

Granična vrednost funkcije

Operacije sa graničnim vrednostima

Operacije sa graničnim vrednostima

Neka je c konstanta i neka granične vrednosti

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

postoje.

Operacije sa graničnim vrednostima

Tada važi:

$$1. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} [cf(x)] = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

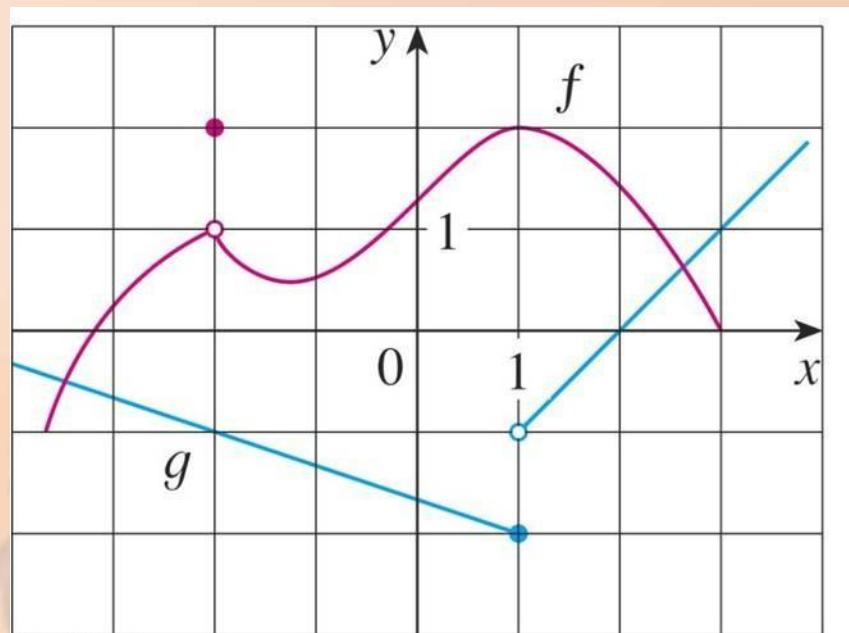
$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \text{ako je } \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Koristeći grafike funkcija f i g izračunati date granične vrednosti ako postoje.

a. $\lim_{x \rightarrow -2} [f(x) + 5g(x)]$

b. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$

c. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$

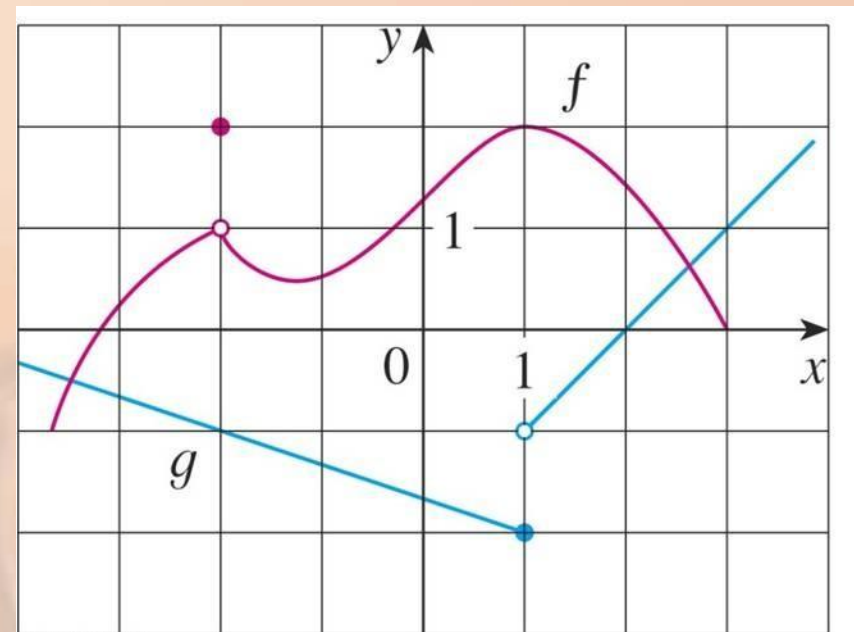


Na osnovu grafika se vidi da su

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -1.$$

- Tako da sledi:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -2} [f(x) + 5g(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} f(x) + \lim_{x \rightarrow -2} [5g(x)] \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} f(x) + 5 \lim_{x \rightarrow -2} [g(x)] \\ &= 1 + 5(-1) = -4 \end{aligned}$$



