

The background of the slide features a pair of glasses with a metal frame and clear lenses, positioned over a clock face with Roman numerals. The entire scene is rendered in a soft, warm, orange-toned aesthetic. A solid orange horizontal bar is centered across the middle of the image, containing the text 'IZVOD FUNKCIJE' in white, bold, uppercase letters.

IZVOD FUNKCIJE

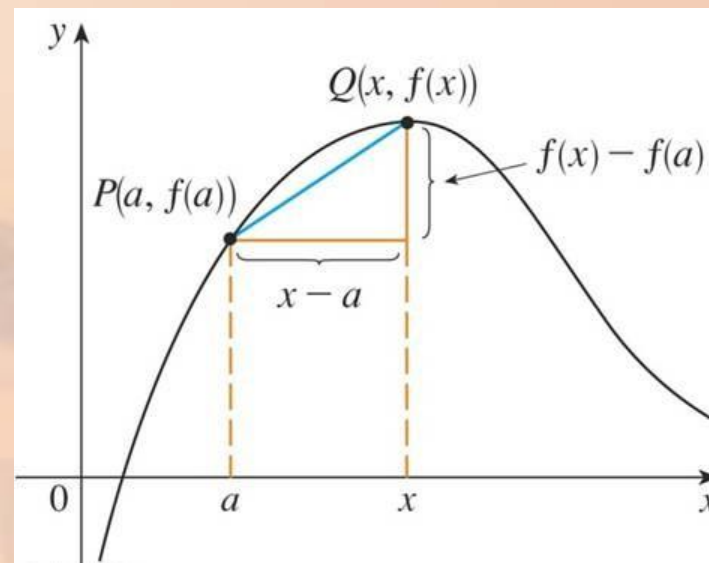
Granična vrednost funkcije i izvod

Izvod funkcije i brzina promene

JEDNAČINA TANGENTE

Ako je kriva C data sa $y = f(x)$ i ako želimo da nađemo tangentu na C u tački $P(a, f(a))$, onda ćemo posmatrati neku susednu tačku $Q(x, f(x))$, gde je $x \neq a$, i odrediti nagib, tj. koeficijent pravca sečice PQ :

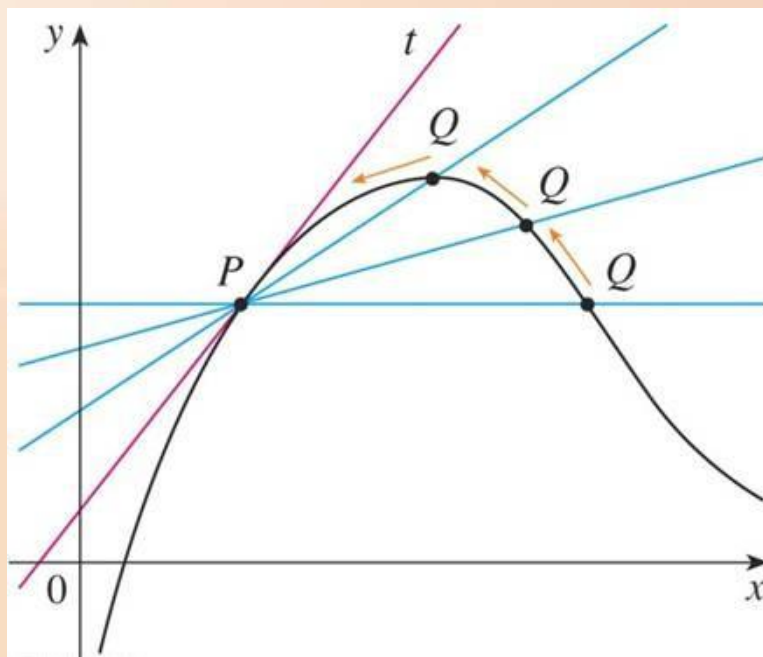
$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$



JEDNAČINA TANGENTE

Sada ćemo pustiti da se Q približava ka P duž krive C tako što se x približava a .

- Ako se m_{PQ} približava broju m , onda je tangenta t prava koja prolazi kroz P sa nagibom m .
- Dakle, tangenta se dobija kao granični položaj sečice PQ kada se tačka Q približava tački P .



Tangenta na krivu $y = f(x)$ u tački $P(a, f(a))$ je prava kroz tačku P sa koeficijentom pravca

$$(1) \quad m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ako ova granična vrednost postoji.

Napisati jednačinu tangente na parabolu $y = x^2$ u tački $P(1, 1)$.

