2. Granična vrednost funkcije

2.1. Definicija i osobine graničnih vrednosti

Definicija 2.1. Neka je $D \subseteq \mathbb{R}$ i $f : D \to \mathbb{R}$ realna funkcija jedne promenljive, i neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa D. Za funkciju $y = f(x)$ se kaže da ima **graničnu vrednost** $L \in \mathbb{R}$ **u tački** x_0 akko za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ (koje zavisi od ε) takvo da za svako $x \in D\backslash\{x_0\}$ važi da iz $|x - x_0| < \delta$ sledi $|f(x) - L| < \varepsilon$, tj. akko važi

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D\backslash\{x_0\}) \Big(|x - x_0| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\Big).$$

Tada pišemo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$.

Jednostrane granične vrednosti

Definicija 2.2. Neka je x_0 tačka nagomilavanja skupa $D \subseteq \mathbb{R}$ i $f : D \to \mathbb{R}$.

- Broj $L \in \mathbb{R}$ je **desna granična vrednost** funkcije f u tački x_0, u oznaci $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = L$, ako
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D) \big(x_0 < x < x_0 + \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\big).$$
- Broj $L \in \mathbb{R}$ je **leva granična vrednost** funkcije f u tački x_0, u oznaci $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = L$, ako
$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x \in D) \big(x_0 - \delta < x < x_0 \ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon\big).$$

Teorema 2.3. *Funkcija f ima graničnu vrednost u tački x_0 akko ima i levu i desnu graničnu vrednost u toj tački i te dve granične vrednosti su jednake, tj.*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L.$$

Osnovne osobine

Ako je x_0 tačka nagomilavanja za zajedničku oblast definisanosti funkcija $f(x)$ i $g(x)$ (tj. za presek njihovih domena), i ako je $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq \pm\infty$ i $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq \pm\infty$, tada je:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \Big(f(x) \pm g(x)\Big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \pm B,$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} \Big(f(x) \cdot g(x)\Big) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B,$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \big(c \cdot f(x)\big) = c \cdot \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = c \cdot A,$ za svako $c \in \mathbb{R}$,
4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B},$ gde $g(x) \neq 0$, za $x \in O(x_0)$ i $B \neq 0$.

Neke korisne (tablične) granične vrednosti

1. $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e,$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty} \big(1 + \frac{1}{x}\big)^x = e,$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1,$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_a(x + 1)}{x} = \log_a e,$ specijalno $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x + 1)}{x} = 1,$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a,$ specijalno $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1,$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(x + 1)^a - 1}{x} = a.$

Zadatak 2.4. Naći sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin(ax)}$, $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$; c) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}$, $a\in\mathbb{R}$.

Rešenje.

Napomena: Koristimo činjenicu da ako $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, onda važi $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\big(f(x)\big)}{f(x)}=1$.

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}=3\cdot 1=3.$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin(ax)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sin(ax)}{bx}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{bx}}=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{ax}\cdot\dfrac{a}{b}}=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{ax}}=\dfrac{b}{a}.$

c) Na osnovu izraza za razliku sinusa, sledi da je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a}\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a}&=\lim_{x\to a}\frac{2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}\\&=\lim_{x\to a}\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\lim_{x\to a}\frac{\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}=\cos\left(\frac{a+a}{2}\right)\cdot 1=\cos(a).\end{aligned}$$

Zadatak 2.5. Proveriti da li postoji sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{|x-1|}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\sin(x)|}{x}$.

