

IZVODNA FUNKCIJA



Ako u definiciji izvoda u tački a

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a zamenimo promenljivom x , dobijamo:

$$(1) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

gde je sa h označen priraštaj nezavisno promenljive.

IZVODNA FUNKCIJA



- Za bilo koji broj x za koji ova granična vrednost postoji, broju x se dodeljuje broj $f'(x)$.
 - f' je nova funkcija koja se **zove izvodna funkcija** za funkciju f i definisana je sa (1)
 - Kao što smo već videli, vrednost funkcije f' u x , tj. $f'(x)$, se može geometrijski interpretirati kao nagib tangente na grafik funkcije f tački $(x, f(x))$.

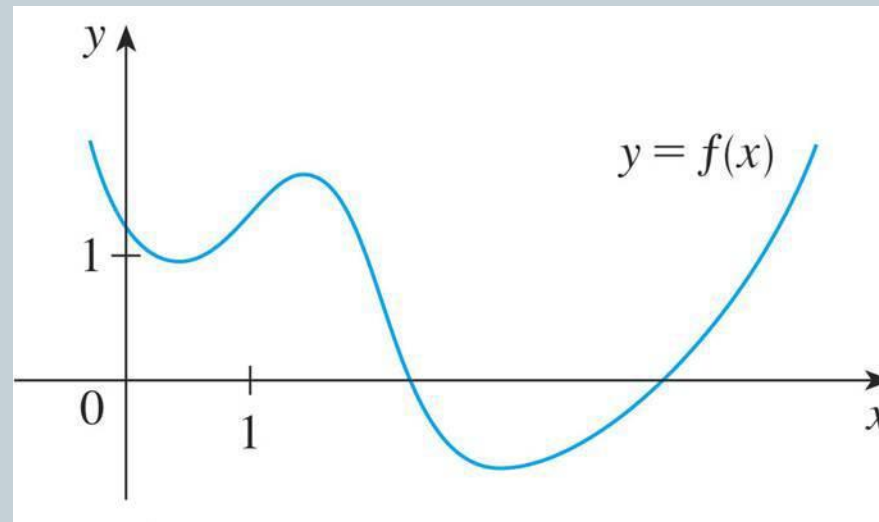
IZVODNA FUNKCIJA



- Funkcija f' se zove izvod funkcije f (ili izvodna funkcija) jer je ona 'izvedena' od/iz f graničnim procesom (1).
- Domen od f' je skup $\{x | f'(x) \text{ postoji}\}$ i može biti manji od domena funkcije f .



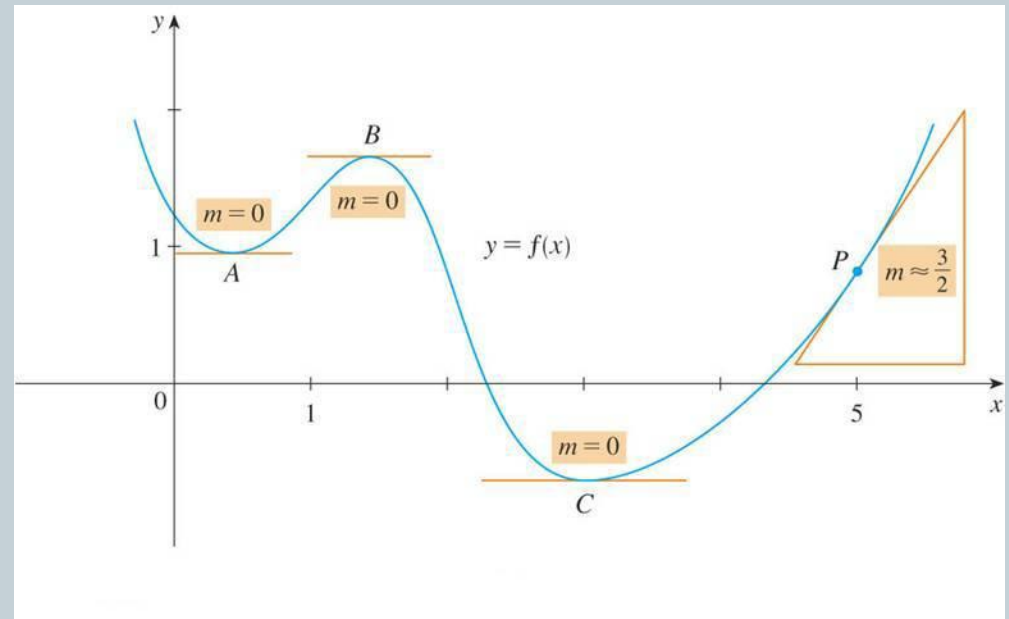
- Grafik funkcije f je dat na slici.
- Sada ćemo izložiti ideju kako se pomoću njega može skicirati grafik izvodne funkcije f' .





