

Granična vrednost funkcije

Intuitivna definicija granične vrednosti nije uvek dovoljna.

- To je zato što izrazi 'x je blizu 2' i 'f(x) postaje sve bliže i bliže L' nisu dovoljno precizni.
- Da bismo mogli pouzdano da zaključimo da je npr.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 + \frac{\cos 5x}{10000} \right) = 0.0001 \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

moramo imati preciznu definiciju granične vrednosti.

**Precizna definicija granične
vrednosti funkcije**

Granična vrednost funkcije

Posmatrajmo funkciju

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{za } x \neq 3 \\ 6, & \text{za } x = 3 \end{cases}$$

- Intuitivno je jasno da kada je x blizu 3 ali $x \neq 3$, da je onda $f(x)$ blizu 5. Dakle,

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$

Granična vrednost funkcije

Da bismo mogli da dobijemo više informacija o tome kako se $f(x)$ menja kada je x blizu 3, postavimo sledeće pitanje:

- Koliko x treba da bude blizu 3 da bi se vrednosti $f(x)$ razlikovale od 5 za manje od 0.1?

Granična vrednost funkcije

Rastojanje x od 3 je $|x - 3|$, a rastojanje $f(x)$ od 5 je $|f(x) - 5|$.

Dakle, zadatak je da se pronađe broj δ takav da iz $|x - 3| < \delta$

$$\text{sledi } |f(x) - 5| < 0.1$$

(ali da je $x \neq 3$).

Granična vrednost funkcije

Ako je $|x - 3| > 0$, onda $x \neq 3$.

Dakle, ekvivalentna formulacija problema glasi:

treba naći broj δ takav da ako važi

$$0 < |x - 3| < \delta \quad \text{onda sledi} \quad |f(x) - 5| < 0.1$$

Granična vrednost funkcije

Treba uočiti da ako važi

$$0 < |x - 3| < (0.1) / 2 = 0.05$$

onda važi i

$$|f(x) - 5| = |(2x - 1) - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 0.1$$

tj. $|f(x) - 5| < 0.1$ ako je ispunjeno $0 < |x - 3| < 0.05$

- Dakle, odgovor je $\delta = 0.05$
- Što znači da ako se x nalazi na rastojanju od 3 koje je manje od 0.05, onda će $f(x)$ biti na rastojanju od 5 koje je manje od 0.1.

Granična vrednost funkcije

Ako se uzme manji broj od 0.1, npr. 0.01, onda se na isti način može ustanoviti da će se vrednosti $f(x)$ razlikovati od 5 za manje od 0.01 ako se obezbedi da se x razlikuje od 3 za manje od $(0.01)/2 = 0.005$.

Dakle, iz

$$0 < |x - 3| < 0.005 \quad \text{sledi} \quad |f(x) - 5| < 0.01$$

Granična vrednost funkcije

Slično,

ako važi $0 < |x - 3| < 0.0005$ onda je

$$|f(x) - 5| < 0.001$$

- Brojevi 0.1, 0.01 i 0.001 koje smo razmatrali su **'tolerancija greške'** koju dozvoljavamo.

Granična vrednost funkcije

Da bi 5 zaista bilo granična vrednost funkcije $f(x)$ kada x teži ka 3, potrebno je da bude moguće da razlika između $f(x)$ i 5 bude ne samo manja od ova tri broja koja smo pomenuli, već mora biti moguće da se ona napravi manjom od bilo kog pozitivnog broja!

- To se može uraditi analognim rezonovanjem.

Granična vrednost funkcije

Ako sa ε označimo proizvoljan pozitivan broj, onda kao i ranije sledi:

$$|f(x) - 5| < \varepsilon \quad \text{za} \quad 0 < |x - 3| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$$

- Ovo je način da precizno izrazimo da je $f(x)$ blizu 5 kada je x blizu 3.