Rešenje.

a) Desna granična vrednost je

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x}{x-2}=\text{“}\frac{2^+}{2^+-2}\text{”}=\text{“}\frac{2^+}{0^+}\text{”}=+\infty,$$

dok je leva granična vrednost

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x}{x-2}=\text{“}\frac{2^-}{2^--2}\text{”}=\text{“}\frac{2^-}{0^-}\text{”}=-\infty.$$

Budući da levi i desni limes nisu jednaki, funkcija nema graničnu vrednost u $x=2$.

b) Desna granična vrednost je

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\text{“}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^+}}}\text{”}=\text{“}\frac{1}{1+e^{+\infty}}\text{”}=\text{“}\frac{1}{+\infty}\text{”}=0,$$

dok je leva granična vrednost

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=\text{“}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{0^-}}}\text{”}=\text{“}\frac{1}{1+e^{-\infty}}\text{”}=\frac{1}{1+0}=1.$$

S obzirom da levi i desni limes nisu jednaki, funkcija nema graničnu vrednost u tački $x=0$.

c) Podsetimo se da je, po definiciji,

$$|x-1|=\begin{cases}x-1, & x-1\geq 0\\ 1-x, & x-1<0\end{cases}=\begin{cases}x-1, & x\geq 1\\ 1-x, & x<1\end{cases},$$

što implicira da levi i desni limesi nisu jednaki

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1-x}=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

Dakle, funkcija nema graničnu vrednost u $x=1$.

d) Po definiciji apsolutne vrednosti važi

$$|\sin(x)| = \begin{cases} \sin(x), & \sin(x) \geq 0 \\ -\sin(x), & \sin(x) < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sin(x), & \text{za dovoljno malo } x \geq 0 \\ -\sin(x), & \text{za dovoljno malo } x < 0 \end{cases},$$

što implicira da levi i desni limesi nisu jednaki

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} = -1$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin(x)|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Prema tome, funkcija nema graničnu vrednost u $x = 0$.

Zadatak 2.6. Naći granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$; c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15}}{x^2 - 5x + 6}$.

Rešenje.

a) Uvrštavanjem broja 1 umesto x dobija se izraz oblika "$\frac{0}{0}$", što znači da je broj 1 koren oba polinoma u razlomku, te je

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3}.$$

Uvrštavanjem broja 1 umesto x u poslednjem izrazu ponovo dobijamo izraz oblika "$\frac{0}{0}$", te se sličnim postupkom dobija

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 + x^2 + x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Primetimo da funkcija $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ nije definisana u tački $x = 1$, ali ima graničnu vrednost u toj tački.

b) Uvodimo smenu $t = \sqrt[12]{x}$, odakle je $x = t^{12}$, odnosno $\sqrt[3]{x} = t^4$ i $\sqrt[4]{x} = t^3$. Primetimo da važi $\lim\limits_{x\to 1} \sqrt[12]{x} = \sqrt[12]{1} = 1$. Dakle,

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{t^4 - 1}{t^3 - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{(t-1)(t+1)(t^2+1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \lim_{t\to 1} \frac{(t+1)(t^2+1)}{t^2+t+1} = \frac{4}{3}.$$

Naglasimo da funkcija $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}$ nije ista kao funkcija $g(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$, one samo imaju iste granične vrednosti u jedinici.

c) Kad x teži 2, i kvadratni koren i kubni koren u brojiocu teže ka 3. Zato, nakon dodavanja i oduzimanja broja 3, vidimo da je

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15} + 3 - 3}{x^2 - 5x + 6} = \underbrace{\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 5x + 6}}_{a} - \underbrace{\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 15} - 3}{x^2 - 5x + 6}}_{b}.$$

Izračunavanjem limesa dobijamo:

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 5x + 6} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5} + 3}{\sqrt{x^2+5} + 3} = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{(x^2 - 5x + 6)(\sqrt{x^2+5} + 3)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+5} + 3} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x-3} \cdot \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x^2+5} + 3} = -4 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{2}{3}, \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{x^3+x^2+15}-3}{x^2-5x+6} \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x^3+x^2+15)-27}{(x^2-5x+6)\left(\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9\right)} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-12}{x^2-5x+6} \cdot \lim_{x\to 2} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+15}\right)^2 + 3\sqrt[3]{x^3+x^2+15}+9} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+3x+6)}{(x-2)(x-3)} \cdot \frac{1}{(9+3\cdot 3+9)} = \frac{1}{27}\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x+6}{x-3} = -\frac{16}{27},
\end{aligned}$$

pa je konačno

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-\sqrt[3]{x^3+x^2+15}}{x^2-5x+6} = \left(-\frac{2}{3}\right) - \left(-\frac{16}{27}\right) = -\frac{2}{27}.$$

Zadatak 2.7. Naći graničnu vrednost $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x}$, za $a>0$.