- U ovom primeru je $a = 1$, a $f(x) = x^2$.
- Dakle, koeficijent pravca je dat sa:

$$m = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

Jednačina tangente u tački (1, 1) je:

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{tj.} \quad y = 2x - 1$$

JEDNAČINA TANGENTE

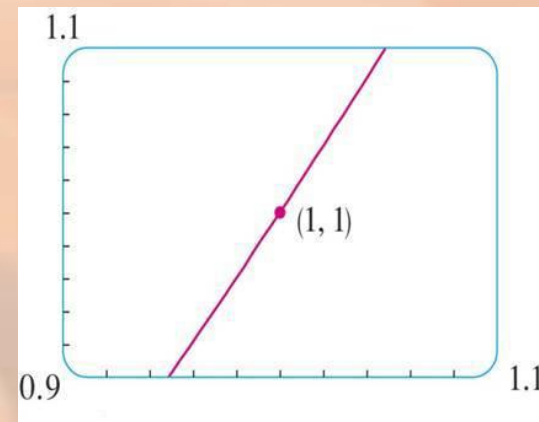
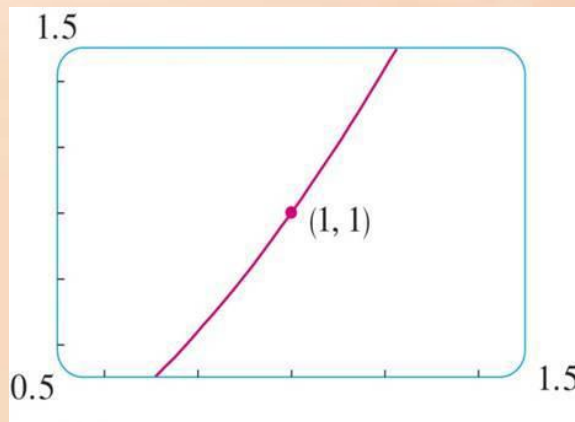
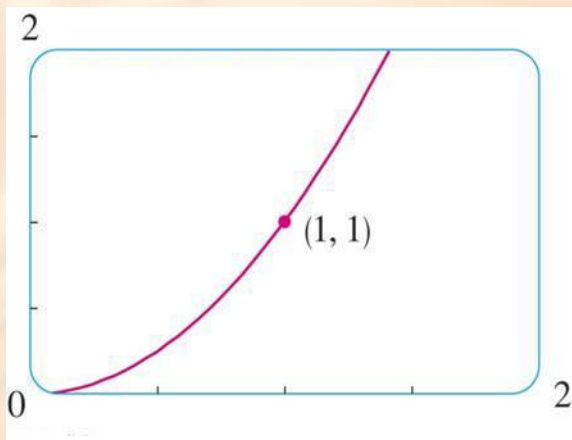
Za nagib tangente (njen koeficijent pravca) na krivu u tački se još kaže da je **nagib krive u tački**.

- To je zbog toga jer što se više grafik funkcije zumira oko te tačke, kriva sve više liči na pravu liniju.

JEDNAČINA TANGENTE

Na slikama je ovo ilustrovano za funkciju $y = x^2$ iz Primera 1.

- Što više zumiramo, parabola sve više liči na pravu.
- Drugim rečima, kriva se sve manje razlikuje od svoje tangente.



JEDNAČINA TANGENTE

Koeficijent pravca tangente se može izraziti i na način koji je jednostavniji za dalji rad.

