Granična vrednost funkcije

Granična vrednost funkcije

Posmatrajmo ponašanje vrednosti funkcije f definisane sa

$$f(x) = x^2 - x + 2$$

za vrednosti x koje su blizu 2.

- Vrednosti $f(x)$ za x bliske sa 2 su date u tabeli:

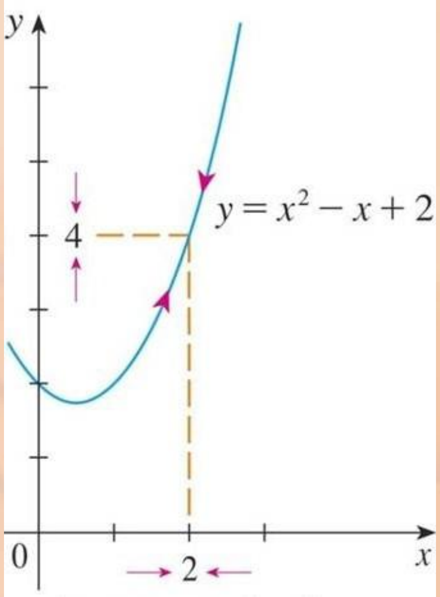
x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001

Granična vrednost funkcije

Na osnovu tabele i grafika funkcije *f* (parabola) koji je prikazan na slici,

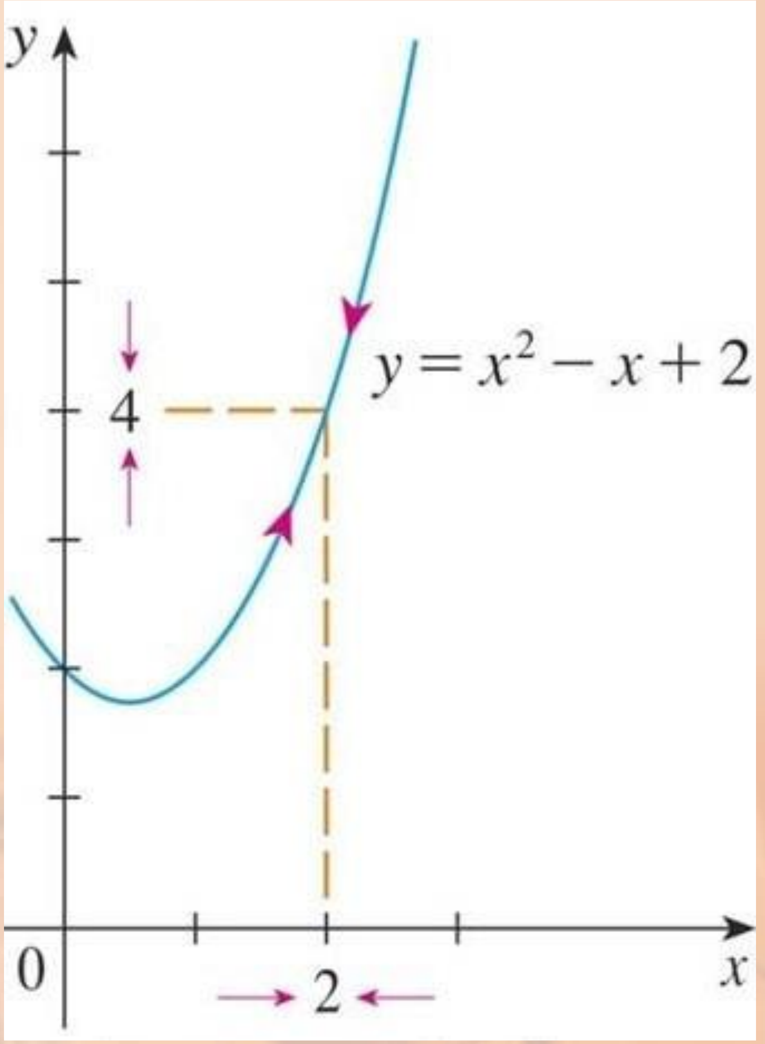
može se videti da, kada je *x* blizu 2 (sa bilo koje strane od 2), vrednosti *f*(*x*) su blizu 4.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.0	2.000000	3.0	8.000000
1.5	2.750000	2.5	5.750000
1.8	3.440000	2.2	4.640000
1.9	3.710000	2.1	4.310000
1.95	3.852500	2.05	4.152500
1.99	3.970100	2.01	4.030100
1.995	3.985025	2.005	4.015025
1.999	3.997001	2.001	4.003001



Granična vrednost funkcije

Zapravo, izgleda da vrednosti funkcije *f*(*x*) mogu postati blizu 4 koliko god to želimo, ako *x* postane dovoljno blizu 2.



Granična vrednost funkcije

Tada kažemo da je:

"granična vrednost funkcije

$f(x) = x^2 - x + 2$

kada x teži ka 2 jednaka 4."

- Pišemo:

$$\lim_{x \to 2}\left(x^2 - x + 2\right) = 4$$

Granična vrednost funkcije

U opštem slučaju, pišemo

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

i kažemo da je "granična vrednost *f*(*x*) (ili limes *f*(*x*)), kada *x* teži ka a, jednak *L*"

ako vrednosti *f*(*x*) mogu postati **proizvoljno** bliske *L* (blizu *L* koliko god želimo) kada *x* postane **dovoljno** blizu *a* (sa obe strane od *a*) ali ne i jednako sa *a*.

Granična vrednost funkcije

Grubo govoreći, ovim je iskazana činjenica da vrednosti $f(x)$ imaju tendenciju da budu sve bliže i bliže broju L kako se x približava broju a (sa obe strane od a), ali $x \neq a$.

- Preciznu definiciju granične vrednosti ćemo dati kasnije.

Granična vrednost funkcije

Alternativna oznaka za

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

je $f(x) \to L$ kada $x \to a$

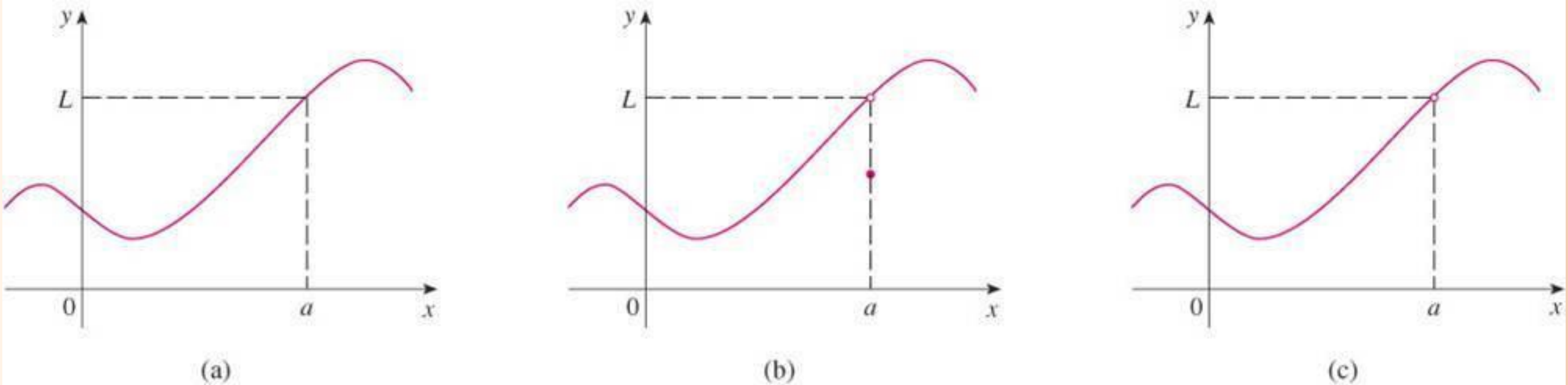
što se čita “$f(x)$ teži ka L kada x teži a.”