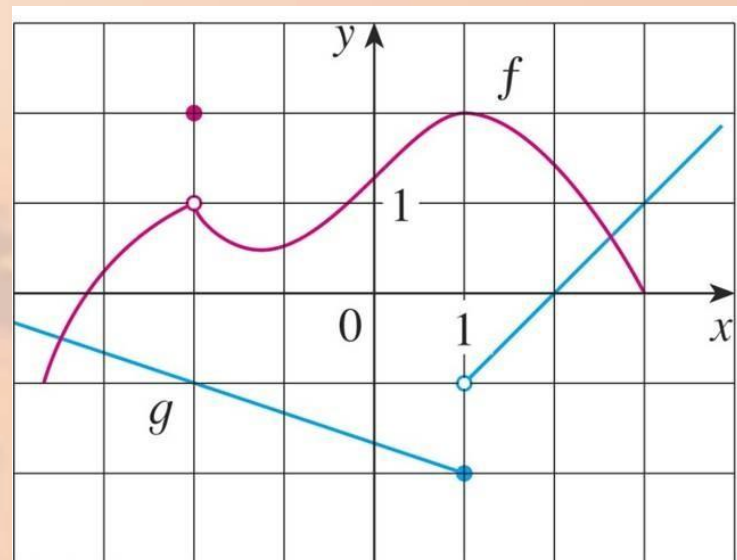
Vidimo da je $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

Međutim, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ ne postoji zato što su levi i desni limes različiti:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -1$$

- U ovom slučaju ne možemo koristiti pravilo za proizvod graničnih vrednosti.

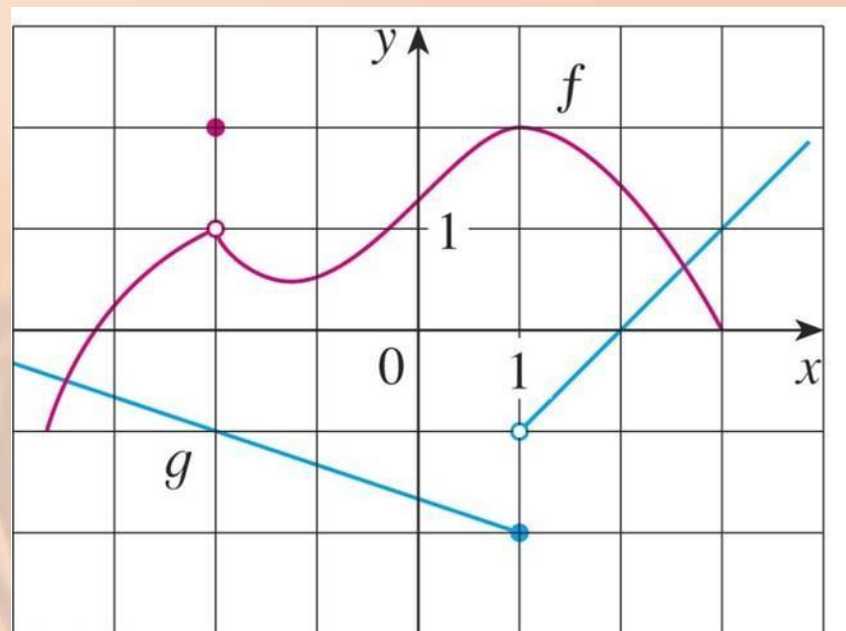


Ali možemo koristiti pravilo za proizvod za jednostrane limese:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-2) = -4 \quad \text{i}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x)g(x)] = 2 \cdot (-1) = -2$$

- Levi i desni limes nisu jednaki.
- Dakle, $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)g(x)]$ ne postoji.