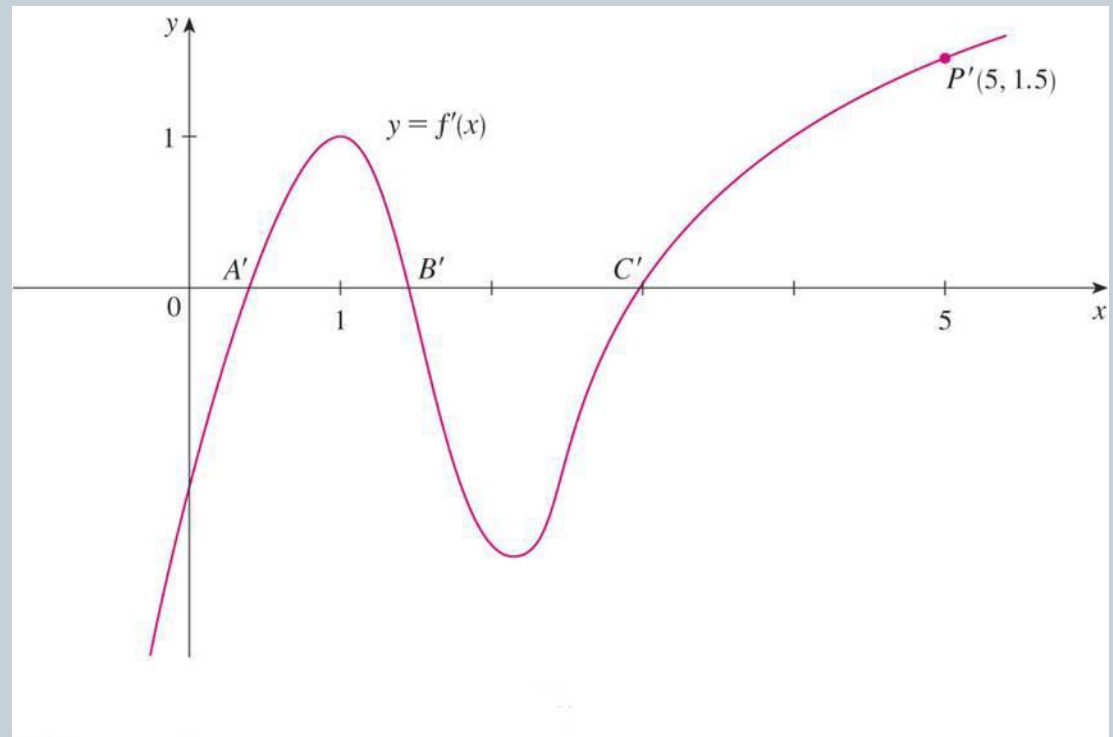
- Vrednost izvoda u bilo kojoj tački x se može proceniti crtajući tangentu u tački $(x, f(x))$ i procenjujući njen nagib.
- Tako se dobija tačka $(x, f'(x))$ koja pripada grafiku izvodne funkcije. Ovo se može uraditi u svim tačkama u kojima je izvod definisan.

- Na primer, za $x = 5$, nacрта se tangenta u tački P grafika i procenjuje da je njen nagib oko $\frac{3}{2}$ (posmatrajući pravougli trougao na donjoj slici i procenjujući tangens ugla koji tangenta zaklapa sa x osom), tako da je $f'(5) \approx 1.5$
 - Ovo omogućava da se nacрта tačka $P'(5, 1.5)$ na grafiku funkcije f .

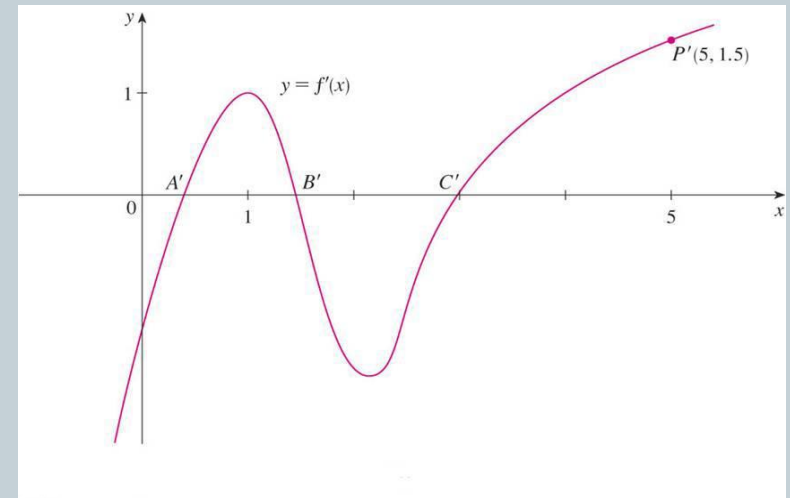
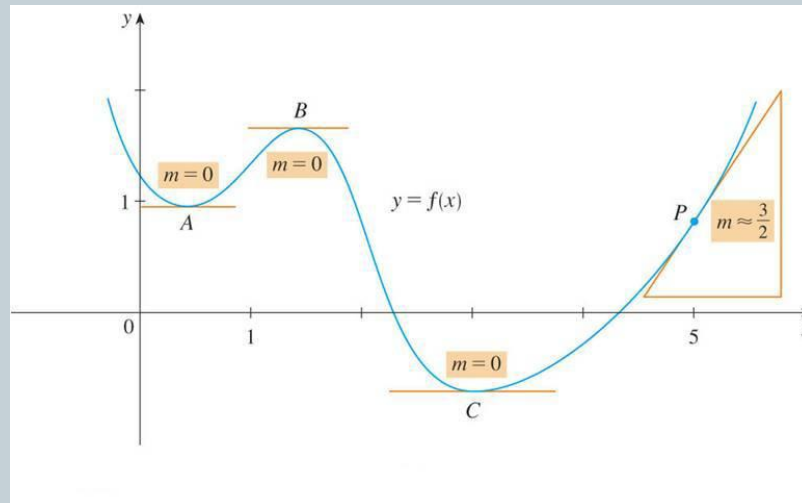




- Ponavljanjem ovog postupka u raznim tačkama, moguće je skicirati grafik izvodne funkcije:

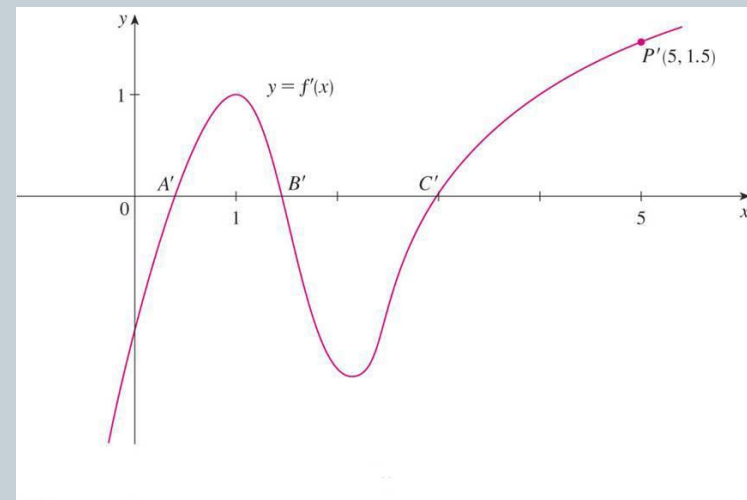
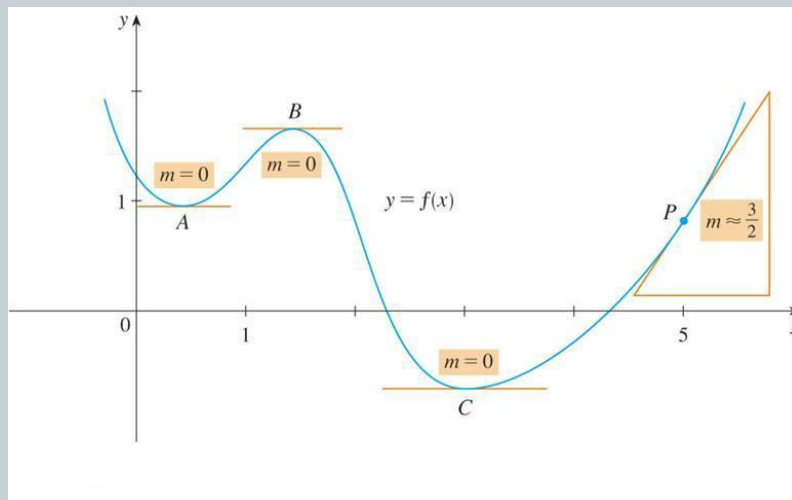