Šta zapravo ovde znači
“ $x \neq a$”?

- To znači da se pri razmatranju vrednosti $f(x)$ kada se x približava a, **ne posmatra** slučaj kada je $x = a$.
- $f(x)$ uopšte ne mora biti definisana u $x = a$.
- Ali f mora biti definisana u okolini od a!

Granična vrednost funkcije

Na slici su prikazani grafici tri različite funkcije.



- U primeru pod (c), funkcija nije definisana za *x*=*a.*
- U primeru pod (b), $f(a) \neq L$
- Ali u sva tri slučaja, bez obzira na to šta se dešava u *a*, sledi da je $\lim_{x \to a} f(x) = L$

Granična vrednost funkcije

Primer 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

- Treba uočiti da funkcija $f(x) = (x - 1)/(x^2 - 1)$ nije definisana za $x = 1$.
- Kao što smo već ranije naglasili, to nam ne smeta da tražimo graničnu vrednost $\lim_{x \to a} f(x)$ jer se za x posmatraju samo vrednosti koje su blizu a, ali ne i jednake sa a.

Granična vrednost funkcije

Primer 1

U tabeli su date vrednosti $f(x)$ za vrednosti x koje se približavaju 1.

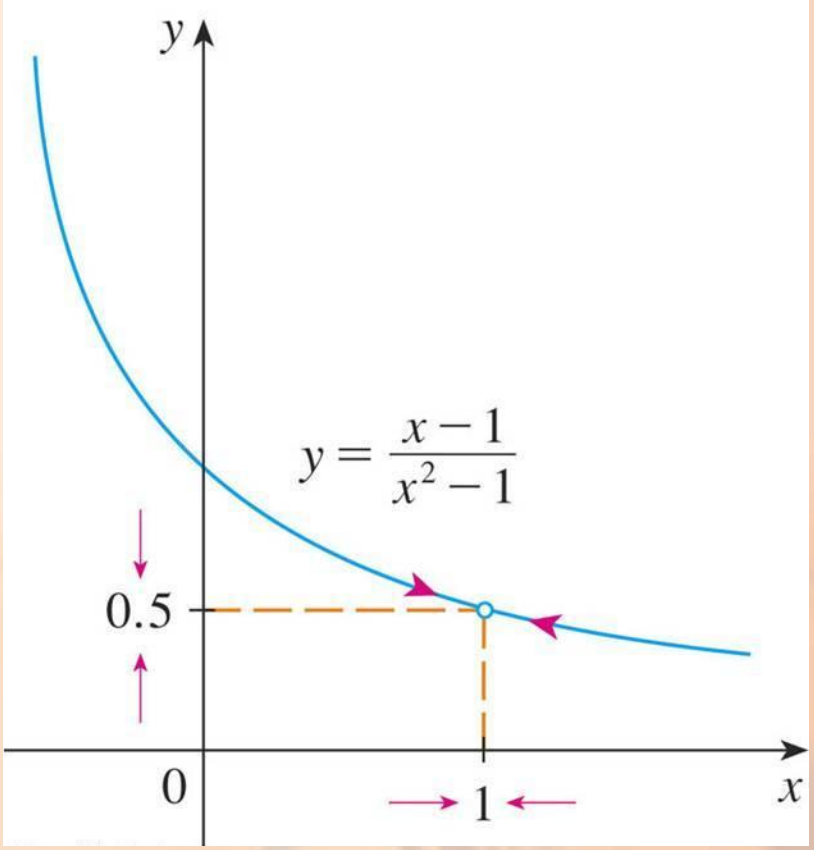
- Na osnovu vrednosti iz tabele, možemo pretpostaviti da je

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

$x < 1$	$f(x)$
0.5	0.666667
0.9	0.526316
0.99	0.502513
0.999	0.500250
0.9999	0.500025

$x > 1$	$f(x)$
1.5	0.400000
1.1	0.476190
1.01	0.497512
1.001	0.499750
1.0001	0.499975

Grafik funkcije *f* :



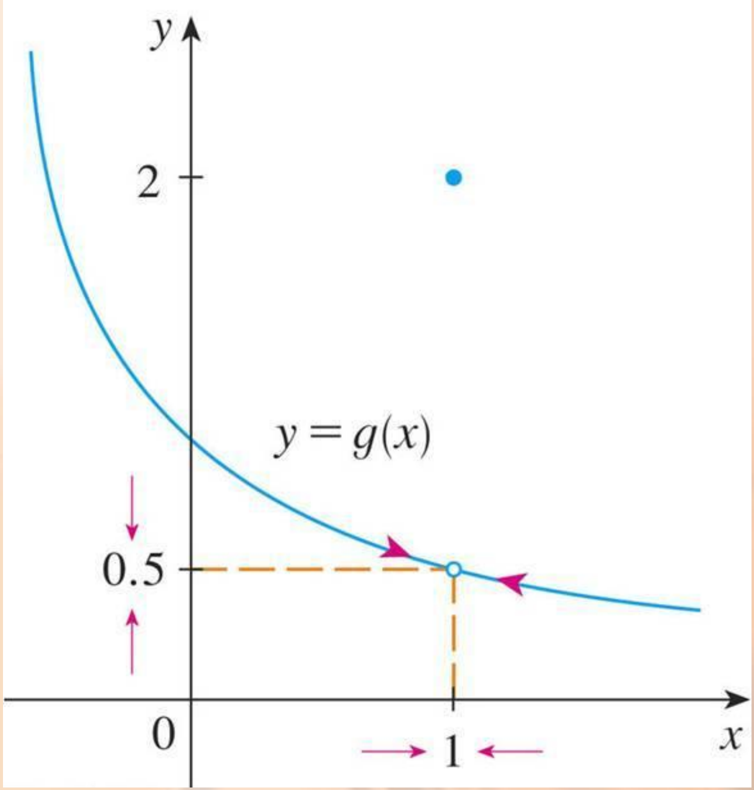
Granična vrednost funkcije **Primer 1**

Ako sada funkciju *f* samo malo promenimo tako što definišemo da ima vrednost 2 za $x = 1$, dobijamo funkciju *g*:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1, \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

Primer 1

Funkcija *g* ima istu graničnu vrednost kao i *f* kada *x* teži 1!



Granična vrednost funkcije

Primer 2

Proceniti vrednost $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$.

- Tabela sadrži nekoliko vrednosti ove funkcije za *t* blizu 0.
- Kako se *t* približava 0, deluje da se vrednosti funkcije približavaju ka 0.16666666…
- Možemo zaključiti da je: $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{1}{6}$

t	$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 1.0	0.16228
± 0.5	0.16553
± 0.1	0.16662
± 0.05	0.16666
± 0.01	0.16667

Međutim, šta se dešava za još manje vrednosti od *t*?

- Očigledno je da se vrednosti funkcije, izračunate na nekom kalkulatoru, približavaju 0 ako je *t* dovoljno malo.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

Primer 2

Da li ovo znači da je granična vrednost date funkcije jednaka

0, a ne 1/6?

- Ne, ovaj limes je jednak 1/6, i to ćemo videti u nastavku.

t	$\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$
± 0.0005	0.16800
± 0.0001	0.20000
± 0.00005	0.00000
± 0.00001	0.00000

Primer 2

Problem je u tome što kalkulator daje pogrešne vrednosti za $\sqrt{t^2+9}$ jer je veoma blisko 3 kada je *t* jako malo.

