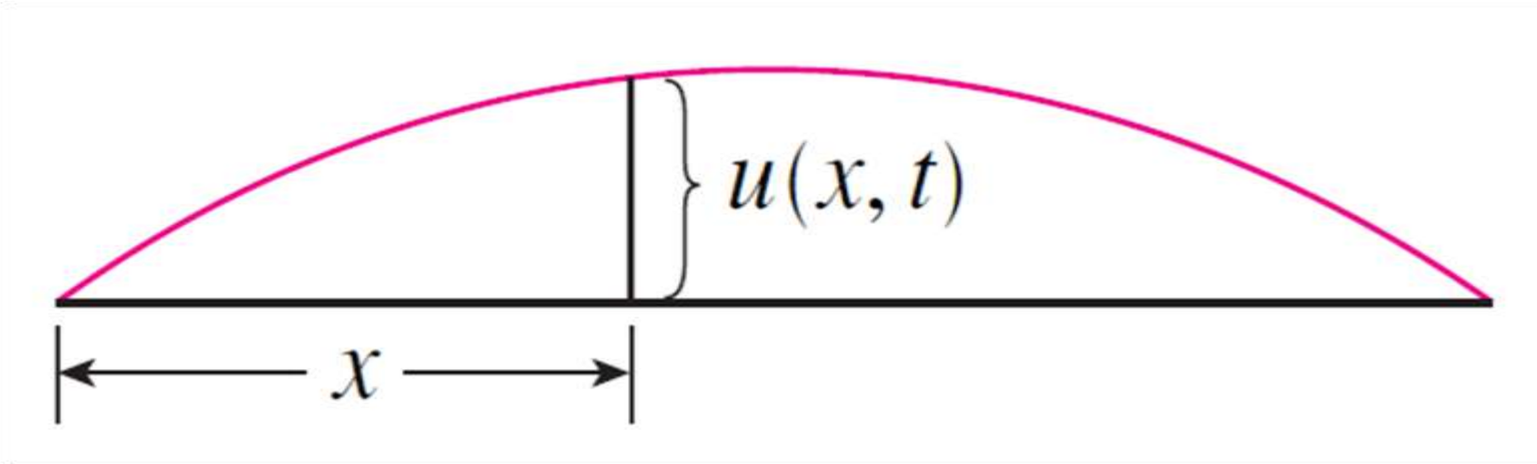
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

opisuje kretanje talasnog oblika, koje može biti okeanski talas, zvučni talas, svetlosni talas ili talas koji putuje duž žice (strune).

Parcijalne diferencijalne jednačine - nastavak

- Na primer, ako $u(x, t)$ predstavlja pomeranje violinske žice za vreme t, gde je x udaljenosti od jednog kraja žice, tada $u(x, t)$ zadovoljava talasnu jednačinu.
- Ovde konstanta a zavisi od debljine žice i njene zategnutosti.

Parcijalne diferencijalne jednačine - nastavak



Primer

- Proveriti da li funkcija $u(x, t) = \sin(x - at)$ zadovoljava talasnu jednačinu.
- Rešenje: Izračunavanjem dobijamo

$$u_x = \cos(x - at) \qquad u_{xx} = -\sin(x - at)$$

$$u_t = -a\cos(x - at) \qquad u_{tt} = -a^2 \sin(x - at) = a^2 u_{xx}$$