Rešenje. Ovaj limes se često navodi i kao tablični, ali se može rešiti i svođenjem na tablični limes sa početka poglavlja, i to uvođenjem smene $t = a^x - 1$, na osnovu koje je $x = \log_a(t+1)$. Primetimo da kad x teži 0, t teži vrednosti $a^0 - 1$, tj. broju 0. Zato je

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\log_a(t+1)} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\frac{\ln(t+1)}{\ln(a)}} = \frac{\ln(a)}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\ln(t+1)}{t}} = \ln(a),$$

gde je korišćen tablični limes $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Zadatak 2.8. Naći granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}}$; b) $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln(x)-1}{x-e}$; c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin(x)\right)^{\operatorname{tg}^2(x)}$.

Rešenje.

a) Primetimo da se direktnim uvrštavanjem $x=2$ u gornji izraz dobija neodređeni izraz oblika "1^∞", te je

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-3}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} &= \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-3}{x+3}-1\right)^{\frac{x}{x^2-4}} = \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{(2x^2-3)-(x+3)}{x+3}\right)^{\frac{x}{x^2-4}} \\
&= \lim_{x\to 2}\left(1+\frac{2x^2-x-6}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{2x^2-x-6}\cdot\frac{2x^2-x-6}{x+3}\cdot\frac{x}{x^2-4}} \\
&= \exp\left(\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x+3}\cdot\frac{x}{x^2-4}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+3}\cdot\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x^2-4}\right) \\
&= \exp\left(\frac{2}{5}\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+3)}{(x-2)(x+2)}\right) = \exp\left(\frac{2}{5}\lim_{x\to 2}\frac{2x+3}{x+2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{4}\right) = e^{\frac{7}{10}} = \sqrt[10]{e^7}.
\end{aligned}$$

b) Gornji izraz može se transfprmisati na sledeći način

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-1}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln(x)-\ln(e)}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{\ln\left(\frac{x}{e}\right)}{x-e} = \lim_{x\to e}\frac{1}{x-e}\ln\left(\frac{x}{e}\right) = \lim_{x\to e}\ln\left(\left(\frac{x}{e}\right)^{\frac{1}{x-e}}\right).$$

Pošto je $\ln(x)$ neprekidna funkcija, sledi da je limes logaritma jednak logaritmu limesa, pa dobijamo

$$\lim_{x\to e}\ln\left(\left(\frac{x}{e}\right)^{\dfrac{1}{x-e}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to e}\left(\frac{x}{e}\right)^{\dfrac{1}{x-e}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x}{e}-1\right)^{\dfrac{1}{x-e}}\right)$$

$$=\ln\left(\lim_{x\to e}\left(1+\frac{x-e}{e}\right)^{\dfrac{e}{x-e}\cdot\dfrac{1}{e}}\right)=\ln\left(\exp\left(\frac{1}{e}\right)\right)=\frac{1}{e}.$$

c) Oduzimanjem i dodavanjem jedinice na $\sin(x)$ dobija se

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin(x)-1)^{\mathrm{tg}^2(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin(x)-1)^{\frac{1}{\sin(x)-1}\cdot(\sin(x)-1)\cdot\mathrm{tg}^2(x)}$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin(x)-1)\mathrm{tg}^2(x)\right)=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin(x)-1)\sin^2(x)}{\cos^2(x)}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{\cos^2(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\right)=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{1-\sin^2(x)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin^2(x)\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{1-\sin^2(x)}\cdot 1\right)=\exp\left(-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin(x)}{1-\sin^2(x)}\right)$$

$$=\exp\left(-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\sin(x)}\right)=\exp\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Zadatak 2.9. Naći granične vrednosti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}$.