- Zapravo, kada je *t* dovoljno malo, kakulator daje da je vrednost od $\sqrt{t^2+9}$ baš 3.000… sa onoliko cifara sa koliko taj kakulator računa.

Primer 2

Vrlo slična stvar se dešava kada se crta grafik funkcije

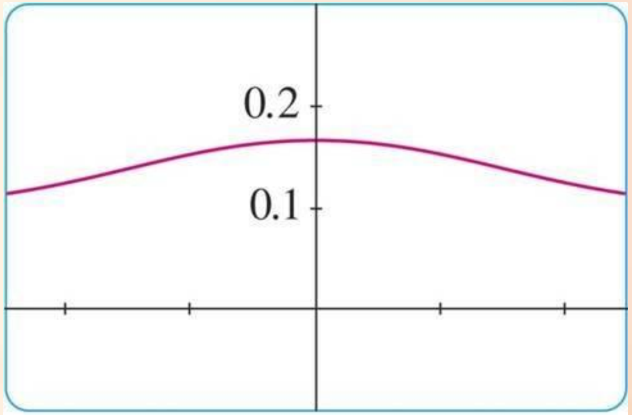
$$f(t)=\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$$

na nekom grafičkom kalkulatoru ili kompjuteru.

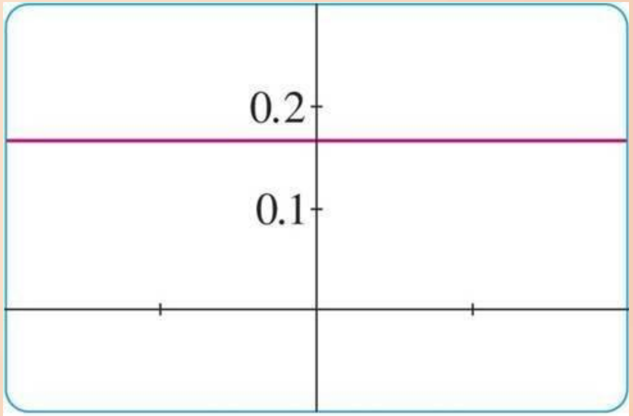
Granična vrednost funkcije

Primer 2

Na ovim slikama su prilično tačno prikazane vrednosti funkcije f.



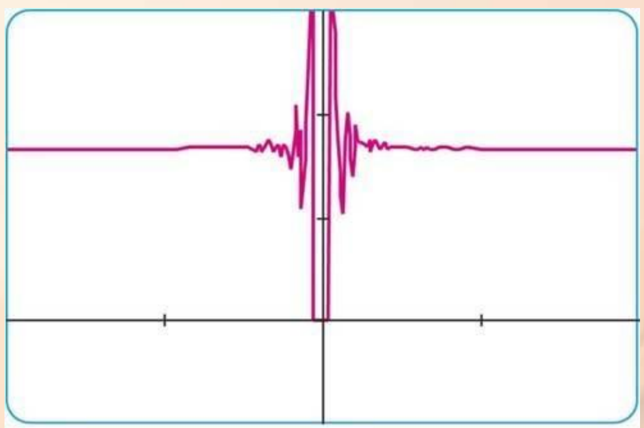
(a) [−5, 5] sa [−0.1, 0.3]



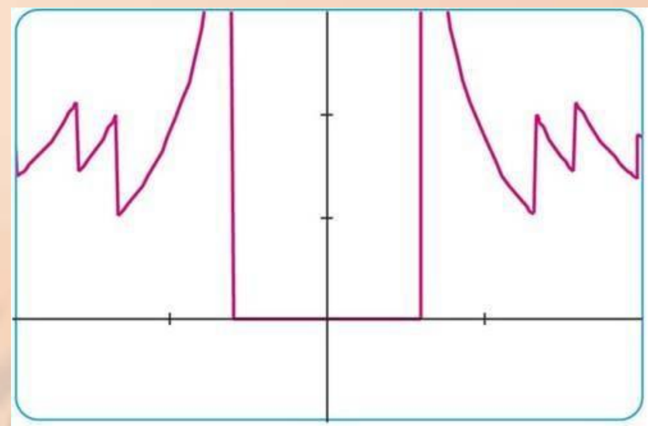
(b) [−0.1, 0.1] sa [−0.1, 0.3]

Primer 2

Međutim, ako se previše zumira, onda će se dobiti netačan grafik zato što bilo koji kalkulator/kompjuter pravi grešku kod oduzimanja veoma bliskih brojeva.



(c) $[-10^{-6}, 10^{-6}]$ sa $[-0.1, 0.3]$



(d) $[-10^{-7}, 10^{-7}]$ sa $[-0.1, 0.3]$

Primer 3

Proceniti vrednost $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$.

- Funkcija $f(x) = (\sin x)/x$ nije definisana za $x = 0$.
- Pomoću kalkulatora su dobijene vrednosti u tabeli:

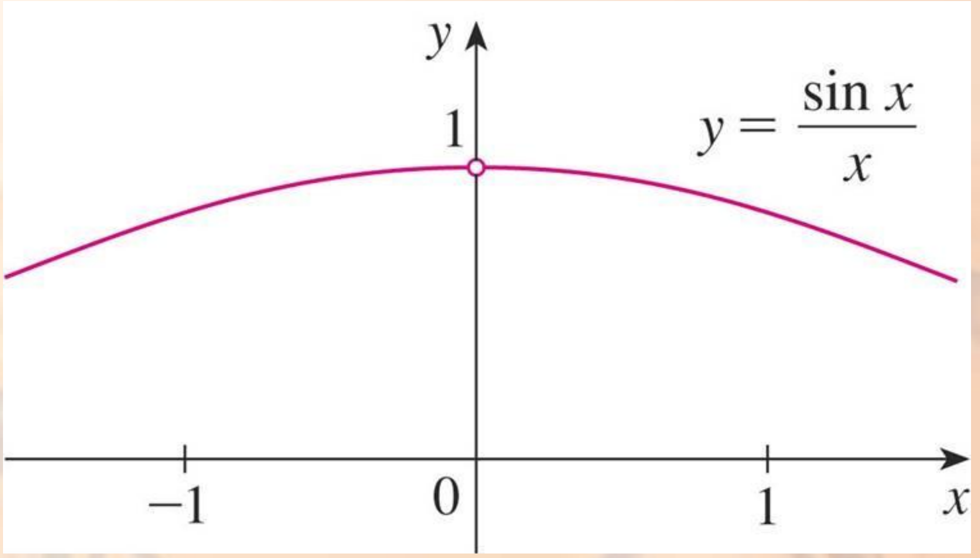
x	$\dfrac{\sin x}{x}$
± 1.0	0.84147098
± 0.5	0.95885108
± 0.4	0.97354586
± 0.3	0.98506736
± 0.2	0.99334665
± 0.1	0.99833417
± 0.05	0.99958339
± 0.01	0.99998333
± 0.005	0.99999583
± 0.001	0.99999983

Primer 3

Na osnovu tabele i grafika funkcije, možemo zaključiti:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

- Ovaj zaključak je tačan, a rezultat ćemo kasnije potvrditi.



x	$\dfrac{\sin x}{x}$
±1.0	0.84147098
±0.5	0.95885108
±0.4	0.97354586
±0.3	0.98506736
±0.2	0.99334665
±0.1	0.99833417
±0.05	0.99958339
±0.01	0.99998333
±0.005	0.99999583
±0.001	0.99999983

Primer 4

Ispitati koliko je $\lim_{x \to 0} \sin \dfrac{\pi}{x}$.

- Ni ova funkcija $f(x) = \sin(\pi/x)$ nije definisana za $x=0$.