- Treba uočiti da su tangente u A , B i C horizontalne.
 - U tim tačkama izvod je jednak nuli, pa u tačkama A' , B' i C' koje imaju istu x koordinatu kao tačke A , B i C (tim redom) grafik funkcije f' preseca x osu.



Uočimo sledeće:

- Između A i B , tangente imaju pozitivan nagib. Dakle, $f'(x)$ u tom intervalu ima pozitivne vrednosti.
- Između B i C , tangente imaju negativan nagib. Dakle, $f'(x)$ u tom intervalu ima negativne vrednosti.





- a. Za $f(x) = x^3 - x$, naći izraz za $f'(x)$.
- b. Uporediti grafike funkcija f i f' .



- Kada se koristi formula $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

za računanje izvoda, mora se imati u vidu da je

- h promenljiva
- a x smatramo konstanom



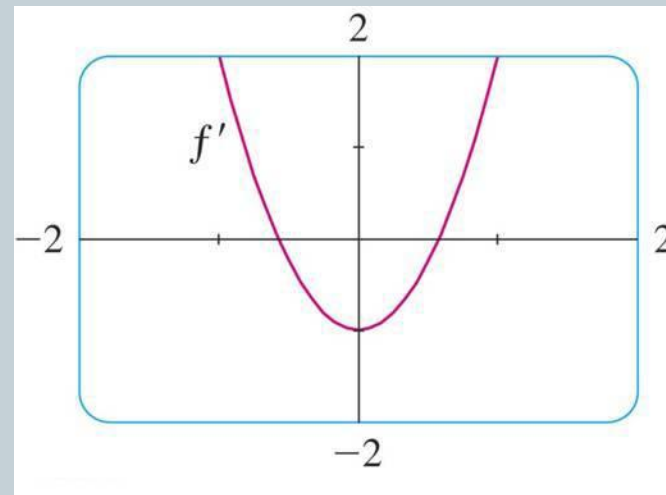
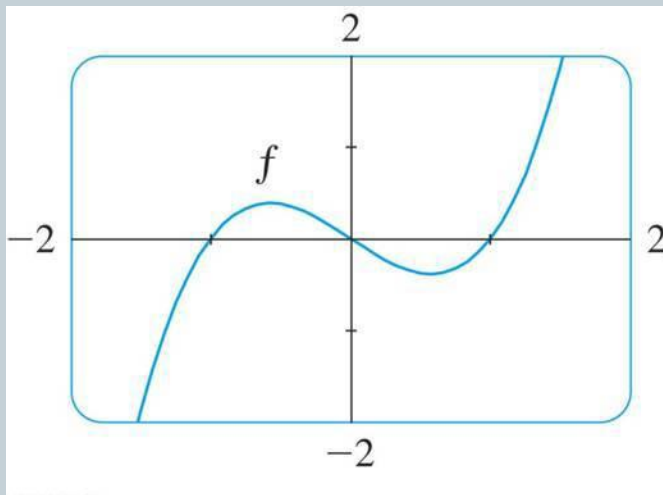
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[(x+h)^3 - (x+h) \right] - \left[x^3 - x \right]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x - h - x^3 + x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 3xh^2 + h^3 - h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2 - 1) \\ &= 3x^2 - 1 \end{aligned}$$

IZVODNA FUNKCIJA

Primer 2



- Uočimo ponovo da je $f'(x) = 0$ kada f ima horizontalne tangente i $f'(x)$ ima pozitivne vrednosti kada tangente imaju pozitivne nagibe, a negativne vrednosti kada su ti nagibi negativni.
- (b) ovi grafici ilustruju rezultat (a).





- Za $f(x) = \sqrt{x}$, naći izvod funkcije f .
- Odrediti domen funkcije f .



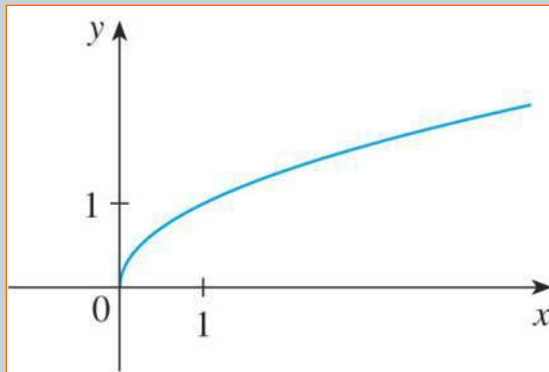
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right)$$

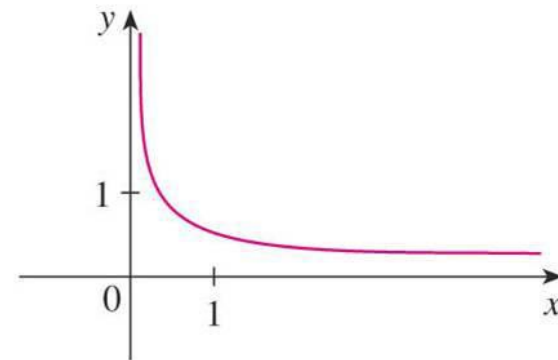
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- Vidi se da $f'(x)$ postoji za $x > 0$, tako da je domen od f' $(0, \infty)$
- Taj domen je podskup domena funkcije f , koji je $[0, \infty)$

- Grafici funkcija f i f' ilustruju rezultat koji smo dobili.