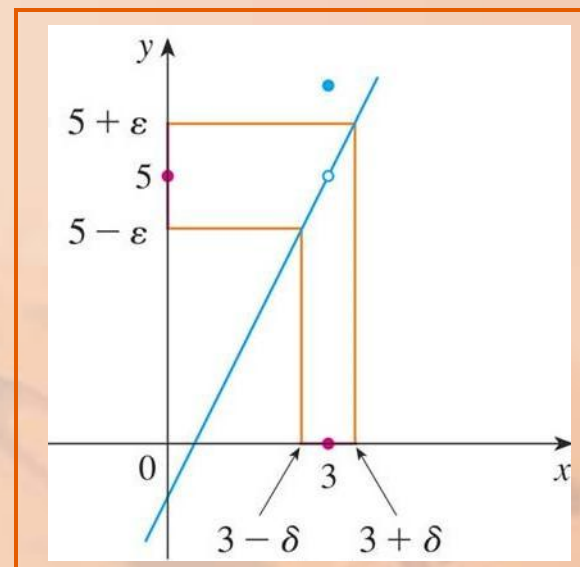
Granična vrednost funkcije

Treba naglasiti da se isto to može napisati i na sledeći način:

Ako je $3 - \delta < x < 3 + \delta$ ($x \neq 3$)

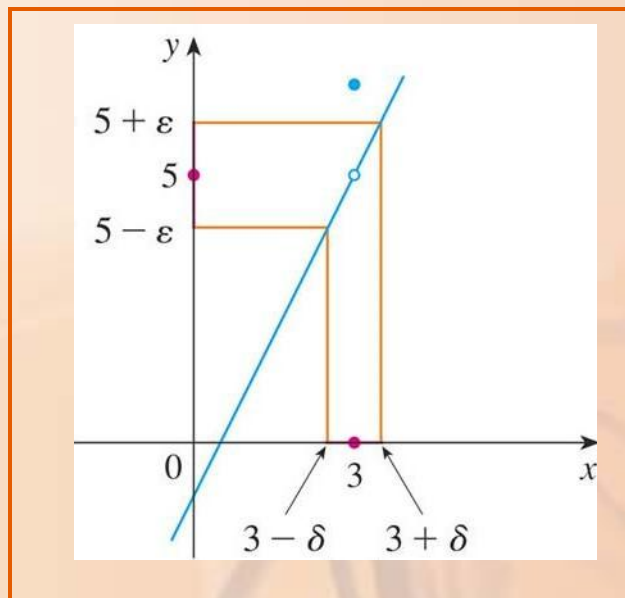
onda važi $5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon$

To je ilustrovano na grafiku:



Granična vrednost funkcije

Uzimajući vrednosti za $x (\neq 3)$ iz intervala $(3 - \delta, 3 + \delta)$, vrednosti funkcije $f(x)$ se nalaze u intervalu $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.



Neka je f funkcija definisana na nekom otvorenom intervalu koji sadrži broj a , osim eventualno baš u a .

Tada kažemo da je L granična vrednost funkcije $f(x)$ kada x teži ka a i pišemo

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji broj $\delta > 0$ takav da

ako $0 < |x - a| < \delta$ onda $|f(x) - L| < \varepsilon$

Granična vrednost funkcije

Definicija se može opisati i na sledeći način:

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ znači da se rastojanje između $f(x)$ i L može napraviti proizvoljno malim kada se uzme da je rastojanje od x do a dovoljno malo (ali ne 0).