Primer 4

Računajući vrednosti funkcije za neke male vrednosti od *x*, dobija se:

$$f(1) = \sin \pi = 0 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin 2\pi = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin 3\pi = 0 \qquad f\left(\frac{1}{4}\right) = \sin 4\pi = 0$$

$$f(0.1) = \sin 10\pi = 0 \qquad f(0.01) = \sin 100\pi = 0$$

Analogno, $f(0.001) = f(0.0001) = 0$.

Granična vrednost funkcije

Primer 4

Na osnovu ovih informacija, mogli bismo doći u iskušenje da zaključimo da je

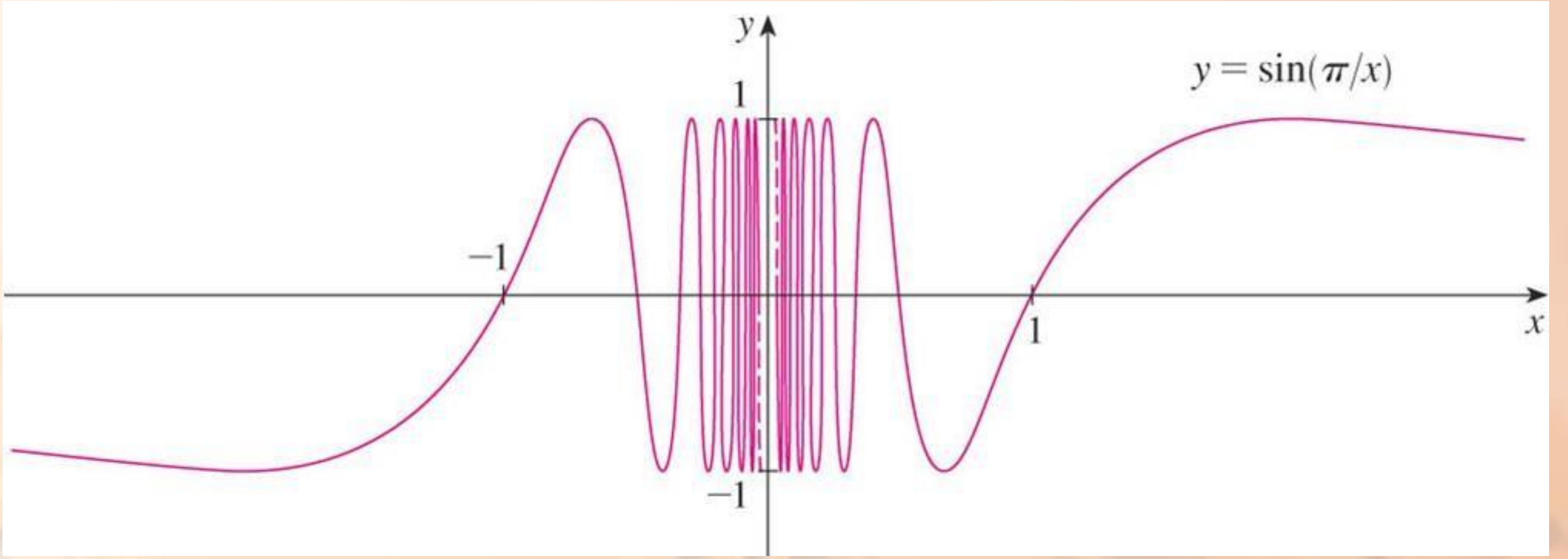
$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{\pi}{x} = 0$$

- Međutim, ovog puta ne bismo bili u pravu!
- Iako je $f(1/n) = \sin n\pi = 0$ za bilo koju celobrojnu vrednost n, takođe je tačno da je $f(x) = 1$ za beskonačno mnogo vrednosti x koje teže 0.

Primer 4

Grafik funkcije *f* je dat na slici.

- Isprekidane linije u blizini *y*-ose označavaju da vrednosti sin(π /x) osciluju između 1 i –1 beskonačno kada se *x* približava 0.



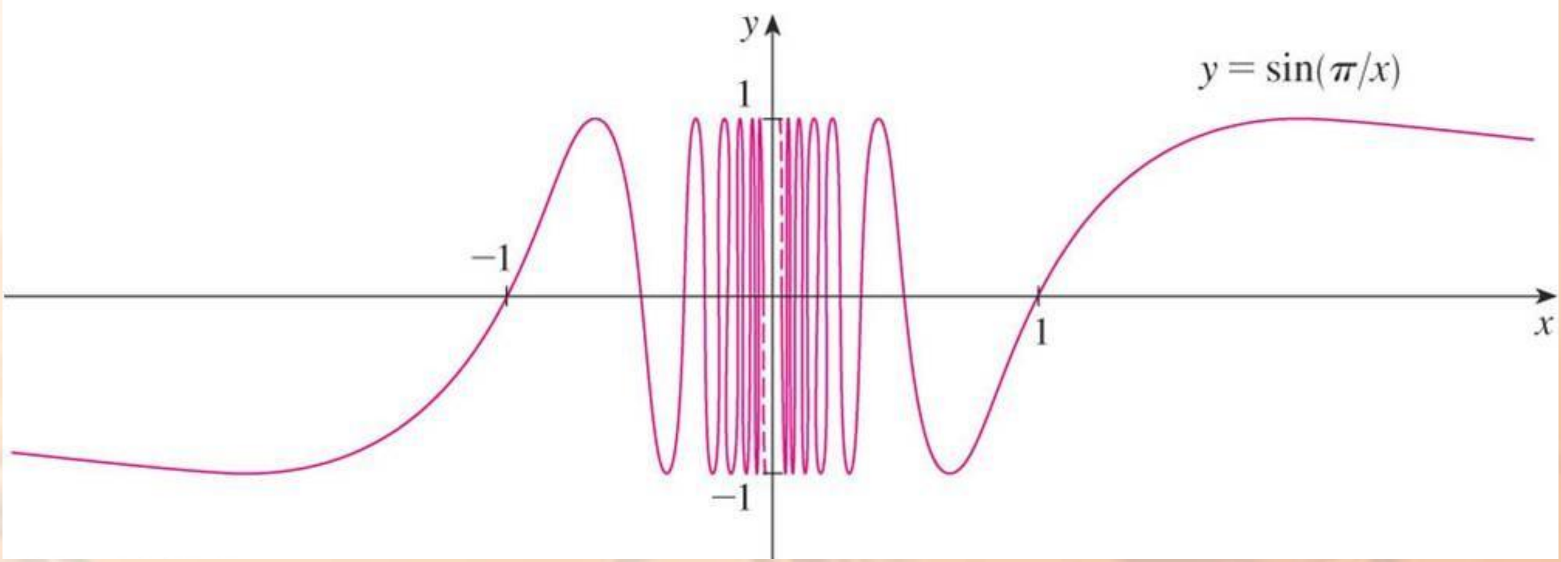
Granična vrednost funkcije

Primer 4

- Kako se vrednosti *f*(*x*) ne približavaju nekom fiksiranom broju kada se *x* približava 0, sledi da

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{\pi}{x}$$

ne postoji.



Granična vrednost funkcije

Primer 5

Naći $\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos 5x}{10{,}000}\right)$.

Kao i ranije, izračunaćemo neke vrednosti funkcije.

- Na osnovu tabele bi se možda moglo zaključiti:

x	$x^3+\frac{\cos 5x}{10{,}000}$
1	1.000028
0.5	0.124920
0.1	0.001088
0.05	0.000222
0.01	0.000101

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos 5x}{10{,}000}\right)=0$$

Granična vrednost funkcije

Primer 5

- Međutim, ako se nastavi sa još manjim vrednostima od *x*, tabela nam sugeriše:

$$\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\cos 5x}{10,000}\right)=0.000100=\frac{1}{10,000}$$

x	$x^3+\dfrac{\cos 5x}{10,000}$
0.005	0.00010009
0.001	0.00010000

Primer 5

Kasnije ćemo videti zašto je

$$\lim_{x \to 0} \cos 5x = 1$$

- Tako da sledi da je data granična vrednost zaista jednaka 0.0001.