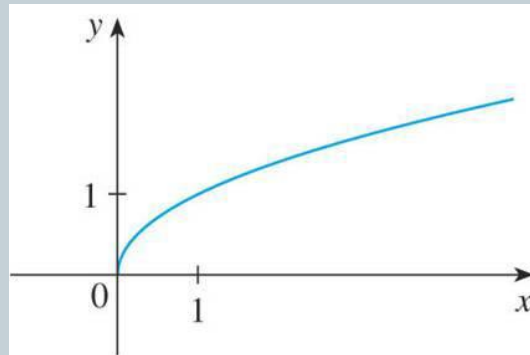
(a) $f(x) = \sqrt{x}$



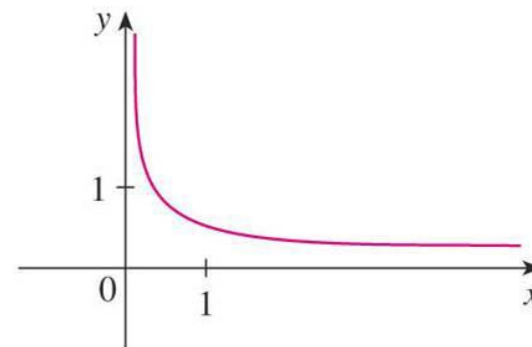
(b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$



- Kada je x blizu 0, \sqrt{x} je takođe blizu 0.
- $f'(x) = 1/(2\sqrt{x})$ ima velike vrednosti u blizini 0.
 - Ovo znači da je tangenta u blizini tačke (0,0) veoma velikog nagiba (veoma strma), tj. da $f'(x)$ ima veoma velike vrednosti, odnosno da je $f'(x)$ neograničena u blizini $x=0$.

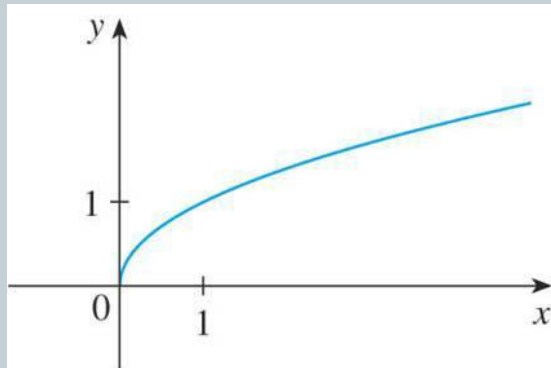


(a) $f(x) = \sqrt{x}$

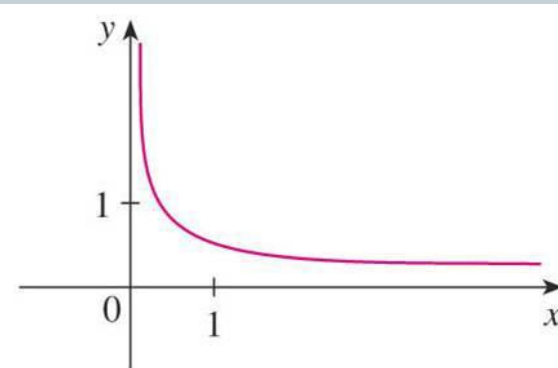


(b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

- Nasuprot tome, kada je x veliko, vrednosti $f'(x)$ postaju veoma male.
 - Nagib tangente tada teži ka nuli. Prema tome, možemo zaključiti da grafik funkcije f' ima horizontalnu asimptotu kada x teži ka beksonačnosti.



(a) $f(x) = \sqrt{x}$



(b) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

DRUGA NOTACIJA



- $y = f(x)$ je oznaka koju standardno koristimo kada želimo da naglasimo da je x nezavisna promenljiva, a y zavisna promenljiva. Pored oznake koju smo do sada upotrebljavali za izvodnu funkciju, ovde su date i druge oznake koje se ravnopravno koriste:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx} f(x) = Df(x) = D_x f(x)$$

DRUGA NOTACIJA



- Simboli D i d/dx se još zovu simbolima operatora diferenciranja.
- Naime, proces određivanja/računanja izvodne funkcije predstavlja **operaciju** diferenciranja.

DRUGA NOTACIJA



- Simbol dy/dx

(koji je uveo matematičar Lajbnic i koji se po njemu naziva Lajbnicova notacija) za sada ne bi trebalo posmatrati kao količnik.

- To je prosto samo druga oznaka za $f'(x)$.
- Ta oznaka je veoma korisna i sugestivna kada se uporedi sa notacijom za priraštaje.
- Ovu notaciju ćemo koristiti ravnopravno sa $f'(x)$.

DRUGA NOTACIJA



- Definicija izvodne funkcije u Lajbnicovoj notaciji:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Funkcija f je diferencijabilna u tački a ako postoji $f'(a)$.

Funkcija f je diferencijabilna je na otvorenom intervalu (a,b) [ili (a, ∞) ili $(-\infty, a)$ ili $(-\infty, \infty)$] ako je diferencijabilna u svakoj tački tog intervala.

Gde je funkcija $f(x) = |x|$ diferencijabilna?

- Za $x > 0$, sledi $|x| = x$ i možemo odabrati da je h dovoljno malo da $x + h > 0$, dakle $|x + h| = x + h$.
- Tako da za $x > 0$, imamo:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

- Dakle, f je diferencijabilna za svako $x > 0$.



- Slično, za $x < 0$, imamo $|x| = -x$ i h može biti odabrano tako da $x + h < 0$, tako da sledi $|x + h| = -(x + h)$.
- Tako da za $x < 0$ važi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|x + h| - |x|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-(x + h) - (-x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (-1) = -1 \end{aligned}$$

- Dakle, f je diferencijabilna za svako $x < 0$.