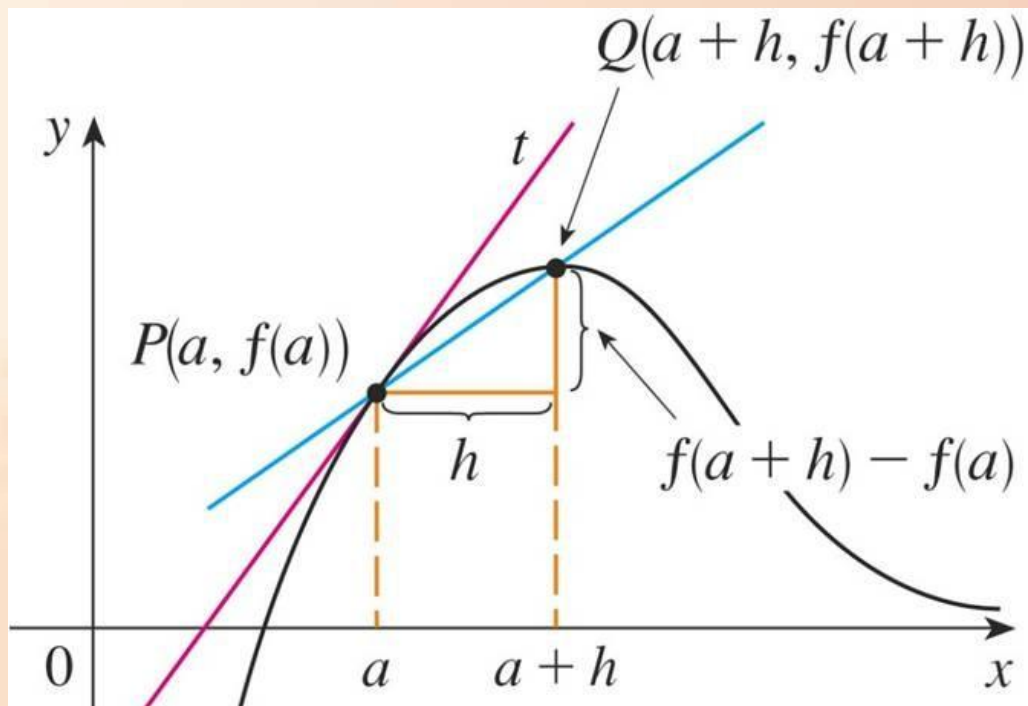
Ako se uvede oznaka $h = x - a$, onda sledi $x = a + h$ i nagib sečice u ovim oznakama je

$$m_{PQ} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

JEDNAČINA TANGENTE

Na slici je ilustrovan slučaj kada je $h > 0$ i Q se nalazi desno od P .

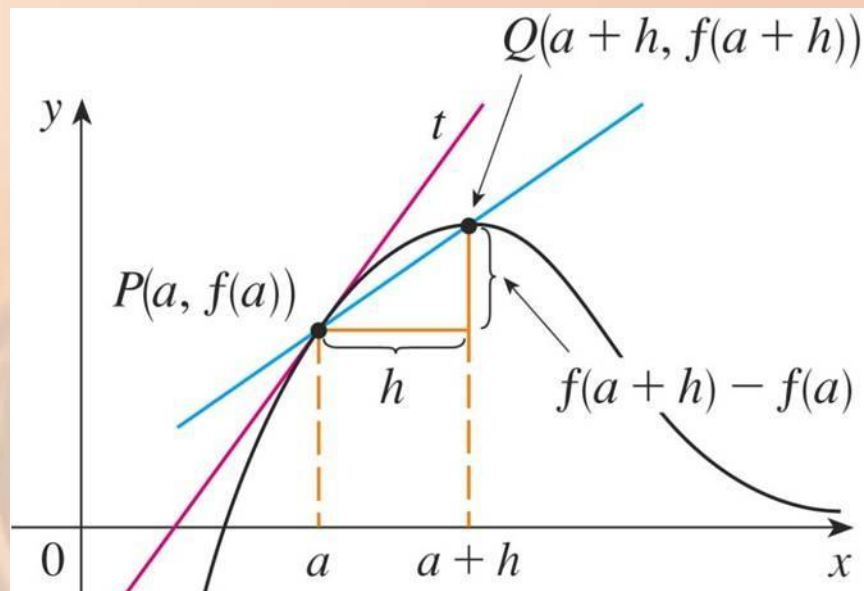
- Za $h < 0$, tačka Q bi bila levo od tačke P .



Treba uočiti da kad x teži ka a , h teži 0 (jer je $h = x - a$).

- Dakle, izraz za nagib tangente iz Definicije 1 u ovim oznakama je:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad (2)$$



Napisati jednačinu tangente na hiperbolu $y = 3/x$ u tački (3, 1).