Granična vrednost funkcije

U Primerima 4 i 5 smo videli kako se može upasti u zamku pogrešnog zaključivanja, tj. procenjivanja granične vrednosti na osnovu nekih vrednosti funkcije.

- Veoma lako se dođe do pogrešnog zaključka ako se uzmu u razmatranje pogrešne vrednosti za *x*, ali nije uvek lako proceniti koje vrednosti treba uzeti.
- Takođe, kao što smo videli u Primeru 2, može se desiti da nam kalkulator daje pogrešne vrednosti.
- **Zato su razvijene metode i tehnike nalaženja graničnih vrednosti koje uvek dovode do tačnog rezultata.**

Primer 6

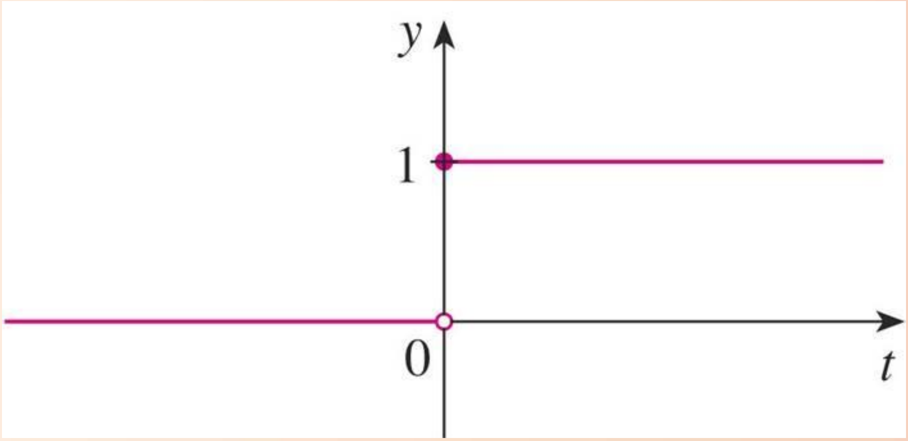
Hevisajdova funkcija *H* je definisana sa:

$$H(t)=\begin{cases}0, & \text{za } t<0\\ 1, & \text{za } \mathrm{t}\geq 0\end{cases}$$

- Funkcija je dobila ime po Oliveru Hevisajdu (1850–1925) koji je bio inženjer elektrotehnike.
- Služi za opisivanje npr. električne struje koja je uključena u trenutku $t = 0$.

Primer 6

Grafik ove funkcije je prikazan na slici.



- Kada se *t* približava 0 sa leve strane, *H*(*t*) teži 0.
- Kada se *t* približava 0 sa desne strane, *H*(*t*) teži 1.
- Ne postoji samo **jedan** broj kome se vrednosti *H*(*t*) približavaju kada *t* teži 0.
- Dakle, $\lim_{t \to 0} H(t)$ ne postoji.

Jednostrani limes

U prethodnom primeru smo videli da funkcija *H*(*t*) teži 0 kada *t* teži 0 sa leve strane, a da *H*(*t*) teži 1 kada *t* teži 0 sa desne strane.

- Ovakva situacija se zapisuje na sledeći način: $\lim_{t \to 0-} H(t) = 0$ i $\lim_{t \to 0+} H(t) = 1$.
- Simbol '$t \to 0^-$' ukazuje na to da se posmatraju samo vrednosti od *t* koje su manje od 0.
- A simbol, '$t \to 0^+$' ukazuje na to da se posmatraju samo vrednosti od *t* koje su veće od 0.

Jednostrani limes

Pišemo

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

i kažemo da je *L* leva granična vrednost funkcije *f*(*x*) kada *x* teži ka *a* — ili limes od *f*(*x*) kada *x* teži ka *a* sa leve strane — ako vrednosti od *f*(*x*) mogu postati proizvoljno bliske *L* kada se *x* dovoljno približi *a* **preko brojeva koji su manji od *a*.**

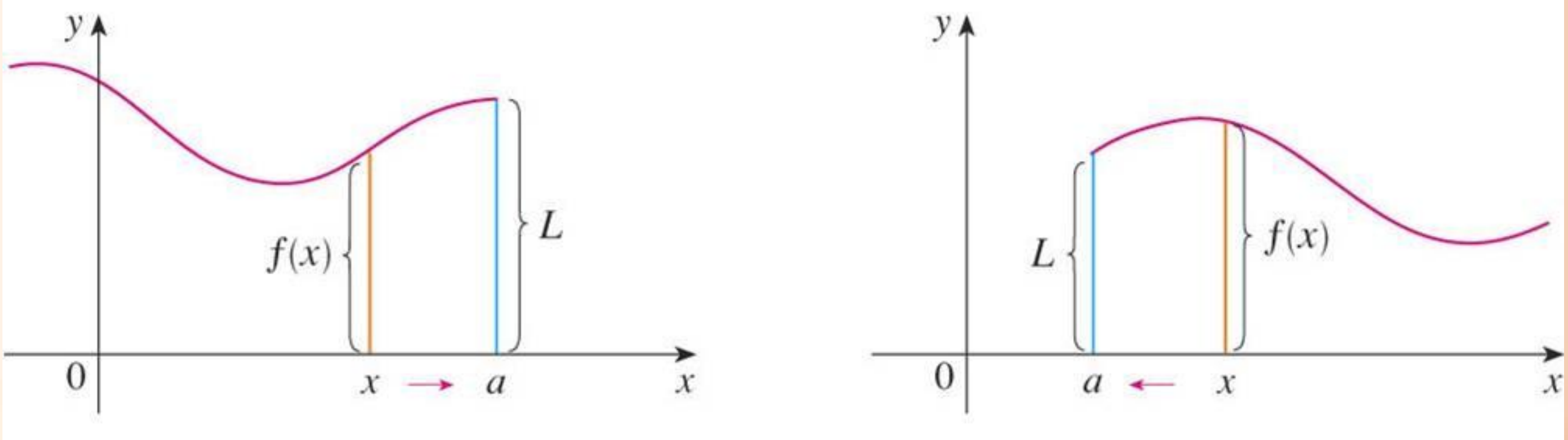
Jednostrani limes

- Slično, ako zahtevamo da *x* bude stalno veće od *a*, dobija se da je ‘desni limes od *f*(*x*) kad *x* teži ka *a* jednak *L*’ i pišemo

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

- Tako da simbol ‘$x \to a^+$’ znači da razmatramo samo vrednosti za *x* koje su $x > a$.