- Za $x = 0$, mora se posmatrati

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|0+h| - |0|}{h} \end{aligned}$$

ako postoji.



- Izračunaćemo levi i desni limes posebno:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} 1 = 1$$

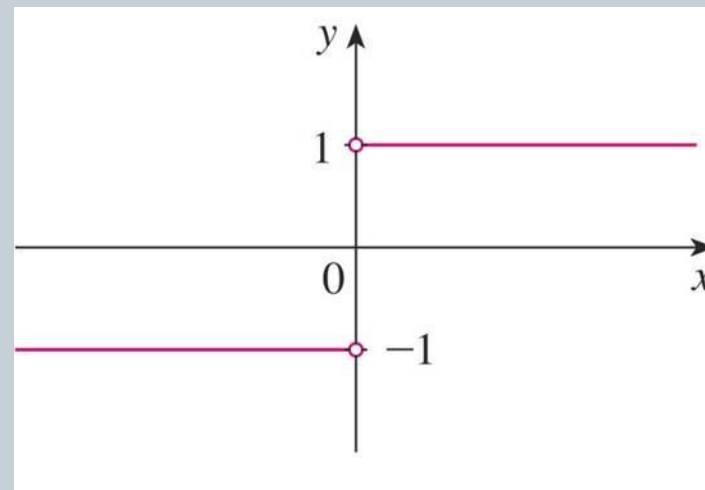
$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

- Pošto su ovi limesi različiti, $f'(0)$ ne postoji.
- Dakle, ova funkcija je diferencijabilna u svakoj tački domena osim za $x=0$.

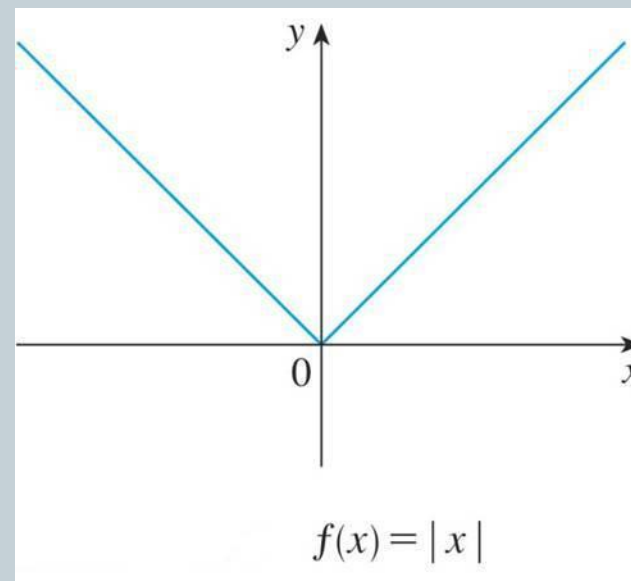
- Formula za f' je:

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{za } x < 0 \\ 1, & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

- Grafik ove funkcije je dat na slici.



- Činjenica da $f'(0)$ ne postoji se vidi i na osnovu grafika funkcije $y = |x|$ jer on nema jedinstvenu tangentu u tački $(0, 0)$.



DIFERENCIJABILNOST I NEPREKIDNOST



- I neprekidnost i diferencijabilnost su poželjne osobine za funkciju.
- Naredna teorema govori o tome u kom se odnosu te dve osobine nalaze.

TEOREMA



- Ako je f diferencijabilna funkcija u a , onda je f i neprekidna u a .
 - Da bismo dokazali da je f neprekidna u a , treba da pokažemo da je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
 - Pokazaćemo to tako što ćemo dokazati da razlika $f(x) - f(a)$ teži 0.

DOKAZ



f je diferencijabilna funkcija u a . To znači da važi

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Da bi se moglo povezati ono što znamo sa onim što treba da bude dokazano, pomnožićemo i podeliti $f(x) - f(a)$ sa $x - a$ (što može da se uradi za $x \neq a$):

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a)$$

DOKAZ



Tada, koristeći pravilo za proizvod graničnih vrednosti imamo:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (x - a) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) \\ &= f'(a) \cdot 0 = 0\end{aligned}$$

DOKAZ



Iskoristićemo ovo što smo malopre pokazali tako što ćemo poći od $f(x)$ i dodati i oduzeti $f(a)$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} f(x) &= \lim_{x \rightarrow a} [f(a) + (f(x) - f(a))] \\ &= \lim_{x \rightarrow a} f(a) + \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] \\ &= f(a) + 0 = f(a)\end{aligned}$$

- Dakle, sledi da je f neprekidna u a .

NAPOMENA

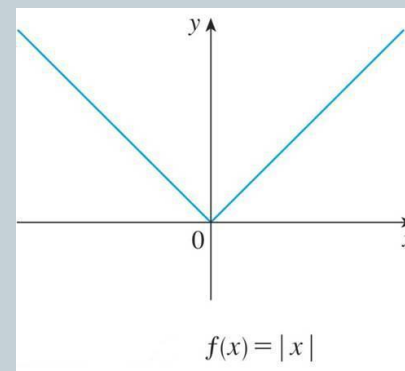


Obrnuto ne mora da važi. Postoje funkcije koje su neprekidne, a nisu diferencijabilne.

- Na primer, funkcija $f(x) = |x|$ je neprekidna u 0 jer važi

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 = f(0)$$

- Međutim, u Primeru 4 smo pokazali da f nije diferencijabilna u 0.



KADA SVE FUKCIJA NIJE DIFERENCIJABILNA?



- Svakako u slučajevima kada grafik funkcije ima špic u nekoj tački. Tada grafik funkcije f nema tangentu u toj tački i f tu nije diferencijabilna funkcija.
 - Kada bismo pokušali da izračunamo $f'(a)$, videli bismo da se levi i desni limes razlikuju, odnosno da granična vrednost kojom se određuje $f'(a)$ ne postoji.

KADA SVE FUKCIJA NIJE DIFERENCIJABILNA?



Teorema koju smo upravo dokazali, koja povezuje neprekidnost i diferencijabilnost, nagoveštava još jedan mogući uzrok zbog kog funkcija može da ne bude diferencijabilna u nekoj tački.