- $f(x) = 3/x$
- Koeficijent pravca tangente u tački (3, 1) je:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{3+h} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3 - (3+h)}{h(3+h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h(3+h)} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{3+h} = -\frac{1}{3}$$

JEDNAČINA TANGENTE

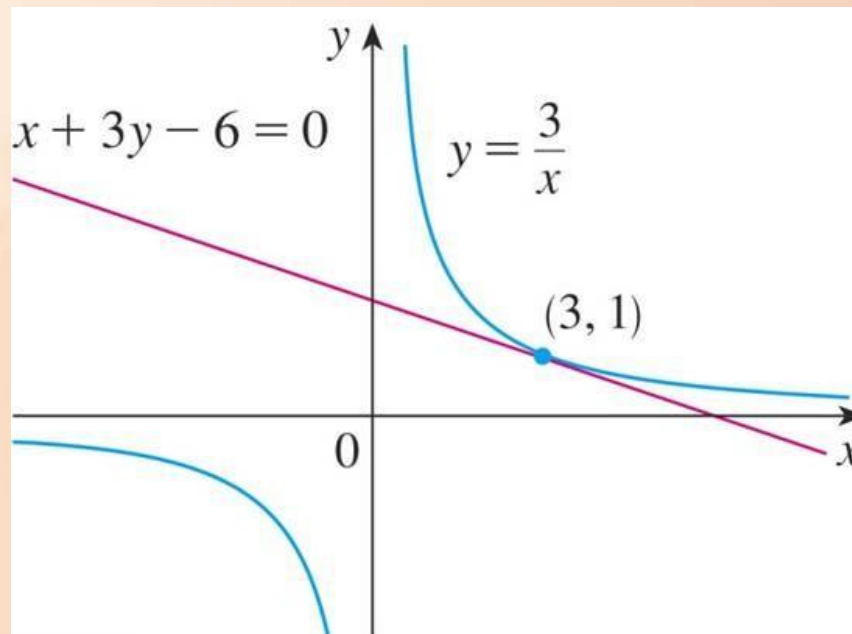
Primer 2

Jednačina tangente na datu krivu u tački

$(3, 1)$ je
$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

tj.
$$x + 3y - 6 = 0$$

- Hiperbola i njena tangenta u datoj tački su na slici:



BRZINA

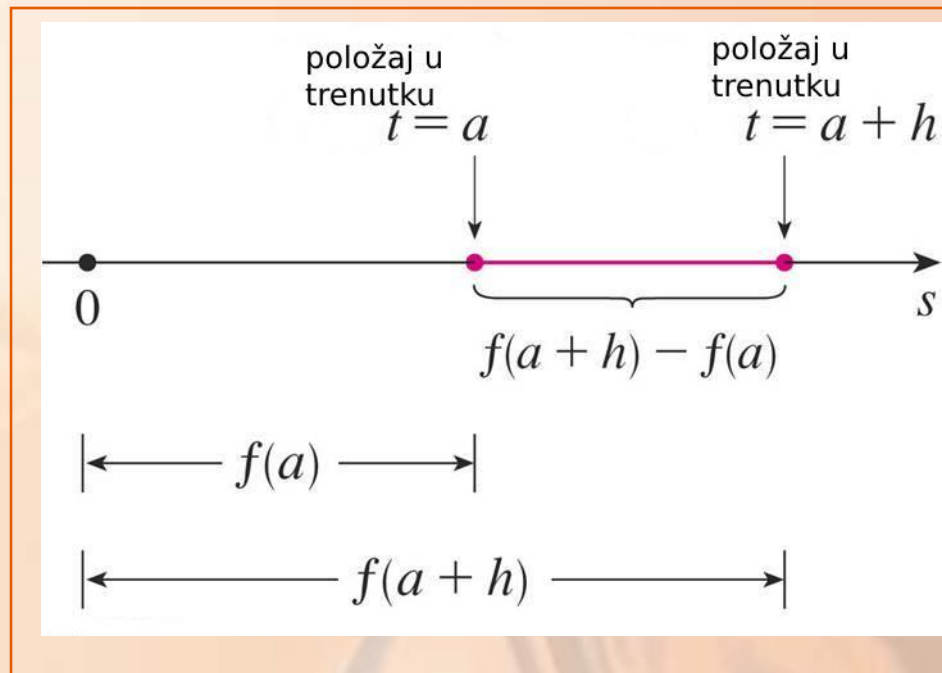
Pretpostavimo da se neki objekat kreće pravolinijski putanjom koja je data sa

$$s = f(t)$$

- s je put koji objekat prelazi za vreme t .
- Funkcija f opisuje kretanje, tj. poziciju (položaj) objekta.