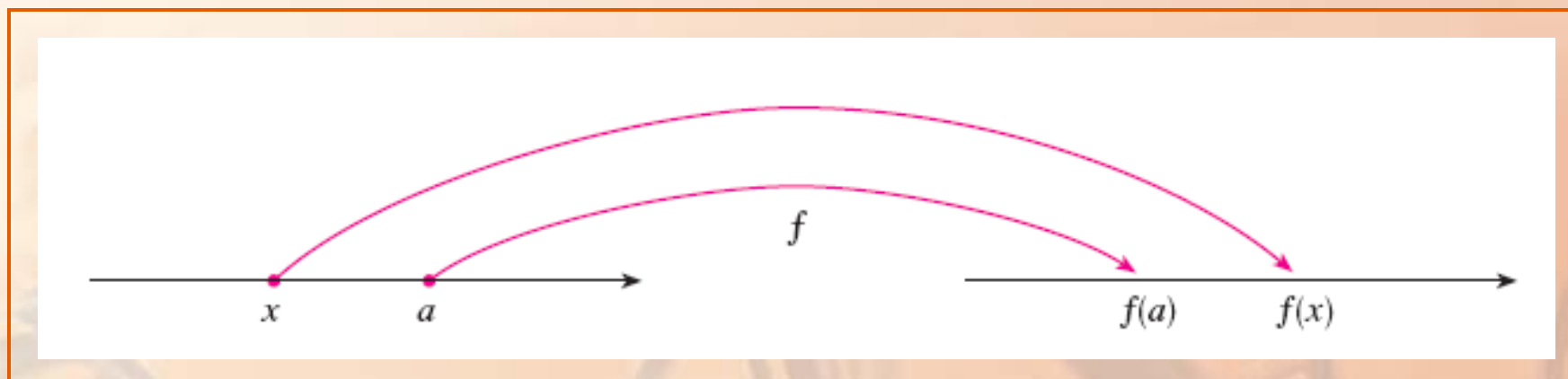
Granična vrednost funkcije

U intervalnom zapisu, Definicija 1:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ znači da se za svako $\varepsilon > 0$ (ma koliko malo bilo ε), može naći takvo $\delta > 0$ tako da ako se x nalazi u intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ i $x \neq a$, onda se $f(x)$ nalazi u otvorenom intervalu $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

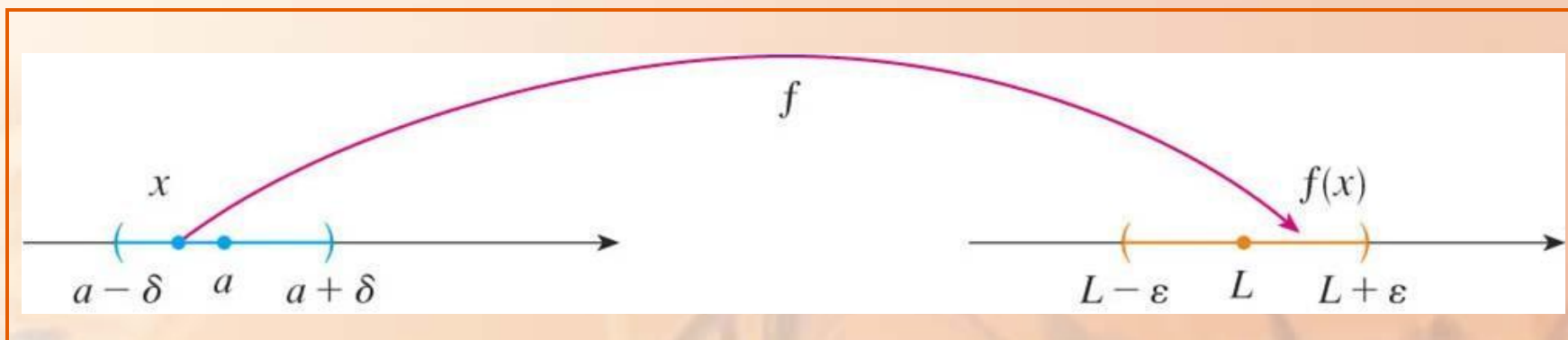
Granična vrednost funkcije

Funkcija se može predstaviti pomoću dijagrama kojim se podskup skupa \mathbb{R} preslikava u neki podskup skupa \mathbb{R} .



Granična vrednost funkcije

Definicija granične vrednosti nam govori da ako je dat bilo kakav mali interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ oko L , da se onda može pronaći interval $(a - \delta, a + \delta)$ oko a tako da f preslikava sve tačke iz $(a - \delta, a + \delta)$ (izuzev možda a) u interval $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