- Ona kaže da ako f nije neprekidna u a , onda f ne može da bude diferencijabilna u a .
- Tako da u tački prekida—skoku, na primer— f ne može da bude diferencijabilna.

KADA SVE FUKCIJA NIJE DIFERENCIJABILNA?



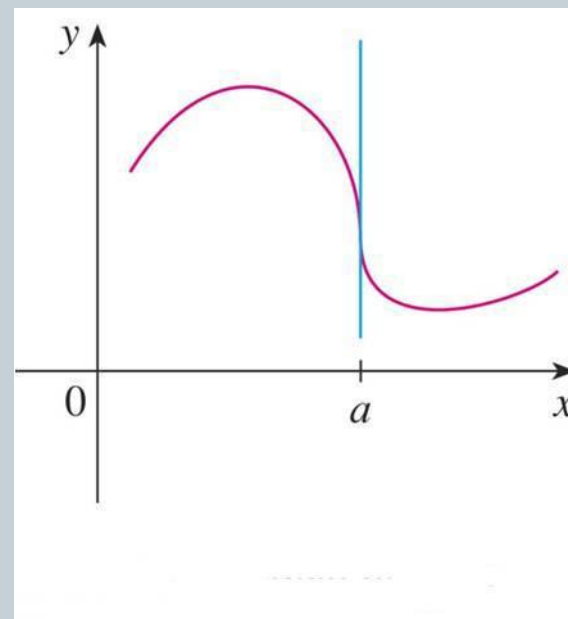
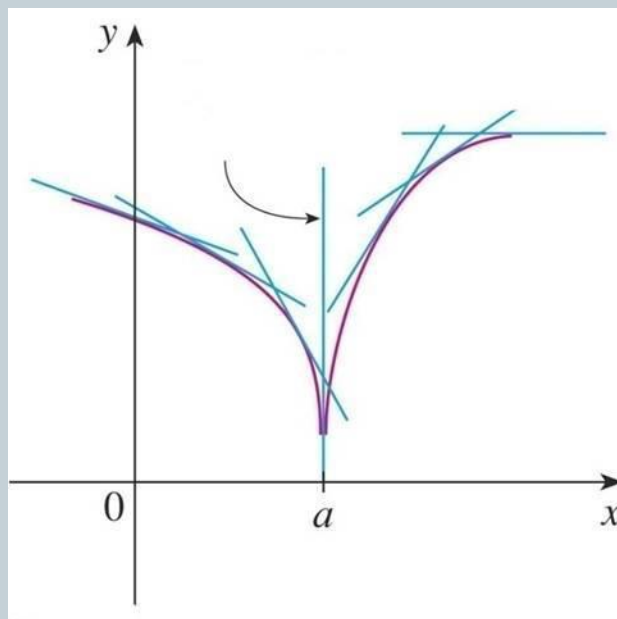
- Treća mogućnost je da kriva ima vertikalnu tangentu za $x = a$.
- f je neprekidna u a , ali važi

$$\lim_{x \rightarrow a} |f'(x)| = \infty$$

KADA SVE FUKCIJA NIJE DIFERENCIJABILNA?



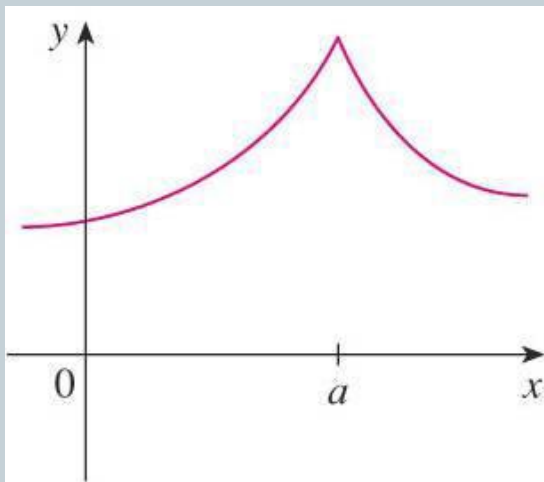
- To znači da tangenta postaje sve strmija i strmija kako $x \rightarrow a$.
- Na slikama su prikazana dve različite situacije u kojima je to slučaj.



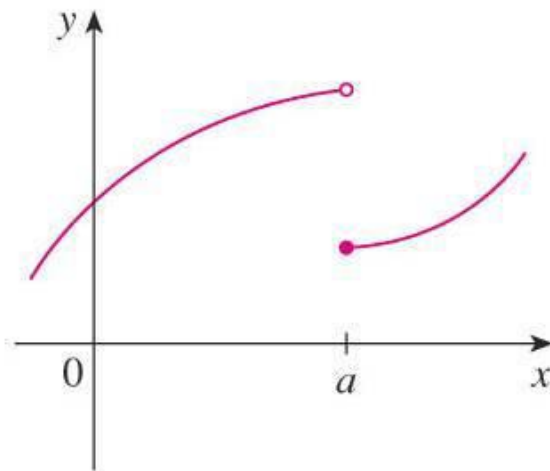
KADA SVE FUKCIJA NIJE DIFERENCIJABILNA?



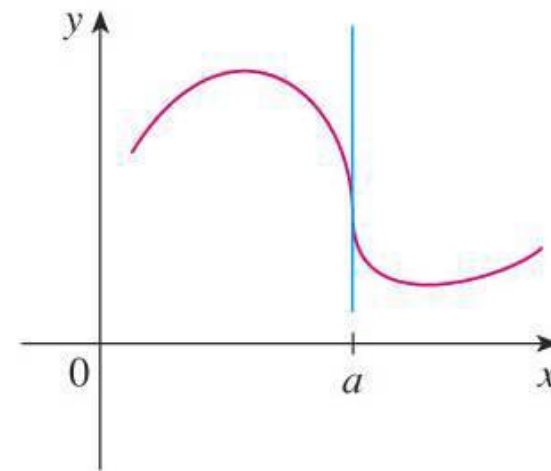
- Ove slike ilustruju navedena tri slučaja u kojima funkcija nije diferencijabilna u tački a .