Sa grafika se vidi da je $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \approx 1.4$ i

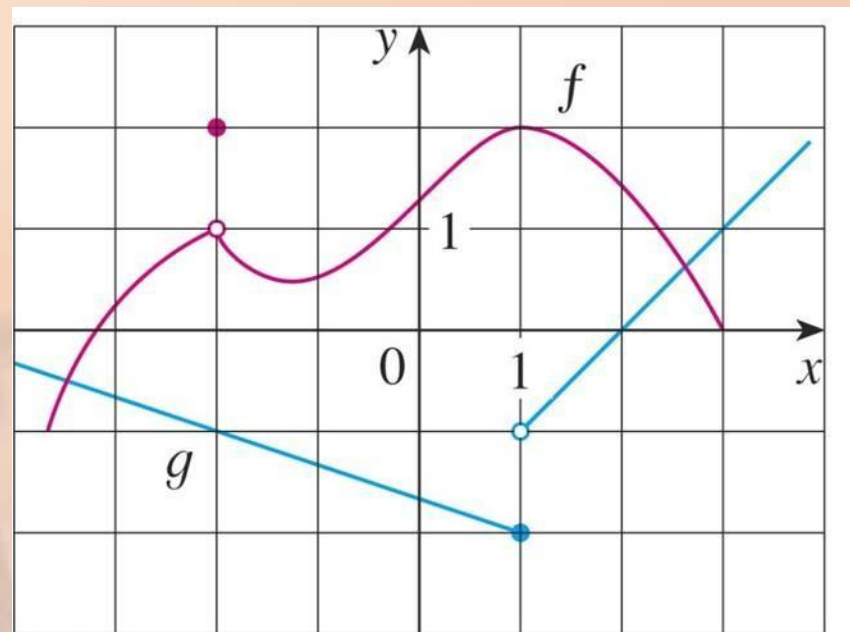
$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 0.$$

Kako je granična vrednost imenioca 0, ne može se koristiti pravilo za količnik.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

■ $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ ne postoji



Stepen

Ako se pravilo za proizvod graničnih vrednosti primeni uzastopno više puta za $f(x) = g(x)$, dobija se:

$$6. \lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n$$

gde je n prirodan broj.

Izdvajamo još dva specijalna, a očigledna slučaja:

$$7. \lim_{x \rightarrow a} c = c$$

$$8. \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Ako se pravilo za stepen primeni na funkciju $f(x) = x$ dobija se

$$9. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$$

gde je n prirodan broj.

Analogno važi i za koren:

$$10. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$$

- ako je n paran broj, onda se pretpostavlja da je $a \geq 0$.

Koren

U opštem slučaju, za koren važi:

$$11. \lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$$

gde je n prirodan broj.

- Ako je n paran broj, onda se pretpostavlja da je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq 0$$

Primer 2

Izračunati sledeće granične vrednosti obrazlažući svaki korak:

a. $\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4)$

b. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$

Primer 2a

$$\lim_{x \rightarrow 5} (2x^2 - 3x + 4)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 5} (2x^2) - \lim_{x \rightarrow 5} 3x + \lim_{x \rightarrow 5} 4 \quad (\text{pravila 2 i 1})$$

$$= 2 \lim_{x \rightarrow 5} x^2 - 3 \lim_{x \rightarrow 5} x + \lim_{x \rightarrow 5} 4 \quad (\text{pravilo 3})$$

$$= 2(5^2) - 3(5) + 4 \quad (\text{pravila 9, 8 i 7})$$

$$= 39$$

Primer 2b

Iako imamo količnik dve funkcije, pravilo za količnik se primenjuje tek na kraju.