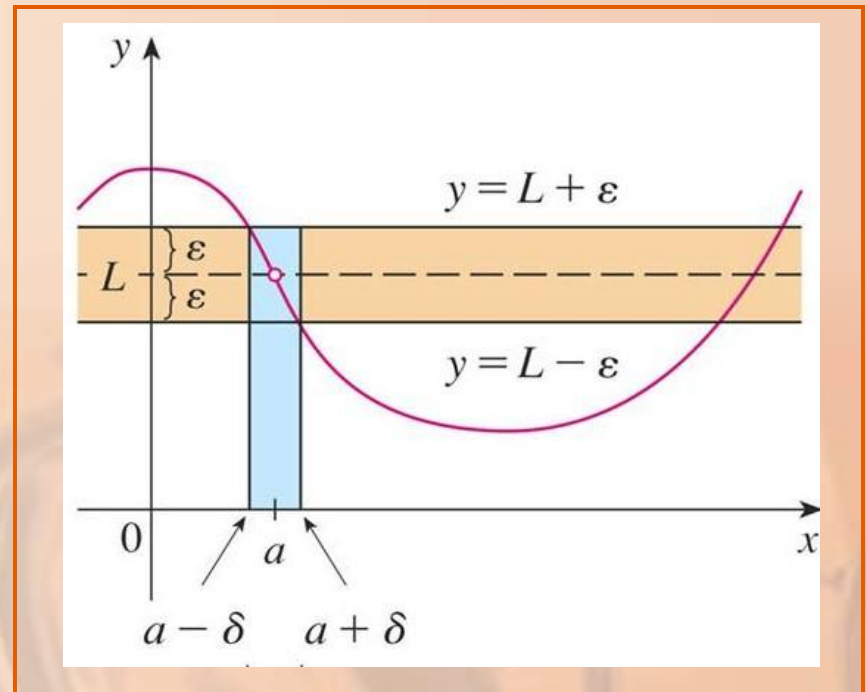


Granična vrednost funkcije

Ako je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, onda se može naći $\delta > 0$ takvo da, ako se ograničimo da se x nalazi u intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ i $x \neq a$, da se onda kriva $y = f(x)$ nalazi između pravih