špic



skok

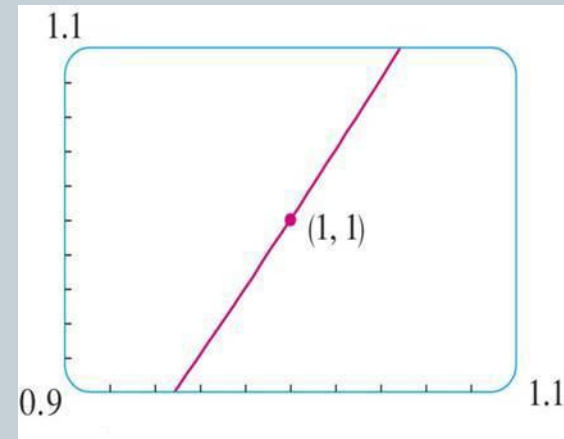
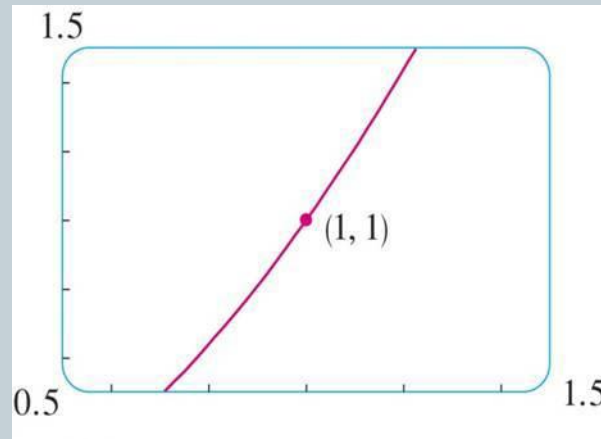
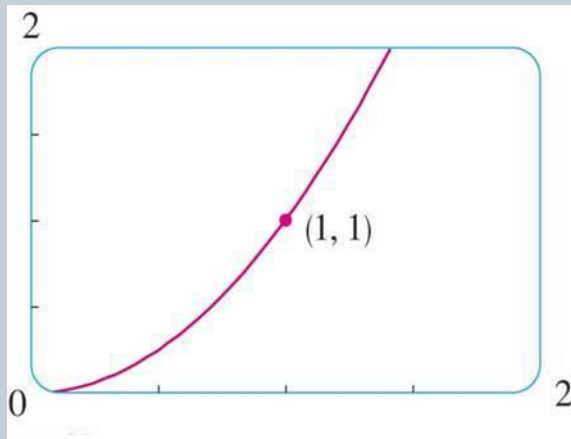


vertikalna tangenta

KADA SVE FUKCIJA NIJE DIFERENCIJABILNA?



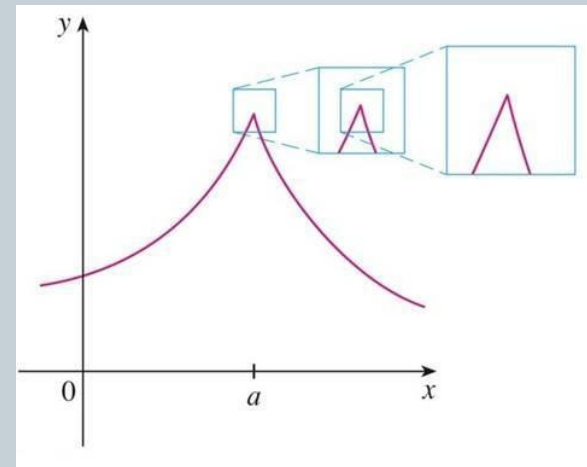
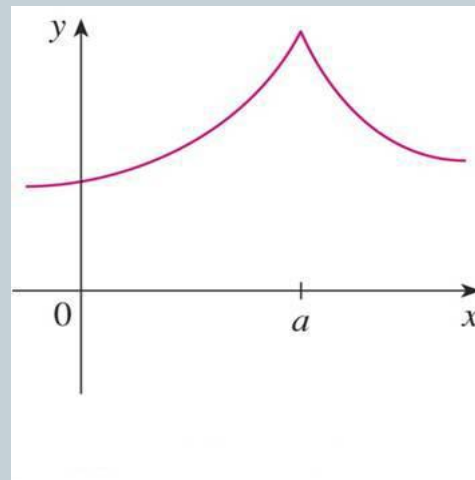
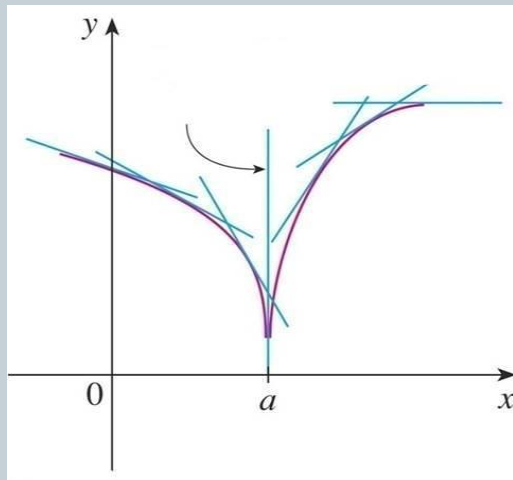
- Intuitivno, možemo da usvojimo sledeće razmatranje.
- Ako je f diferencijabilna u a , kada se uveća/zumira deo grafika oko tačke $(a, f(a))$, taj deo se sa uvećavanjem “ispravlja” i sve više izgleda kao prava.
- Primer funkcije $y = x^2$ u tački $x=1$ je dat na slikama.



KADA SVE FUKCIJA NIJE DIFERENCIJABILNA?



- Međutim, nikakvo uveličavanje u okolini tačke a sa prve dve slike ne može da “ispravi” oštar vrh ili špic, kao što se to i vidi na trećoj slici.



IZVODI VIŠEG REDA



- Ako je f diferencijabilna funkcija na nekom intervalu, onda je i njen izvod f' takođe funkcija na tom intervalu.
- Dakle, funkcija f' može takođe imati izvod i on se označava sa $(f')' = f''$.