Levi i desni limes:



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

Jednostrani limes

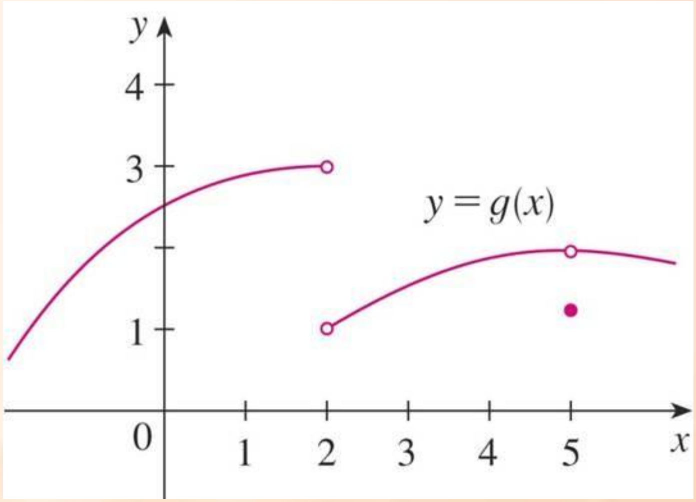
Poredeći formulacije za limes i levi i desni limes, može se doći do zaključka da:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{AKKO} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) = L \ \text{ i } \ \lim_{x\to a^+} f(x) = L}$$

Jednostrani limes

Primer 7

Dat je grafik funkcije *g*. Sa date slike odrediti:



$$\lim_{x\to 2^-} g(x) \qquad \lim_{x\to 2^+} g(x)$$

$$\lim_{x\to 2} g(x) \qquad \lim_{x\to 5^-} g(x)$$

$$\lim_{x\to 5^+} g(x) \qquad \lim_{x\to 5} g(x)$$

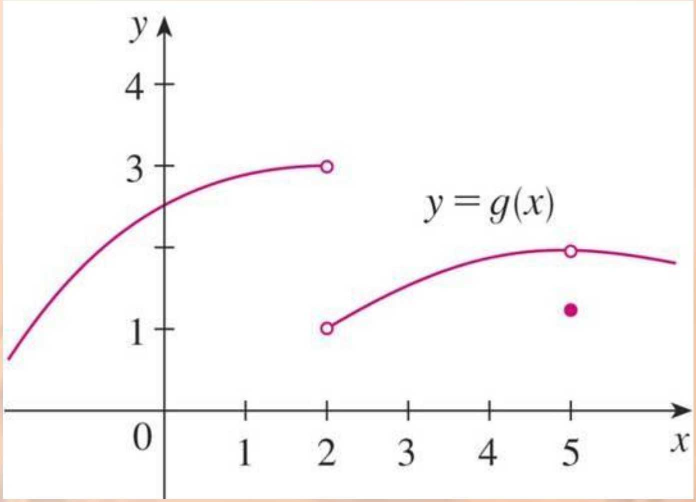
Jednostrani limes

Primer 7

Sa grafika se vidi da se vrednosti funkcije *g*(*x*) približavaju 3 kada *x* teži 2 sa leve strane, ali da teže ka 1 kada *x* prilazi 2 sa desne strane. Tako da sledi:

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3$$

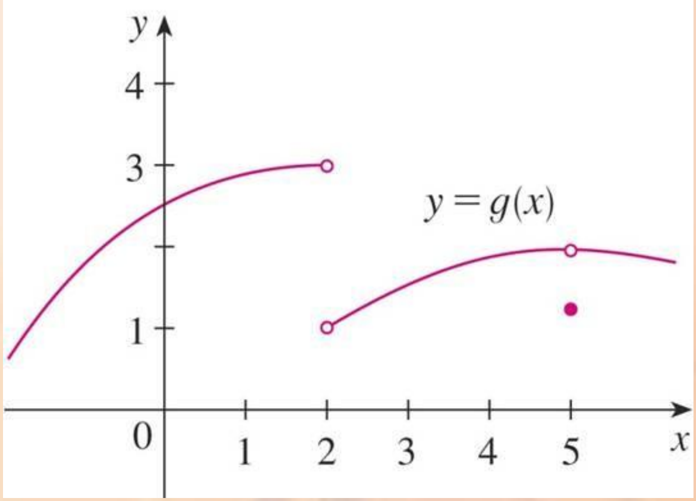
$$\lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$$



Jednostrani limes

Primer 7

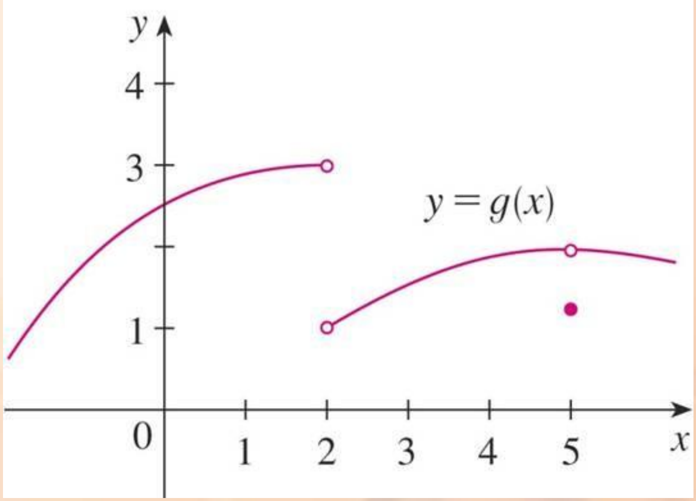
Kako levi i desni limes imaju različite vrednosti, zaključujemo da $\lim_{x \to 2} g(x)$ ne postoji.



Primer 7

Sa grafika se vidi da su $\lim\limits_{x \to 5^-} g(x) = 2$

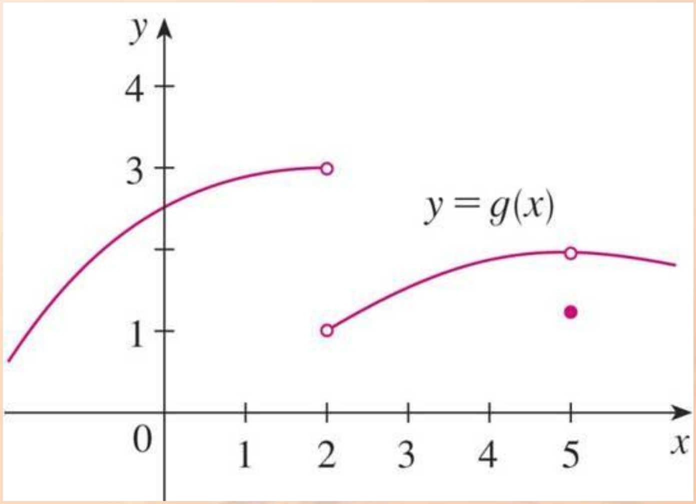
i $\lim\limits_{x \to 5^+} g(x) = 2$.



Primer 7

Za $\lim_{x \to 5} g(x)$, levi i desni limesi su jednaki.

- Dakle, imamo $\lim_{x \to 5} g(x) = 2$
- Uočimo da je $g(5) \neq 2$.



Beskonačan limes

Primer 8

Naći $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ ako postoji.

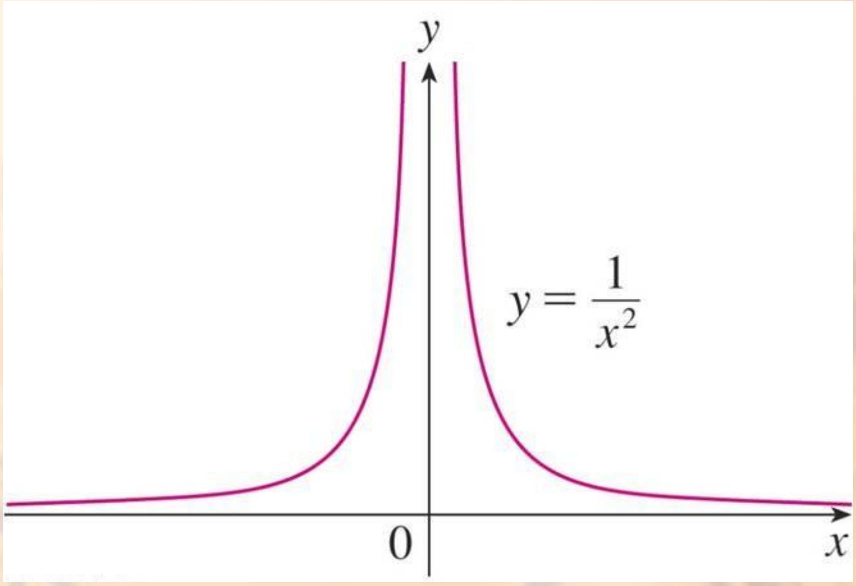
- Kada x postane blisko 0, x^2 takođe postaje broj koji je blizu 0, a onda je $1/x^2$ veoma veliki broj.