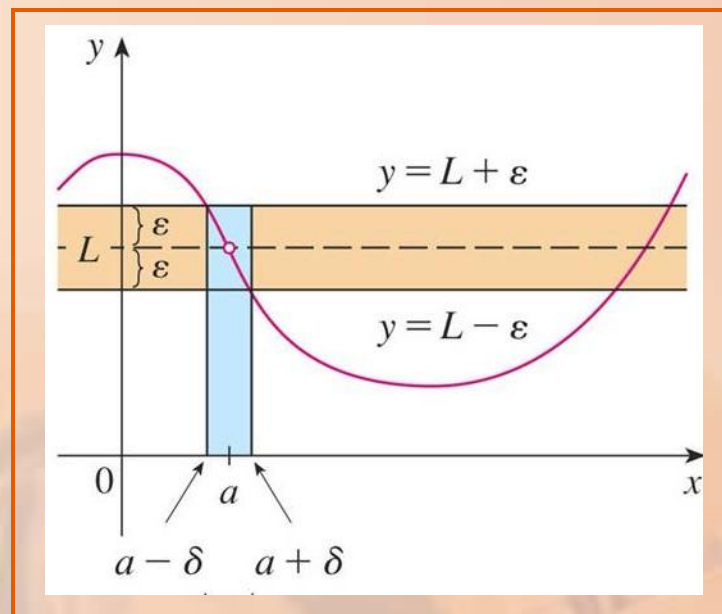
$$y = L - \varepsilon \quad \text{i}$$

$$y = L + \varepsilon$$



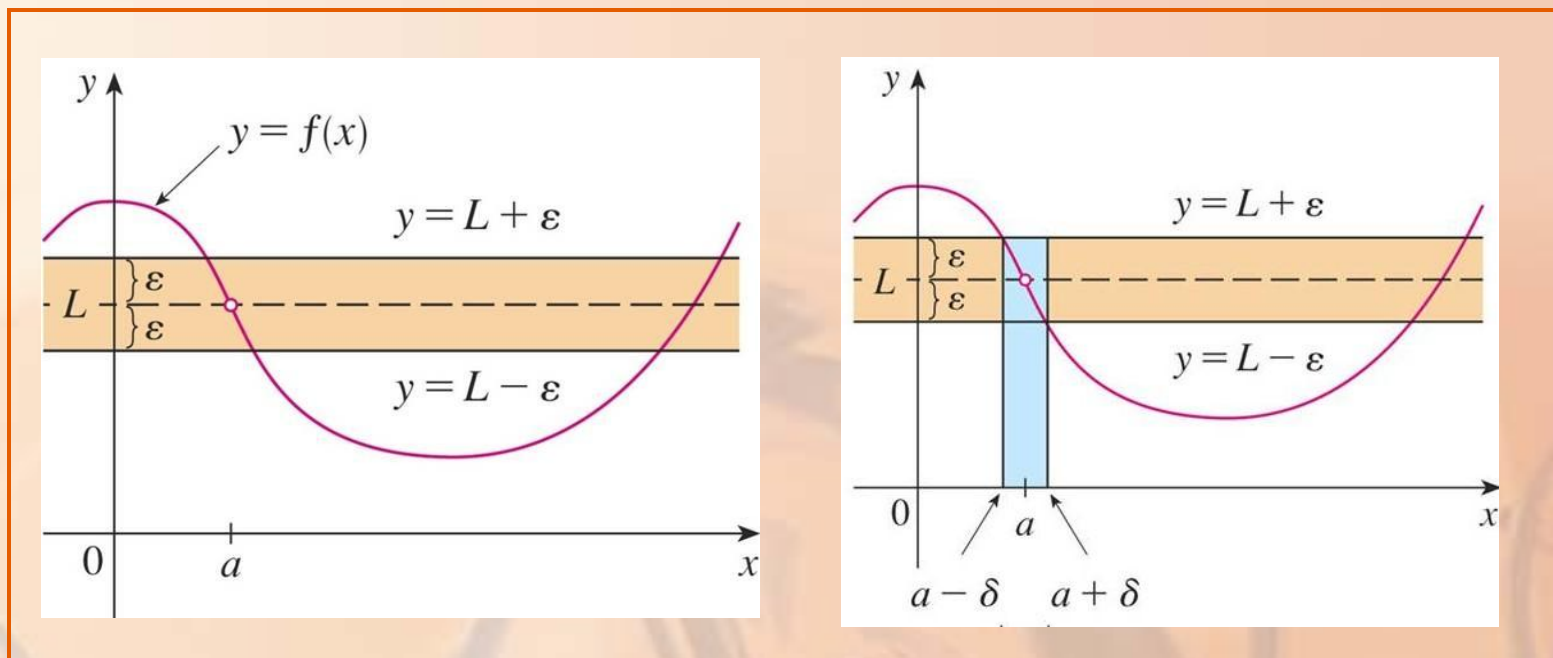
Granična vrednost funkcije

Može se videti da ako takvo δ može da se nađe, da će onda i svako manje δ takođe odgovarati.



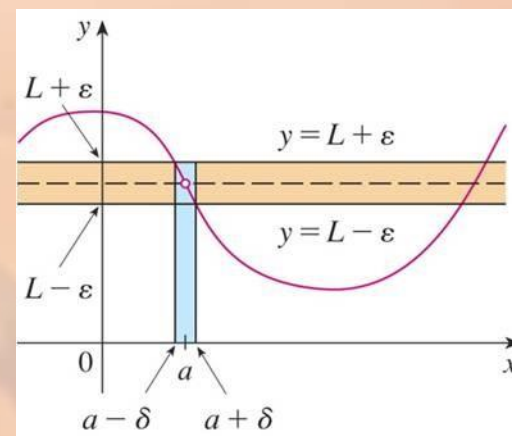
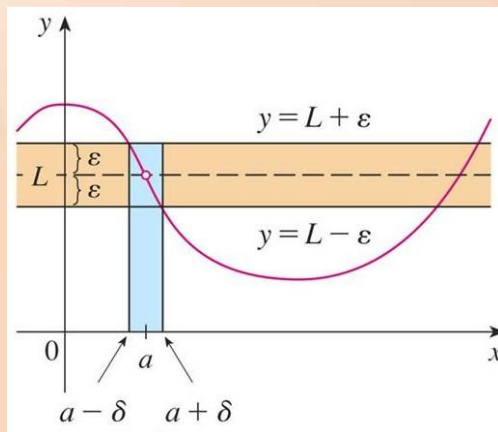
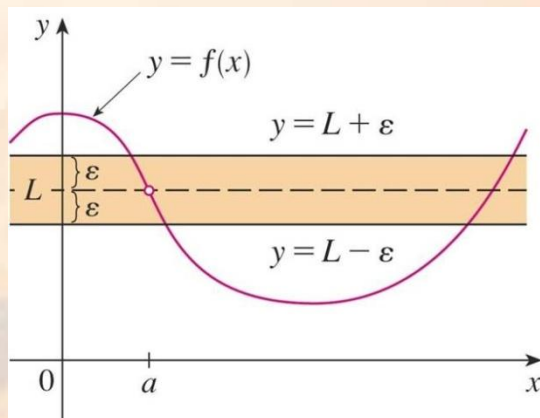
Granična vrednost funkcije