IZVODI VIŠEG REDA



- Ova nova funkcija f'' se zove drugi izvod funkcije f .
 - Zato što je to izvod od izvoda funkcije f .
 - U Lajbnicovoj notaciji, drugi izvod funkcije $y = f(x)$ se zapisuje na sledeći način:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

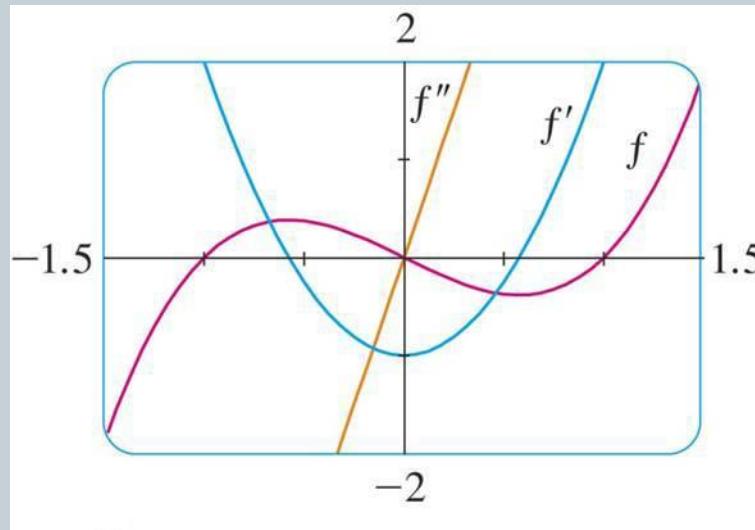


- Za $f(x) = x^3 - x$, naći $f''(x)$ i interpretirati ga.
 - U Primeru 2, izračunali smo izvod ove funkcije $f'(x) = 3x^2 - 1$.
 - Tako da je drugi izvod dat sa:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f')'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(x+h)^2 - 1] - [3x^2 - 1]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1 - 3x^2 + 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x \end{aligned}$$

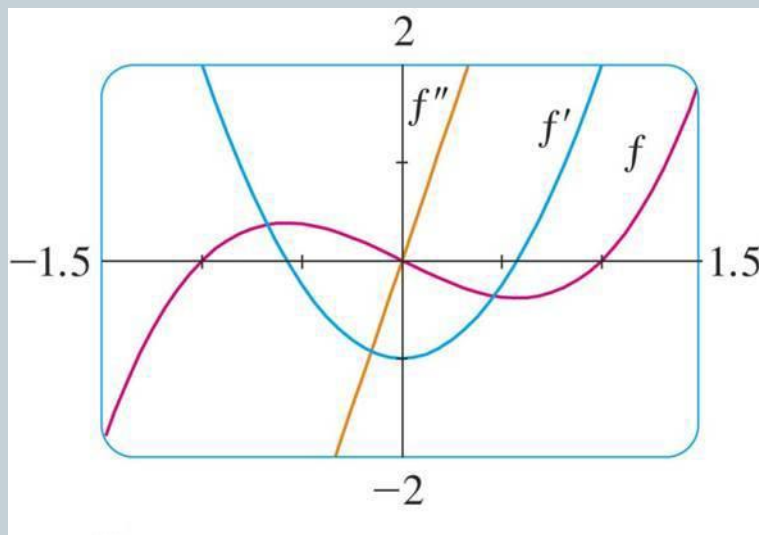


- Grafici funkcija f, f', f'' su dati na slici.
 - $f''(x)$ se interpretira kao nagib krive $y = f'(x)$ u tački $(x, f'(x))$.
 - Drugim rečima, to je **brzina promene nagiba** polazne krive $y = f(x)$.





- Primetimo da je funkcija $f''(x)$ negativna kada $y = f'(x)$ ima negativan nagib, a pozitivna kada $y = f'(x)$ ima pozitivan nagib.



IZVODI VIŠEG REDA



- Ako je $s = s(t)$ funkcija koja opisuje položaj nekog objekta koji se kreće pravolinijski, znamo da njen prvi izovd prestavlja brzinu $v(t)$ kretanja tog objekta u funkciji vremena:

$$v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

IZVODI VIŠEG REDA



- Trenutna promena brzine u vremenu zove se ubrzanje $a(t)$ objekta.
 - Tako da funkcija ubrzanja je izvod funkcije brzine i tako predstavlja drugi izvod funkcije položaja nekog objekta:
 - U Lajbnicovoj notaciji:

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

IZVODI VIŠEG REDA



- Treći izvod f''' je izvod drugog izvoda:
$$f''' = (f'')'.$$
- Tako da se $f'''(x)$ može interpretirati kao nagib tangente na krivu $y = f''(x)$.
- Za $y = f(x)$, date su neke oznake koje se ravnopravno koriste:

$$y''' = f'''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

IZVODI VIŠEG REDA



- Ovaj proces se može nastaviti.

- Četvrti izvod f'''' se obično označava sa $f^{(4)}$.
- U opštem slučaju, n -ti izvod funkcije f se označava sa $f^{(n)}$ dobija se od f diferenciranjem n puta.
- Za $y = f(x)$, pišemo:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$



- Za $f(x) = x^3 - x$, naći $f'''(x)$ i $f^{(4)}(x)$.
 - U Primeru 5 je izračunato $f''(x) = 6x$.
 - Grafik funkcije drugog izvoda ima jednačinu $y = 6x$.
 - Dakle, to je prava sa nagibom 6.



- Treći izvod $f'''(x)$ je nagib tangente na $f''(x)$, a dobili smo da je $f'''(x) = 6$ za sve vrednosti x .
- Dakle, f''' konstantna funkcija i njen grafik je horizontalna linija.
- Tako da je za sve vrednosti x , $f^{(4)}(x) = 0$.

IZVODI VIŠEG REDA



- Može se dati fizička interpretacija trećeg izvoda u slučaju funkcije $s = s(t)$ položaja objekta koji se kreće pravolinijski.
 - Kako je $s''' = (s'')' = a'$, treći izvod funkcije položaja je izvod funkcije ubrzanja.

- Naziva se trzaj:

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3}$$

IZVODI VIŠEG REDA



- Dakle, trzaj j je promena ubrzanja u vremenu.
 - Naziv je odgovarajući jer je upravo trzaj ono što se desi pri nagloj promeni ubrzanja.