Prvo moramo da utvrdimo da granična vrednost funkcije iz brojioca postoji, isto i za funkciju koja je u imeniocu i još da granična vrednost imenioca nije 0.

Primer 2b

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{5 - 3x}$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} (x^3 + 2x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -2} (5 - 3x)}$$

(pravilo 5)

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow -2} x^3 + 2 \lim_{x \rightarrow -2} x^2 - \lim_{x \rightarrow -2} 1}{\lim_{x \rightarrow -2} 5 - 3 \lim_{x \rightarrow -2} x}$$

(pravila 1, 2 i 3)

$$= \frac{(-2)^3 - 2(-2)^2 - 1}{5 - 3(-2)} = -\frac{1}{11}$$

(pravila 9, 8 i 7)

Napomena

Ako se uvede oznaka

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4,$$

onda je $f(5) = 39$.

- Drugim rečima, tačan odgovoru u Primeru 2a smo mogli dobiti i samo zamenjujući 5 umesto x .
- Slično, direktnom zamenom bismo dobili i tačan rezultat i u Primeru 2b.

Napomena

Funkcije iz prethodnog primera su polinom i racionalna funkcija.

- Ako je f polinom ili racionalna funkcija i **a se nalazi u *domenu* od f** , onda važi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Direktna zamena

Navedena osobina sledi na osnovu osobine **neprekidnosti** za date funkcije u a .

Ona takođe važi i za sve **osnovne elementarne funkcije na njihovim prirodnim domenima!**

Naći $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

- Neka je $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$.
- U ovom slučaju ne možemo naći graničnu vrednost funkcije jednostavnom zamenom $x = 1$ zato što $f(1)$ ne postoji. Ova funkcija nije definisana u 1.
- Ne možemo primeniti ni pravilo za količnik graničnih vrednosti jer je granična vrednost imenioca 0.
- U ovakvim situacijama se mora na neki način transformisati dati algebarski izraz.

Primer 3

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Napomena

U prethodnom primeru, limes smo odredili tako što smo funkciju $f(x) = (x^2 - 1)/(x - 1)$ zamenili sa jednostavnijom funkcijom $g(x) = x + 1$ koja ima istu graničnu vrednost.

- Ovaj postupak je validan jer je $f(x) = g(x)$ osim za $x = 1$, a kada se računa granična vrednost ove funkcije kada x teži ka 1, ne uzima se u razmatranje šta se dešava kada je x baš jednako 1.

Napomena

U opštem slučaju važi sledeće:

Ako je $f(x) = g(x)$ kada $x \neq a$, onda važi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

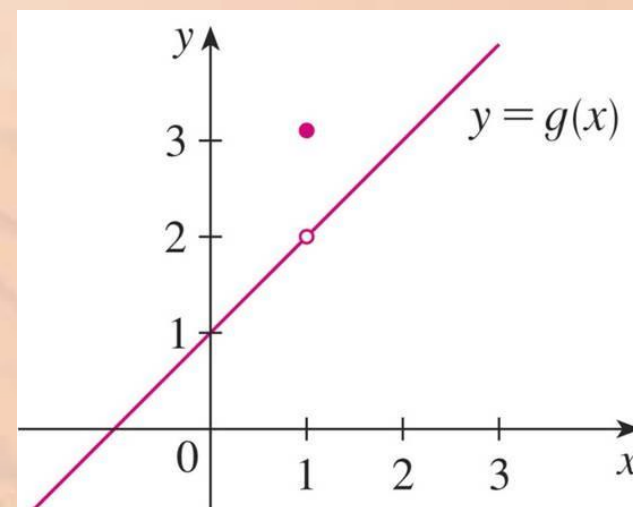
kada ove granične vrednosti postoje.

Primer 4

Naći $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ za $g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{za } x \neq 1 \\ \pi, & \text{za } x = 1 \end{cases}$.