Treba naglasiti da je važno da proces ilustrovan na slikama mora da funkcioniše za bilo koji pozitivan broj ε , bez obzira koliko on mali bio!



Granična vrednost funkcije

Na trećoj slici se vidi da se može očekivati da za odabrano manje ε , i odgovarajuće δ bude manje.



Pokazati da je

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$$

Korak 1: naći potencijalno $\delta > 0$

Primer 2

- Neka je ε proizvoljan pozitivan broj.
- Treba da pronađemo takvo δ da iz $0 < |x - 3| < \delta$ sledi $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$
- Važi

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$$

Korak 1: naći potencijalno $\delta > 0$ Primer 2

- Tako da imamo da treba da iz $0 < |x - 3| < \delta$ sledi $4|x - 3| < \varepsilon$
- Tj. ako je $0 < |x - 3| < \delta$ da onda sledi $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{4}$
- Ovo nam sugeriše da treba uzeti $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$.

Sada treba pokazati da je to δ odgovarajuće.

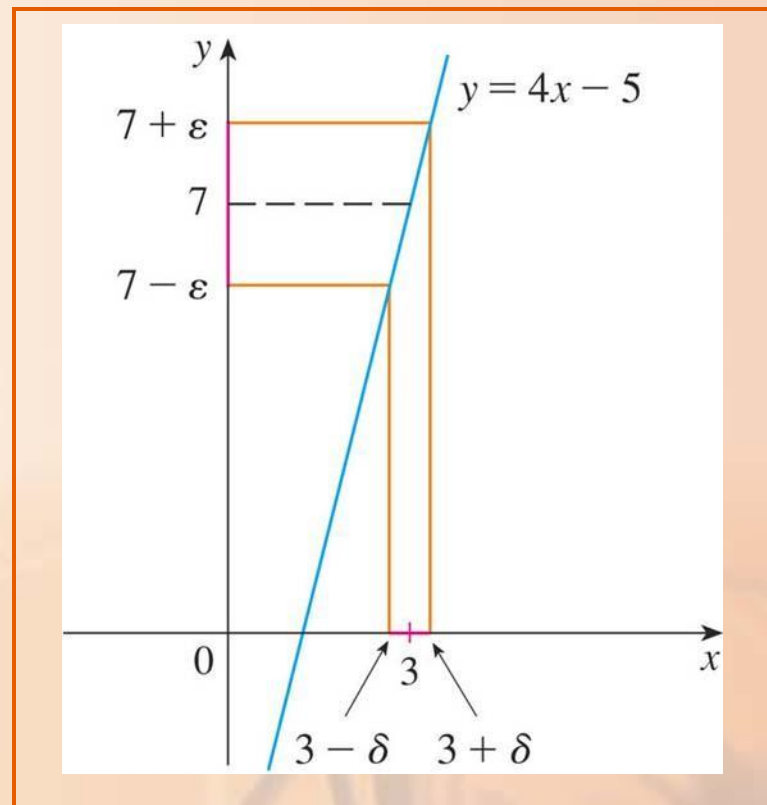
- Za dato $\varepsilon > 0$, odaberemo $\delta = \varepsilon/4$.
- Ako je $0 < |x - 3| < \delta$, onda sledi

$$|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = 4|x - 3| < 4\delta = 4\left(\frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon$$

- Tako da iz $0 < |x - 3| < \delta$ sledi $|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$
- Na osnovu definicije granične vrednosti sledi

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x - 5) = 7$$

Ovaj primer je ilustrovan na slici.