Rešenje.

a) Zapišimo gornji limes kao

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

Na osnovu osobine da je granična vrednost proizvoda jednaka proizvodu graničnih vrednosti dobijamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot\lim_{x\to 1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}.$$

Budući da je $\cos(\alpha)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$, sledi da je i $\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)$, što se može zapisati i kao $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$. Konačno

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{1-x}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}\cdot\dfrac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)}{\frac{\pi}{2}(1-x)}}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{\sin(t)}{t}}=\frac{2}{\pi},$$

nakon smene oblika $t=\sin\left(\frac{\pi}{2}(1-x)\right)$, i koristeći osobinu o graničnoj vrednosti količnika.

b) Sređivanjem gornjeg izraza može se videti da je:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}\cdot\frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}{\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+\mathrm{tg}(x))-(1+\sin(x))}{x^3\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)-\sin(x)}{x^3\left(\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}(x)}+\sqrt{1+\sin(x)}}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}(x)-\sin(x)}{x^3},$$

gde je korišćena osobina o limesu proizvoda. Gornji limes se može zapisati kao

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x)-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}-\sin(x)}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^3\cos(x)},$$

odakle je jasno da se on može predstaviti i kao proizvod tri limesa

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))\sin(x)}{x^3\cos(x)}=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)}\right),$$

zato što su sve granične vrednosti konačne. Za prvu i treću graničnu vrednost je to očigledno, a za drugu treba primetiti da je

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{2}{4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2},$$

koristeći osobinu limesa proizvoda i neprekidnost kvadratne funkcije. Zato je konačno

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}(x)}-\sqrt{1+\sin(x)}}{x^3}=\frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\right)=\frac{1}{4}.$$

2.2. Neprekidnost funkcije

Definicija 2.10. Neka je D oblast definisanosti neke realne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, i neka je $x_0 \in D$. Za funkciju $f(x)$ kažemo da je **neprekidna u tački** x_0 akko važi:

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in D)\Big(|x-x_0|<\delta\ \Rightarrow\ |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\Big).$$

- Neprekidnost se ispituje samo u tačkama u kojima je funkcija definisana.
- Ako je funkcija neprekidna u $x_0 \in D$ i x_0 tačka nagomilavanja za D, tada postoji $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ i važi
$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$
- Ako je $x_0 \in D$ izolovana tačka, tada je funkcija $f(x)$ po definiciji neprekidna u toj tački.
- Ako su realne funkcije f i g neprekidne u tački x_0, tada su u tački x_0 neprekidne i funkcije $f+g$, $f\cdot g$ i $\dfrac{f}{g}$, gde $g \neq 0$ u nekoj okolini x_0.
- Kompozicija neprekidnih funkcija je neprekidna funkcija.

Definicija 2.11.

1. Funkcija je **neprekidna sa leve strane** ako je $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$.
2. Funkcija je **neprekidna sa desne strane** ako je $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$.

Teorema 2.12. *Funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x_0 akko je neprekidna sa leve i sa desne strane, tj. ako važi*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0).$$

Definicija 2.13. Ako funkcija nije neprekidna u tački x_0, onda kažemo da je **ima prekid u tački** x_0.

Vrste prekida

1. Funkcija ima **prividan prekid** u tački x_0 koja je tačka nagomilavanja skupa D ako:
   - tačka x_0 nije u D, a postoji granična vrednost funkcije u toj tački, ili
   - tačka x_0 jeste u D, postoji granična vrednost funkcije u toj tački, i granična vrednost se ne poklapa sa vrednosti funkcije u tački, odnosno

   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq f(x_0).$$

2. Funkcija ima **skok** u tački x_0 koja je tačka nagomilavanja skupa D ako postoje leva i desna granična vrednosti, koje nisu jednake, tj.

   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

   Prividan prekid ili skok se još zovu **prekidi prve vrste**.

3. Funkcija ima **prekid druge vrste** u tački x_0 ako bar jedna od graničnih vrednosti $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ i $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ ne postoji ili nisu konačne vrednosti.