- g je definisana u $x = 1$ i $g(1) = \pi$.
- Međutim, granična vrednost kada x teži ka 1 ovde ne zavisi od vrednosti funkcije za $x=1$.
- Kako je $g(x) = x + 1$ za $x \neq 1$, sledi

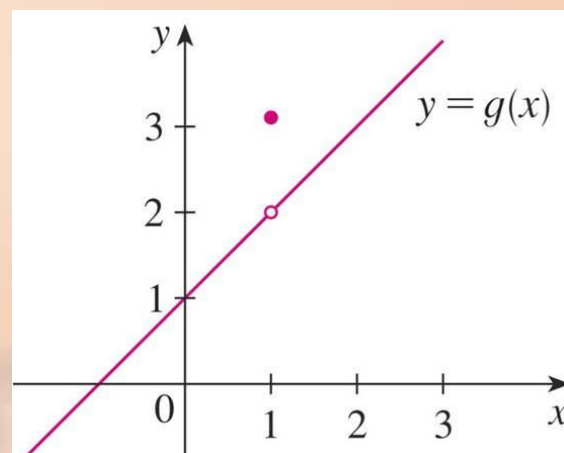
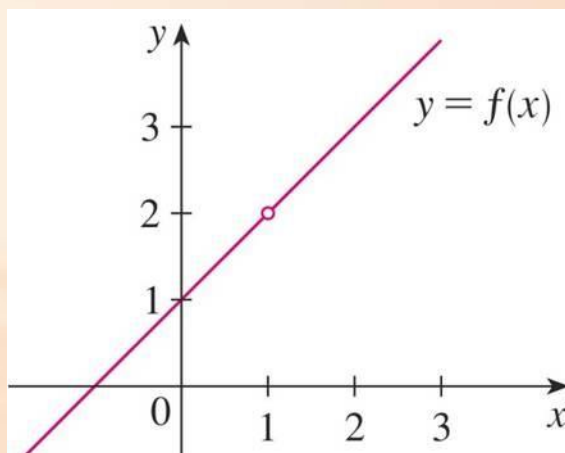
$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$



Napomena

Funkcije iz primera 3 i 4 su jednake svuda osim za $x = 1$.

Dakle, imaju istu graničnu vrednost kada x teži 1.



Primer 5

Naći $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2}$.

- U ovom slučaju ne može da se primeni pravilo za količnik graničnih vrednosti jer je granična vrednost funkcije iz imenioca jednaka 0.
- Ovde se primenjuje **racionalizacija** brojioca.

Primer 5

- Tako sledi:

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t^2 + 9} - 3}{t^2} \cdot \frac{\sqrt{t^2 + 9} + 3}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 9) - 9}{t^2 (\sqrt{t^2 + 9} + 3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 (\sqrt{t^2 + 9} + 3)} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 9} + 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lim_{t \rightarrow 0} (t^2 + 9)} + 3} = \frac{1}{3 + 3} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Primer 6

Pokazati $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

▪ Kako je $|x| = \begin{cases} x, & \text{za } x \geq 0 \\ -x, & \text{za } x < 0 \end{cases}$