BRZINA

U intervalu od $t = a$ do $t = a + h$,
položaj objekta se promeni za
 $f(a + h) - f(a)$

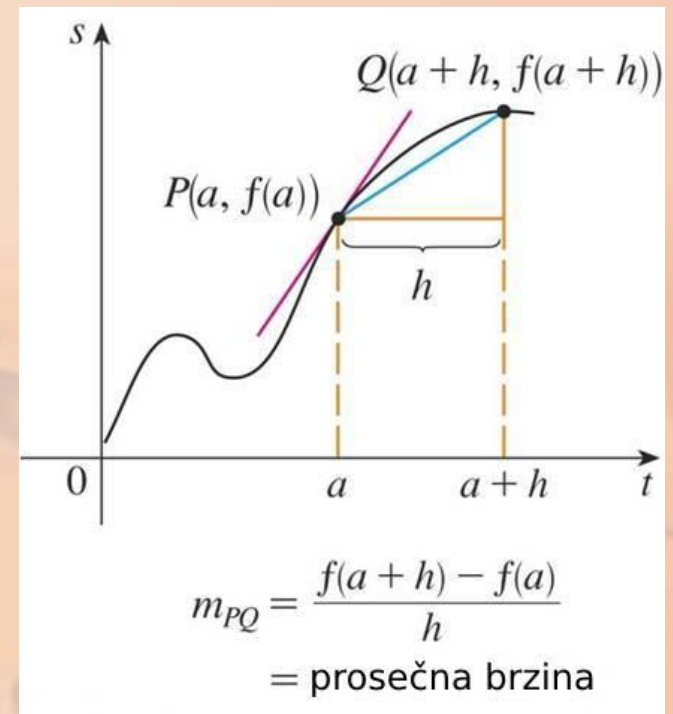
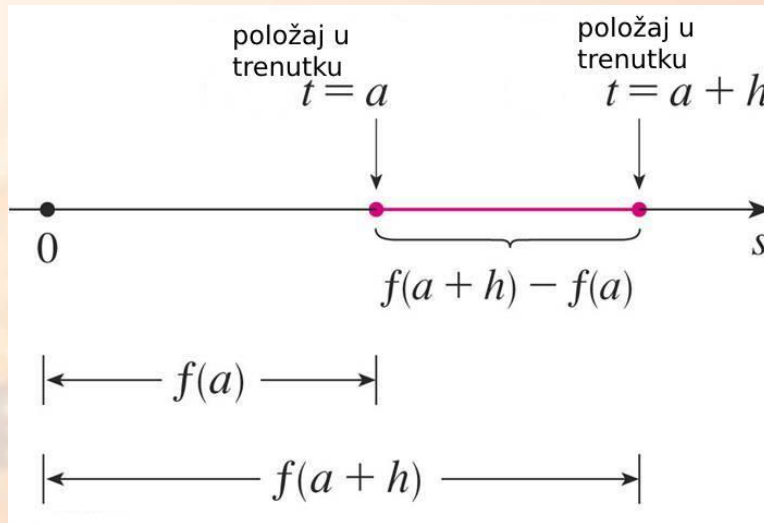


BRZINA

Prosečna brzina na tom intervalu je data sa

$$\text{prosečna brzina} = \frac{\text{pređeni put}}{\text{vreme}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Treba uočiti da je ovaj izraz takođe i nagib sečice PQ na drugoj slici.



BRZINA

Zamislimo sada da se prosečna brzina računa na sve kraćem i kraćem vremenskom intervalu $[a, a + h]$.

- Drugim rečima, h teži 0.

Brzina $v(a)$ u trenutku $t = a$ (trenutna brzina) se definiše kao granična vrednost prosečnih brzina:

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- Što znači da je brzina u trenutku $t = a$ jednaka nagibu tangente u tački P .

Neka je lopta puštena da pada sa vidikovca tornja na Avali koji se nalazi na visini od 122 m.

- a. Koju brzinu će imati lopta posle 5 sekundi?
- b. Kojom brzinom će se lopta kretati kada padne na zemlju?



Brzina treba da se izračuna u trenutku $t = 5$ i kada lopta udari u zemlju.

- Zato ćemo izračunati brzinu u proizvoljnom trenutku $t = a$.

Koristeći funkciju $s = f(t) = 4.9t^2$, imamo:

$$v(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(a+h)^2 - 4.9a^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(a^2 + 2ah + h^2 - a^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4.9(2ah + h^2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 4.9(2a + h) = 9.8a$$

Brizina u petoj sekundi je:

$$v(5) = (9.8)(5) = 49 \text{ m/s}$$

Kako se vidikovac nalazi na visini od 122 m lopta će pasti na zemlju u trenutku t_1 kada $s(t_1) = 450$, što je $4.9t_1^2 = 122$

- $t_1^2 = \frac{122}{4.9}$ tj. $t_1 = \sqrt{\frac{122}{4.9}} \approx 4.99$

- Brzina lopte u tom trenutku je

$$v(t_1) = 9.8t_1 = 9.8 \sqrt{\frac{122}{4.9}} \approx 48.9 \text{ m/s}$$

IZVOD U TAČKI

Videli smo da se ista granična vrednost pojavljuje i kod nagiba tangente na krivu i kod računanja trenutne brzine nekog objekta.