x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

Beskonačan limes

Primer 8

- Sa grafika funkcije $f(x) = 1/x^2$ se vidi da vrednosti $f(x)$ mogu biti proizvoljno velike kada x postane dovoljno blizu 0.
- Tako da vrednosti $f(x)$ ne teže nekom broju.
- Dakle, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$ ne postoji, tj. nije realan broj.



x	$\frac{1}{x^2}$
± 1	1
± 0.5	4
± 0.2	25
± 0.1	100
± 0.05	400
± 0.01	10,000
± 0.001	1,000,000

Beskonačan limes

Primer 8

Da bi se opisalo ovakvo ponašanje, uvodi se oznaka:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$$

Kao i kod nizova, ovde ∞ ne smatramo brojem.

- Ovo znači da funkcija nema konačnu graničnu vrednost.
- Na ovaj način je samo okarakterisana jedna posebna situacija u kojoj limes ne postoji.
- Dakle, $1/x^2$ može biti proizvoljno veliki broj kada se x dovoljno približi 0.

Beskonačan limes

Primer 8

U opštem slučaju pišemo:

$$\lim_{x \to a} f\left(x\right) = \infty$$

U situaciji kada vrednosti *f*(*x*) postaju sve veće i veće, tj.

"rastu bez ograničenja"

kada *x* postaje sve bliže i bliže *a*.

Beskonačan limes

Neka je funkcija *f* definisana u nekoj okolini od *a*, osim eventualno u *a*.

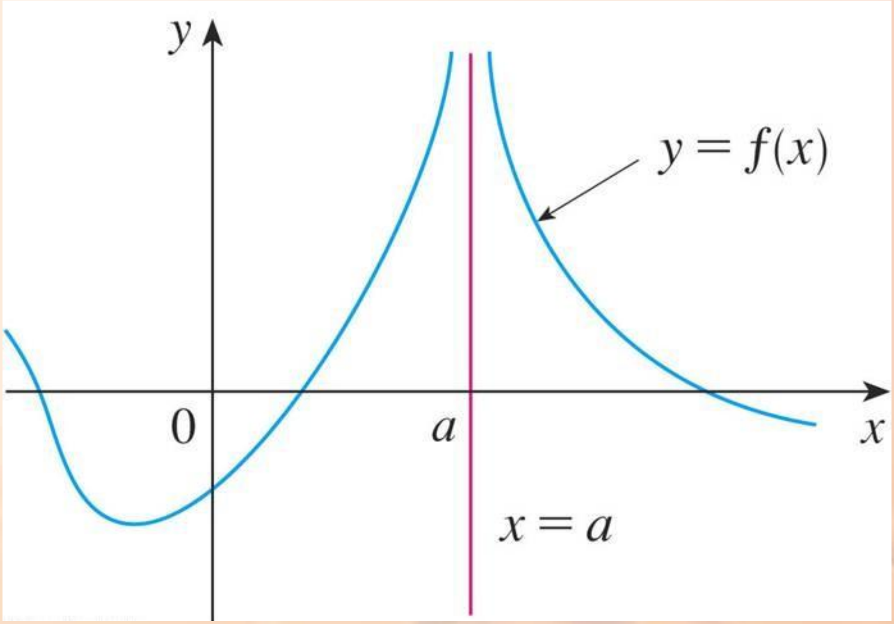
Tada

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

znači da vrednosti od *f*(*x*) mogu postati proizvoljno velike — koliko god želimo! — kada je *x* dovoljno blizu *a*

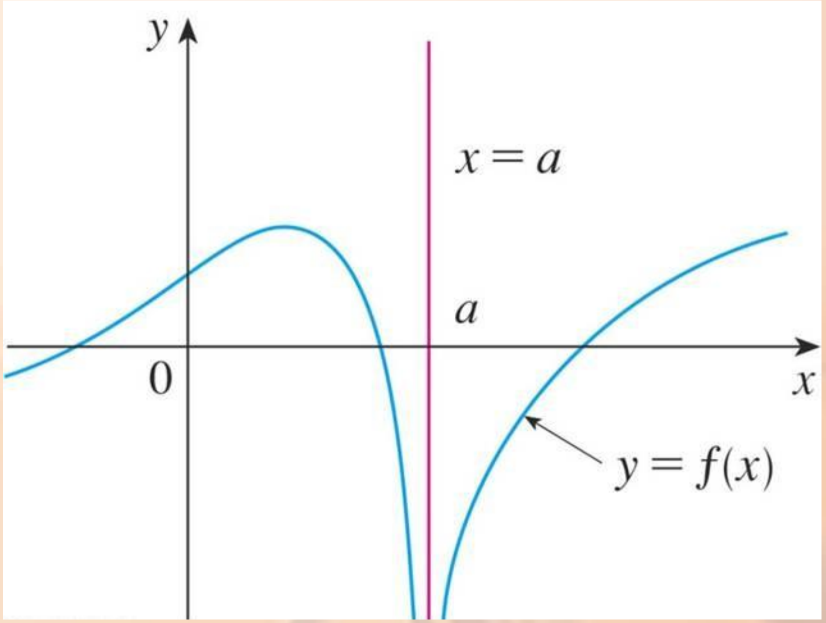
(ali ne i jednako sa *a*).

Grafički prikaz opisane situacije:



Beskonačan limes

Analogno, kada se vrednosti funkcije stalno smanjuju kako *x* postaje sve bliže *a*:



Beskonačan limes

Neka je *f* funkcija koja je definisana u nekoj okolini tačke *a*, osim eventualno u samoj tački *a*.

Tada

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

znači da vrednost *f*(*x*) može biti manja od bilo kojeg negativnog broja kada je *x* dovoljno blizu *a* (ali ne i jednako sa *a)*.

Beskonačan limes

Simbolički zapis

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

znači da

"*f*(*x*) neograničeno opada kako se *x* približava ka *a*."

- Primer:

$$\lim_{x \to 0} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\infty$$

Beskonačan limes

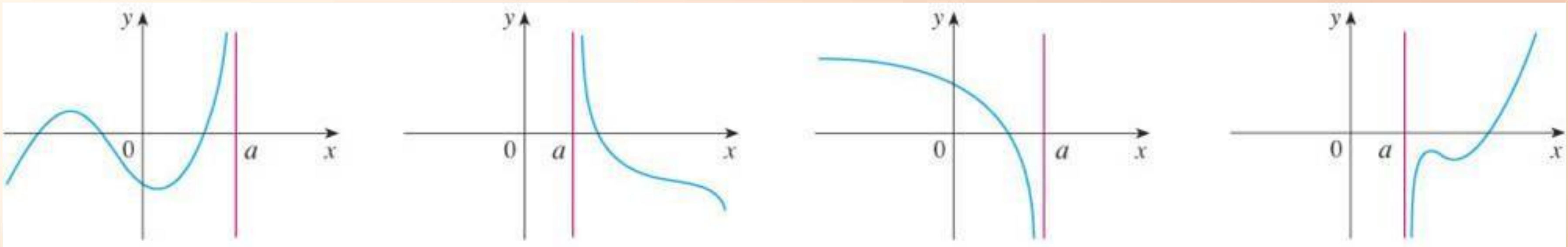
Slično se mogu formulisati i jednostrani limesi:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$$