Zadatak 2.14. Neka je funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} (e+x)^{\sin(x)}, & x \geq 0 \\ \sin(x) + A, & x < 0 \end{cases}.$$

Odrediti realnu vrednost A tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna.

Rešenje. A se određuje iz uslova da je $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$. Kako je

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} (\sin(x) + A) = A, \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (e+x)^{\sin(x)} = e^0 = 1, \\ f(0) &= (e+0)^0 = 1, \end{aligned}$$

vidimo da su sve tri vrednosti jednake ako važi da je $A = 1$.

Napomenimo da je funkcija neprekidna u svim tačkama različitim od nule, nezavisno od A, zato što je u tim tačkama predstavljena kao kompozicija neprekidnih funkcija. Zato je $f(x)$ za $A = 1$ ne samo neprekidna u 0, već i neprekidna nad celim $\mathbb{R}$.

Zadatak 2.15. Neka je funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)e^{1/x}, & x < 0 \\ A, & x = 0 \\ -\dfrac{1}{1+\ln(x)}, & x > 0,\ x \neq \dfrac{1}{e} \end{cases}.$$

Odrediti realnu vrednost A tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u $x = 0$.

Rešenje. Primetimo da su levi i desni limesi u $x = 0$ jednaki

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x+2)e^{1/x} = 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{1+\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} f(x),$$

a da je $f(0) = A$. Iz uslova jednakosti $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ sledi da je nužno $A = 0$. Za ovu vrednost je funkcija neprekidna u $x = 0$.

Zadatak 2.16. Data je funkcija

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\left(1+\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}.$$

Da li je moguće odrediti realnu vrednost A tako da je $f(x)$ neprekidna?

Rešenje. Funkcija je neprekidna u svim tačkama $x\neq 0$, budući da je kompozicija funkcija neprekidnih na $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Posmatrajmo zato neprekidnost u $x=0$.

Kako su levi i desni limes u $x=0$ dati sa

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=(\text{“}\operatorname{arctg}(-\infty)\text{”})=-\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\operatorname{arctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)=(\text{“}\operatorname{arctg}(\infty)\text{”})=\frac{\pi}{2},$$

sledi da ni za jednu vrednost ova funkcija neće biti neprekidna u $x=0$. Funkcija $f(x)$ ima skok u tački $x=0$.

Zadatak 2.17. Neka je funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x)=\begin{cases}\left(\sin^2(2x)+1\right)^{\frac{\cos^3(x)}{x^2}}, & x<0\\ A, & x=0\\ e^{-1/x}+B^2, & x>0\end{cases}\cdot$$

Odrediti konstante A i B tako da funkcija $f(x)$ bude neprekidna u $x=0$.

Rešenje. Sa jedne strane, važi da je

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-} f(x)&=\lim_{x\to 0^-}\left(\sin^2(2x)+1\right)^{\frac{\cos^3(x)}{x^2}}=\lim_{x\to 0^-}\left(1+\sin^2(2x)\right)^{\frac{1}{\sin^2(2x)}\cdot\sin^2(2x)\cdot\frac{\cos^3(x)}{x^2}}\\&=\exp\left(\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2(2x)\cos^3(x)}{x^2}\right)=\exp\left(\lim_{x\to 0^-}\cos^3(x)\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2(2x)}{x^2}\right)\\&=\exp\left(\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin^2(2x)}{\frac{1}{4}4x^2}\right)=\exp\left(4\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin(2x)}{2x}\right)^2\right)=e^4,\end{aligned}$$

dok je desna granična vrednost jednaka

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{-1/x}+B^2=0+B^2=B^2.$$

To znači da je

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\quad\Leftrightarrow\quad e^4=B^2=A,$$

odnosno, da je funkcija neprekidna u $x=0$ ako je $A=e^4$ i $B=\pm e^2$.