IZVOD U TAČKI

Granična vrednost ovog tipa

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

se pojavljuje uvek i kada se računa brzina promene u prirodnim naukama ili inženjerstvu — kao npr. brzina promene kod hemijskih reakcija ili krajnje cene u ekonomiji.

- Pošto se ovakve granične vrednosti pojavljuju veoma često, dobile su posebno ime i oznaku.

Izvod funkcije f (definisane na otvorenom intervalu I) u tački $a \in I$, u oznaci $f'(a)$, je dat sa

$$(3) \quad f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

ako ova granična vrednost postoji.

Ako se vratimo na oznake $x = a + h$, onda je $h = x - a$ i imamo da h teži 0 akko x teži a .

Tako da se može koristiti i alternativna formulacija izvoda u tački a

$$(4) \quad f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ako ova granična vrednost postoji.

Naći izvod funkcije $f(x) = x^2 - 8x + 9$ u tački a .

- Na osnovu Definicije 4, sledi

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a + 9}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h - 8) \\ &= 2a - 8 \end{aligned}$$

JEDNAČINA TANGENTE

Tangentu na krivu $y = f(x)$ u tački $P(a, f(a))$ smo definisali kao pravu koja prolazi kroz P sa koeficijentom pravca m koji je dat sa (1) ili (2).

Kako je na osnovu Definicije 4, m isto što i izvod $f'(a)$, možemo formulirati sledeće:

- Tangenta na $y = f(x)$ u tački $(a, f(a))$ je prava kroz $(a, f(a))$ čiji je koeficijent pravca $f'(a)$ (izvod funkcije f u a).

JEDNAČINA TANGENTE

Jednačina tangente na krivu $y = f(x)$ u tački $(a, f(a))$ je data sa:

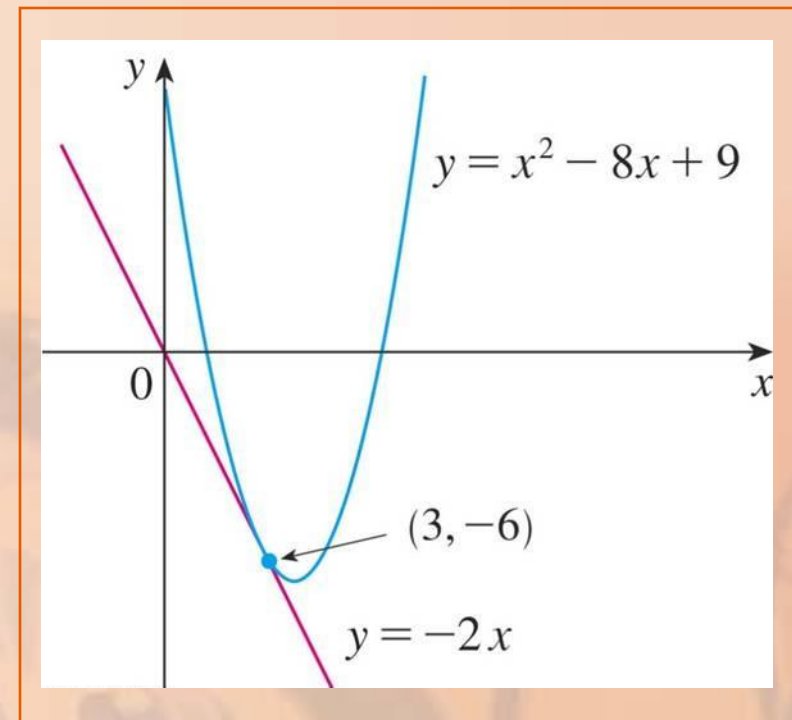
$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Naći jednačinu tangente na parabolu $y = x^2 - 8x + 9$ u tački $(3, -6)$.

- Na osnovu Primera 4, znamo da je izvod funkcije $f(x) = x^2 - 8x + 9$ u tački a $f'(a) = 2a - 8$
- Na osnovu toga sledi da je nagib tangente u $(3, -6)$: $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$.