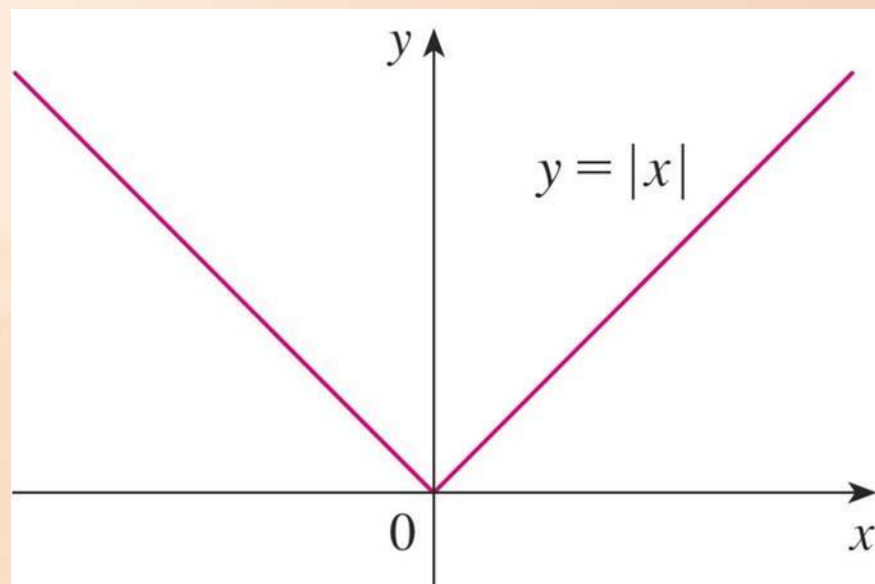
tj. $|x| = x$ za $x > 0$, sledi: $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$

a $|x| = -x$ za $x < 0$, imamo: $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$

▪ Dakle, važi $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$.

Primer 6

Zaključak bi se mogao doneti i na osnovu grafika funkcije.



Primer 7

Pokazati da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ ne postoji.

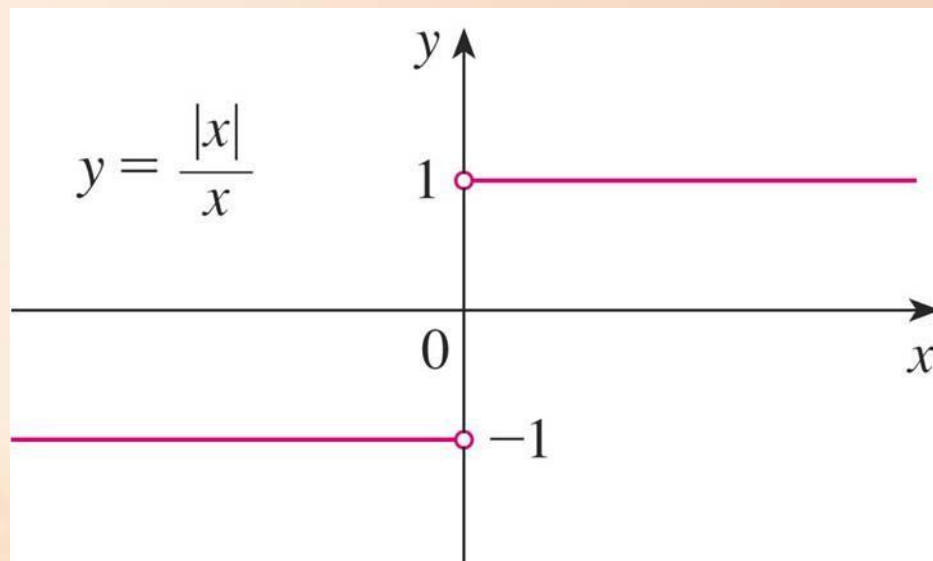
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

- Kako su levi i desni limes različiti, sledi da $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$ ne postoji.

Primer 7

Grafik funkcije $f(x) = |x| / x$ je dat na slici.



Primer 8

Ako je $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-4} & \text{za } x > 4 \\ 8-2x & \text{za } x < 4 \end{cases}$
odrediti da li $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ postoji.

- Kako je $f(x) = \sqrt{x-4}$ za $x > 4$, sledi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \sqrt{x-4} \\ &= \sqrt{4-4} = 0 \end{aligned}$$

- Kako je $f(x) = 8 - 2x$ za $x < 4$, sledi

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (8 - 2x) \\ &= 8 - 2 \cdot 4 = 0 \end{aligned}$$

Primer 8

- Levi i desni limesi su jednaki.
- Sledi da traženi limes postoji i

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 0.$$