Zadatak 2.18. U tački $x=3$, ispitati neprekidnost funkcije

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\leq 3\\ (x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}, & x>3\end{cases}.$$

Rešenje. Lako je videti da je

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=f(3)=6+1=7,$$

ali desna granična vrednost ne postoji

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}(x-2)^{\frac{1}{(x-3)^2}}=\lim_{x\to 3^+}\left(1+(x-3)\right)^{\frac{1}{x-3}\cdot\frac{1}{x-3}}=\exp\left(\lim_{x\to 3^+}\frac{1}{x-3}\right)=+\infty.$$

Funkcija $f(x)$, dakle, u tački $x=3$ ima prekid druge vrste.

Zadatak 2.19. Odrediti parametre $A, B \in \mathbb{R}$ tako da funkcija $f(x)$ data sa

$$f(x) = \begin{cases} (\sin(x))^{\mathrm{tg}^2(x)}, & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ A, & x = \frac{\pi}{2} \\ Ae + \frac{B}{x}, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

bude neprekidna u svim tačkama oblasti $(0, \pi)$.

Rešenje. Kako je

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\sin(x))^{\mathrm{tg}^2(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\sqrt{1-\cos^2(x)}\right)^{\mathrm{tg}^2(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1-\cos^2(x))^{\frac{\mathrm{tg}^2(x)}{2}}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (1-\cos^2(x))^{\frac{-1}{\cos^2(x)}(-\cos^2(x))\frac{1}{2}\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}} = \exp\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-\sin^2(x)}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{e}},$$

a pošto mora da važi $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)$, imamo da je $A = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Dalje, iz

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(Ae + \frac{B}{x}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \left(\frac{1}{\sqrt{e}}e + \frac{B}{x}\right) = \sqrt{e} + \frac{2B}{\pi},$$

i pošto mora da važi $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x)$, vrednost B dobijamo izjednačavanjem

$$\sqrt{e} + \frac{2B}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2B}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \sqrt{e} \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{\pi}{2}\frac{(1-e)\sqrt{e}}{e}.$$

Za ovako odabrane vrednosti A i B funkcija je neprekidna.

Zadatak 2.20. Izračunati vrednost realnog parametra A tako da funkcija

$$g(x) = \begin{cases} \left(\frac{2^x + 8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$$

bude neprekidna u tački $x = 0$.

Rešenje. Da bi funkcija bila neprekidna u tački $x = 0$ mora da važi $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$, pa kako je

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x + 8^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{2^x + 8^x - 2}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{2^x + 8^x - 2}{2}\right)^{\frac{2}{2^x+8^x-2}\cdot\frac{2^x+8^x-2}{2x}}$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2^x + 8^x - 2}{x}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to 0}\frac{2^x - 1}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{8^x - 1}{x}\right)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 8)\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\ln 16\right) = e^{\ln 4} = 4,$$

sledi da je $A = 4$.

Zadatak 2.21. Odrediti konstante A i B tako da funkcija

$$f(x) = \begin{cases} A\,\frac{e^{x^4} - 1}{1 - \cos(x^2)}, & x > 0 \\ 2, & x = 0 \\ B\,\mathrm{arctg}\,\frac{x^2+1}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

bude neprekidna na svom domenu.

Rešenje. Funkcija f je neprekidna u svim tačkama domena, osim u $x = 0$, jer je kompozicija neprekidnih funkcija. Desna granična vrednost funkcije u $x = 0$ je

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = A \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^4}-1}{1-\cos(x^2)} = A \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{x^4}-1}{x^4}}{\frac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{\frac{x^4}{4}\cdot 4}} = 2A \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{x^4}-1}{x^4}}{\left(\frac{\sin\frac{x^2}{2}}{\frac{x^2}{2}}\right)^2} = 2A,$$

a leva granična vrednost funkcije u $x = 0$ je

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = B \lim_{x\to 0^-} \operatorname{arctg}\frac{x^2+1}{x} = B \cdot \text{“}\operatorname{arctg}(-\infty)\text{”} = B \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right).$$

Da bi funkcija bila neprekidna u tački $x = 0$ mora da važi

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0),$$

odnosno

$$2A = -\frac{B\pi}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad A = 1 \ \wedge \ B = -\frac{4}{\pi}.$$