- Dakle, jednačina tangente je:

$$y - (-6) = (-2)(x - 3) \quad \text{tj.} \quad y = -2x$$



BRZINA PROMENE

Pretpostavimo da je y veličina koja zavisi od druge veličine x , tj. da je

y funkcija od x : $y = f(x)$

- Kada se x promeni sa x_1 na x_2 , onda se promena po x (priraštaj po x) označava sa: $\Delta x = x_2 - x_1$
- Odgovarajuća promena po y se zove priraštaj zavisno promenljive i označava sa:

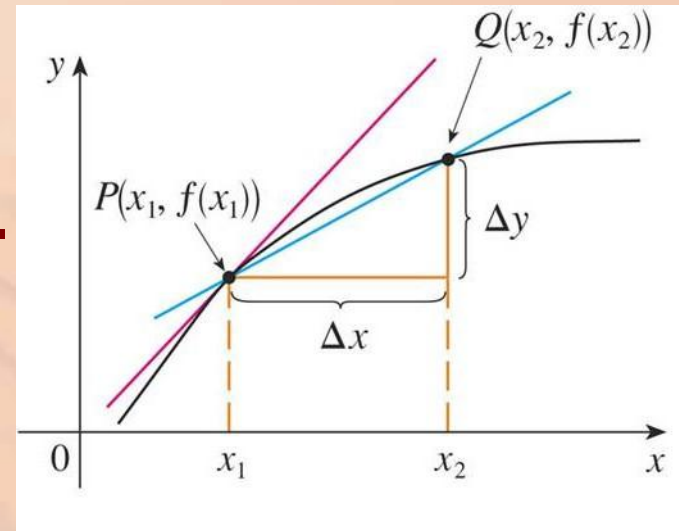
$$\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$$

BRZINA PROMENE

Diferencni količnik $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

se zove **prosečna brzina promene y**
u odnosu na x na intervalu

$[x_1, x_2]$ i njegova
geometrijska interpretacija
je nagib sečice PQ (na slici).



BRZINA PROMENE

Razmatra se prosečna brzina promene na sve manjem i manjem intervalu, kada se x_2 približava x_1 , tj. kada Δx teži 0.

- Granična vrednost prosečne brzine promene se zove (trenutna) brzina promene y u odnosu na x u $x = x_1$.

BRZINA PROMENE

Trenutna brzina promene =

$$(5) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- Ova granična vrednost je $f'(x_1)$

BRZINA PROMENE

Jedna interpretacija $f'(a)$ je koeficijent pravca (nagib) tangente na krivu $y = f(x)$ u $x = a$.

Sada imamo još jednu interpretaciju.

Izvod funkcije $f'(a)$ je trenutna brzina promene $y = f(x)$ u odnosu na x kada je $x = a$.

BRZINA PROMENE

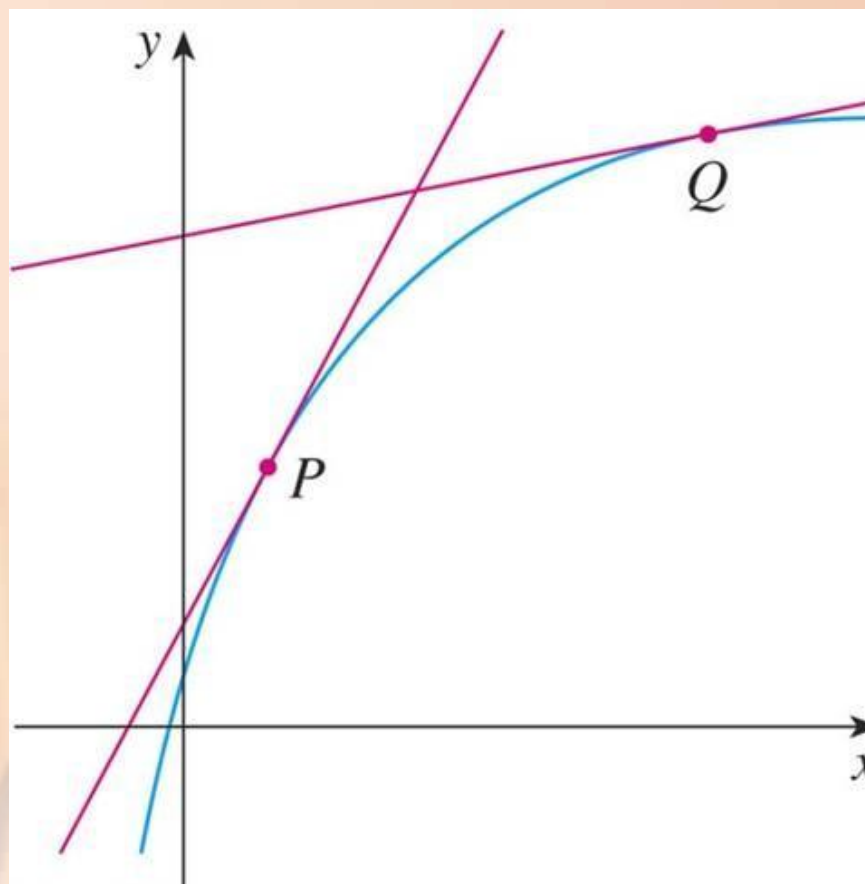
Te dve interpretacije povezati se mogu povezati:

Ako se nacрта grafik funkcije $y = f(x)$, onda je trenutna brzina promene jednaka nagibu tangente na krivu u tački $x = a$.

BRZINA PROMENE

Ovo znači da:

- kada izvod ima veliku vrednost (tj. kada je nagib krive veliki, ona je strma, kao u tački P na slici), vrednosti y se brzo menjaju.
- kada izvod ima malu vrednost, kriva je relativno ravna i vrednosti y se sporo menjaju.



BRZINA PROMENE

Ako je $s = f(t)$ funkcija položaja objekta koji se pravolinijski kreće, onda je $f'(a)$ brzina promene položaja s u odnosu na vreme t .

- $f'(a)$ je brzina objekta u trenutku $t = a$.

BRZINA PROMENE

U sledećem primeru, procenićemo brzinu promene nacionalnog duga u odnosu na vreme.

- Funkcija nije data formulom već tabelarno.

Neka je $D(t)$ nacionalni dug SAD, gde je t vreme.

U tabeli su date aproksimativne vrednosti ove funkcije u milijardama dolara, od 1980 do 2000.

Oceniti i interpretirati vrednost $D'(1990)$.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2

Izvod $D'(1990)$ je brzina promene funkcije D u odnosu na t za $t = 1990$, što je brzina rasta nacionalnog duga u 1990. godini.

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2

Na osnovu (5), $D'(1990) = \lim_{t \rightarrow 1990} \frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$

Vrednosti ovog diferencnog količnika su date u tabeli:

t	$\frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09

t	$D(t)$
1980	930.2
1985	1945.9
1990	3233.3
1995	4974.0
2000	5674.2

Iz tabele se vidi da se $D'(1990)$ nalazi negde između 257.48 i 348.14 milijardi dolara godišnje.

- U obzir će se uzeti pretpostavka da se nisu desile velike fluktuacije duga između 1980. i 2000. godine.

t	$\frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09

Vrednost brzine rasta nacionalnog duga u 1990. godini se može proceniti sa aritmetičkom sredinom ova dva broja – $D'(1990) \approx 303$ milijardi dolara.

t	$\frac{D(t) - D(1990)}{t - 1990}$
1980	230.31
1985	257.48
1995	348.14
2000	244.09

Drugi metod bi na primer mogao da bude crtanje grafika ove funkcije i procenjivanje nagiba tangente za $t = 1990$.

BRZINA PROMENE

U Primerima 3 i 6 smo videli neke specifične primere brzine promene:

- Brzina nekog objekta je brzina promene njegovog položaja tokom vremena.
- Brzina rasta nacionalnog duga tokom vremena je podatak koji je bitan u ekonomiji.

BRZINA PROMENE

Još neki primeri:

- U fizici, snaga je brzina promene rada u odnosu na vreme.
- U hemiji se brzina hemijske reakcije definiše kao brzina promene koncentracije reaktanta u odnosu na vreme.
- U biologiji je npr. bitna brzina rasta populacije kolonije bakterija tokom vremena.

BRZINA PROMENE

Izračunavanje brzine promene se pojavljuje i bitno je u svim prirodnim naukama, inženjerstvu, pa čak i društvenim naukama.

Svaka od navedenih brzina promene je zapravo izvod funkcije i može se interpretirati kao nagib tangente.

- Ova činjenica povećava značaj rešavanja problema traženja tangente na krivu.

BRZINA PROMENE

Dakle, kada se rešava problem koji zahteva traženje tangente na krivu, u stvari se ne rešava samo taj geometrijski problem.

- Implicitno se rešava veliki broj raznih problema u kojima je potrebno naći brzini promene neke veličine.