Beskonačan limes

Ova četiri slučaja su ilustrovana na slikama:



(a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Beskonačan limes

Prava ***x* = *a*** se zove **vertikalna asimp**tota krive

y = *f*(*x*) ako je bar jedan od navedenih limesa tačan za datu funkciju:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$$

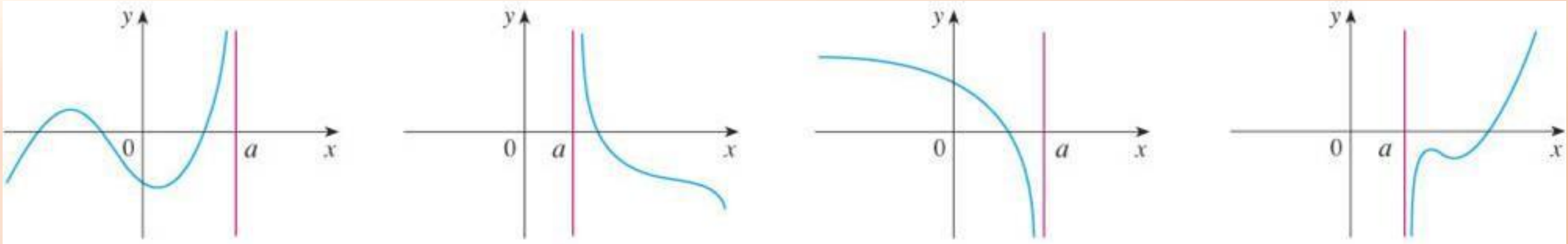
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

- Na primer, *y*-osa je vertikalna asimptota krive $y = 1/x^2$ zato što važi $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \infty$.

Beskonačan limes

Na slikama, prava $x = a$ je vertikalna asimptota u sva četiri prikazana slučaja.

- Informacija o tome da li funkcija ima vertikalnu asimptotu pomaže u skiciranju grafika funkcije i analizi ponašanja funkcije.



(a) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$ (b) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ (c) $\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ (d) $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Primer 9

Naći $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{2x}{x-3}$ i $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{2x}{x-3}$.

- Ako je *x* blizu 3 ali veće od 3, onda je imenilac *x* – 3 mali pozitivan broj, a 2*x* je blizu 6.
- Dakle, količnik 2*x*/(*x* – 3) je veliki pozitivan broj.
- Tako zaključujemo da je

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{2x}{x-3} = \infty$$

Primer 9

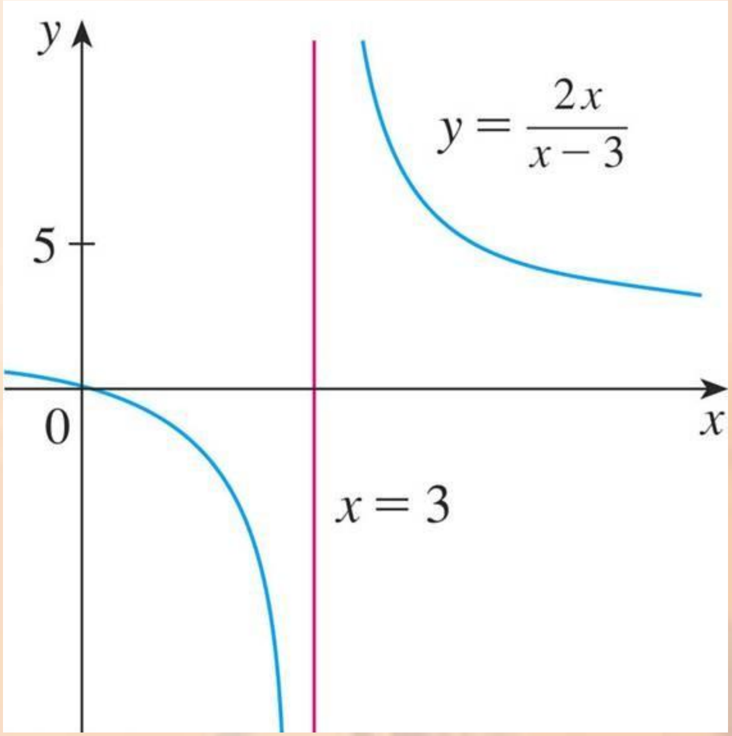
- Slično, ako je x blizu 3 ali manje od 3, onda je x - 3 mali negativan broj, a $2x$ je i dalje pozitivan broj (blizu 6).
- Tako da je $2x/(x - 3)$ je numerički veliki negativan broj.
- Dakle, zaključujemo da je $\lim_{x \to 3^-} \frac{2x}{x-3} = -\infty$.

Beskonačan limes

Primer 9

Grafik funkcije *y* = 2*x*/(*x* - 3) je dat na slici.

- Prava *x* = 3 je vertikalna asimptota.



Primer 10

Naći vertikalne asimptote za funkciju $f(x) = \text{tg } x$.

- Kako je $\text{tg } x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, potencijalne vertikalne asimptote su tamo gde je cos x = 0.
- Kako $\cos x \to 0^+$ kada $x \to (\pi/2)^-$ i $\cos x \to 0^-$ kada $x \to (\pi/2)^+$, a sin x je pozitivan kada je x blizu $\pi/2$, imamo:

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \text{tg } x = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to(\pi/2)^+} \text{tg } x = -\infty$$

- Tako je pokazano da je prava $x = \pi/2$ vertikalna asimptota.

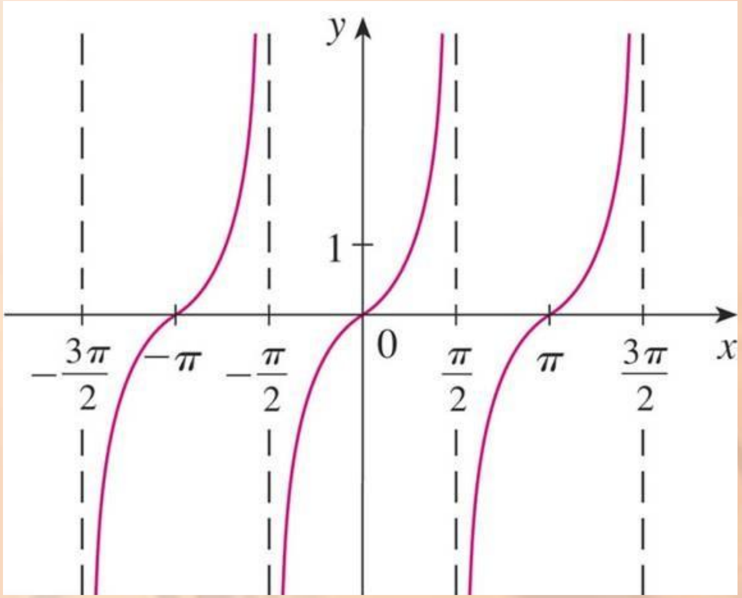
Primer 10

Analognim rezonovanjem se dolazi do zaključka da su sve prave

$x = (2n + 1)\pi/2$, gde je n ceo broj, vertikalne asimptote za

$f(x) = \text{tg } x$.

- Grafik:



Beskonačan limes

Primer 10

Još jedan primer osnovne elementarne funkcije čiji grafik ima vertikalnu asimptotu je logaritamska funkcija $y = \ln x$.

- Vidimo da je $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.
- Dakle, prava $x = 0$ (y-osa) je vertikalna asimptota.
- Ovo važi za sve funkcije $y = \log_a x$, za $a > 1$.