Funkcija ima u tački a levi limes, u oznaci

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji broj $\delta > 0$

takav da

$$\text{iz } a - \delta < x < a \text{ sledi } |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Definicija 3 se od Definicije 2 razlikuje samo u tome što se x nalazi u levoj okolini tačke a , tj. u intervalu $(a - \delta, a)$ a ne u $(a - \delta, a + \delta)$, $x \neq a$.

Funkcija ima u tački a desni limes, u

oznaci $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$

ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji broj $\delta > 0$
takav da

iz $a < x < a + \delta$ sledi $|f(x) - L| < \varepsilon$

Neka je funkcija f definisana na nekom otvorenom intervalu koji sadrži a , osim eventualno u a .

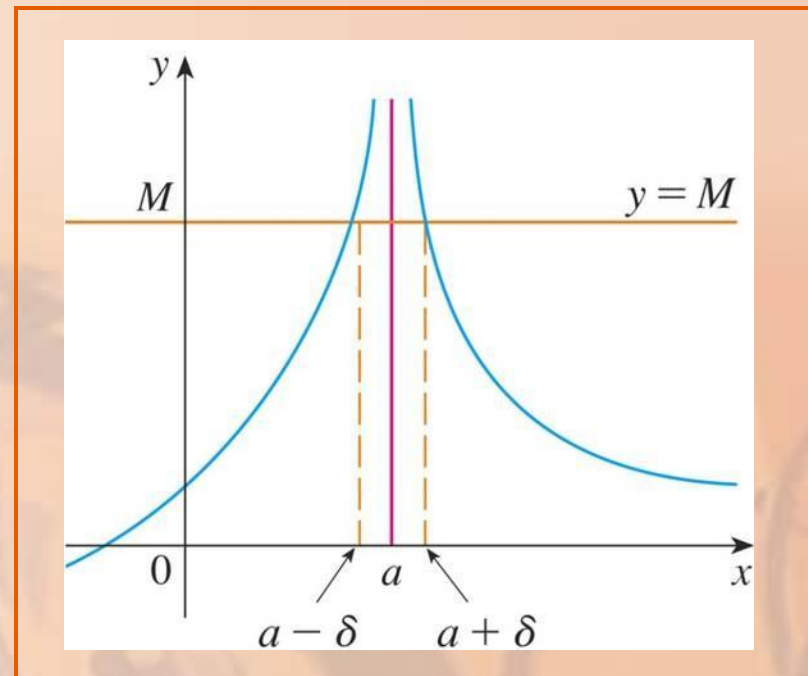
Tada, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ znači da za svaki pozitivan broj M , postoji pozitivan broj δ takav da iz

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{sledi} \quad f(x) > M$$

Beskonačan limes

Geometrijska ilustracija:

- Za proizvoljnu horizontalnu pravu $y = M$, može se naći broj $\delta > 0$ takav da, ako x pripada intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ i $x \neq a$, onda se kriva $y = f(x)$ nalazi iznad prave $y = M$.
- Vidi se da što je M veće, δ mora biti manje.



Pomoću definicije dokazati da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

- Neka je M dat pozitivan broj.
- Treba pronaći pozitivan broj δ takav da iz

$$0 < |x| < \delta \quad \text{sledi} \quad \frac{1}{x^2} > M$$

- Važi

$$\frac{1}{x^2} > M \Leftrightarrow x^2 < \frac{1}{M} \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

- Dakle, ako odaberemo $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ i $0 < |x| < \delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ onda sledi $\frac{1}{x^2} > M$.
- To pokazuje da $\frac{1}{x^2} \rightarrow \infty$ kada $x \rightarrow 0$.

Neka je funkcija f definisana na nekom otvorenom intervalu koji sadrži a , osim eventualno u a .

Tada, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ znači da za svaki negativan broj N , postoji pozitivan broj δ takav da iz

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{sledi} \quad f(x) < N$$

Beskonačan limes

Ova situacija je ilustrovana na slici.

