3. Diferencijalni račun

3.1. Izvod funkcije

Posmatrajmo neprekidnu funkciju $y = f(x)$ nad intervalom (a, b).

Ako postoji granična vrednost

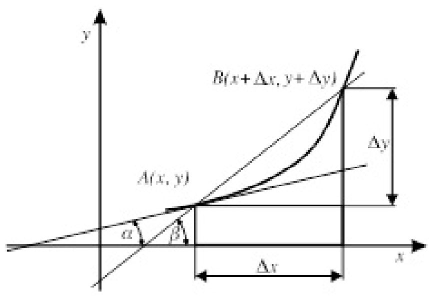
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

gde $x,\ x + \Delta x \in (a, b)$, onda se ta granična vrednost, koja se označava sa $f'(x)$ ili y' zove **izvod funkcije** $f(x)$ u tački x.

Dakle,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Na slici je ilustrovana geometrijska interpretacija izvoda. Prava AB, gde su A i B tačke grafika, naziva se sečica te krive, određena tačkama A i B. Pustimo da se tačka B kreće po krivoj i da teži da se poklopi sa tačkom A. Sečica AB pri tom menja svoj položaj (nagib). Ukoliko postoji granični položaj te sečice kada tačka B teži ka tački A, tada se prava koja zauzima taj položaj naziva tangenta krive $y = f(x)$ u tački A.



Pretpostavimo da je ugao α koji tangenta zaklapa sa pozitivnim smerom x-ose različit od $\frac{\pi}{2}$, $(\alpha \neq \frac{\pi}{2})$. Ako je β ugao koji zaklapa sečica AB sa pozitivnim delom x-ose, onda sledi da je

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

pa je koeficijent pravca $\operatorname{tg} \alpha$ tangente kroz tačku A dat izrazom

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x). \tag{3.1}$$

Zadatak 3.1. Naći izvod funkcije $y = x^2$ po definiciji.

Rešenje. Koristićemo jednakost (3.1) za izračunavanje izvoda funkcije. Kako je

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 \\ &= x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x(2x + \Delta x), \end{aligned}$$

sledi da je:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

3.1.1. Tablica i osobine izvoda

Tablica izvoda

Funkcija $f(x)$	Izvod $f'(x)$	Važi za
$c = const$	0	$x \in \mathbb{R}$
x	1	$x \in \mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	a) $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{N}$ neparan broj, $x \neq 0$; b) $\alpha = \frac{p}{q} > 1$, q neparan broj, $x \in \mathbb{R}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x \in \mathbb{R}$
e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$	$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$,
$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mid x \mid < 1$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\mid x \mid < 1$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	$x \in \mathbb{R}$

Osobine izvoda funkcije

Ako funkcije $u = u(x)$ i $v = v(x)$ imaju izvod u tački x, tada i funkcije $u \pm v$, uv, $\dfrac{u}{v}$ i cu, $c \in \mathbb{R}$, imaju izvode u toj tački $\Big(\dfrac{u}{v}$ pod pretpostavkom da je $v(x) \neq 0$ u datoj tački $x\Big)$. Pri tome je:

$$\Big(u(x) \pm v(x)\Big)' = u'(x) \pm v'(x), \tag{3.2}$$

$$\Big(u(x) \cdot v(x)\Big)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x), \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{\big(v(x)\big)^2}, \tag{3.4}$$

$$\big(c \cdot u(x)\big)' = c \cdot u'(x). \tag{3.5}$$

Napomena: U zadacima se traže izvodi tamo gde oni postoje.

Zadatak 3.2. Naći izvode sledećih funkcija:

a) $y = \dfrac{1}{x}$; b) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$; c) $y = e^x \sin x$; d) $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$; e) $y = \left(\dfrac{x}{a}\right)^b + \left(\dfrac{b}{x}\right)^a + \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

Rešenje. Za rešavanje ovog zadatka primenjujemo tablicu i osobine izvoda.

a) $y' = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$

b) $y' = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{3}}\right)' = -\frac{1}{3}\,x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}.$

c) Primenimo osobinu za izvod proizvoda,(3.3), i tablicu izvoda

$$y' = (e^x \cdot \sin x)' = (e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)' = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x = e^x(\sin x + \cos x).$$

d) Primenimo osobinu za izvod količnika,(3.4), i tablicu izvoda

$$y' = \left(\frac{\ln x}{x^2}\right)' = \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - \ln x \cdot (x^2)'}{x^4} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

e) Primenom osobine za izvod zbira (3.2), osobine (3.5) i tablice izvoda dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= \left(\left(\frac{1}{a} \cdot x\right)^b\right)' + \left(\left(b \cdot \frac{1}{x}\right)^a\right)' + \left(\left(\frac{a}{b}\right)^x\right)' = \frac{1}{a^b} \cdot (x^b)' + b^a \cdot (x^{-a})' + \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \ln\frac{a}{b} \\ &= \frac{1}{a^b} \cdot b \cdot x^{b-1} + b^a \cdot \left(-\frac{a}{x^{a+1}}\right) + \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \ln\frac{a}{b} = \frac{b}{a^b} \cdot x^{b-1} - \frac{ab^a}{x^{a+1}} + \left(\frac{a}{b}\right)^x \cdot \ln\frac{a}{b}. \end{aligned}$$

3.1.2. Izvod složene funkcije

Neka je data složena funkcija $y = f(u)$, gde je $u = g(x)$. Ako $g(x)$ ima izvod u tački x, a $f(u)$ izvod u tački u, tada je

$$(f \circ g)'(x) = f'(u) \cdot g'(x), \tag{3.6}$$

gde je $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

Zadatak 3.3. Naći izvode funkcija:

a) $y = (x^2 - 3x + 3)^5$; b) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$, c) $y = a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} + a^{a^a}$;

d) $y = e^{\cos(\cos x)}$; e) $y = \sqrt{\sin 3x} + \sin x^2$.

Rešenje.

a) Uvodimo smenu

$$u = x^2 - 3x + 3 \quad \Rightarrow \quad y = u^5.$$

Primenom izvoda složene funkcije (3.6) dobijamo

$$y' = y'(u) \cdot u'(x) = (u^5)' \cdot (x^2 - 3x + 3)' = 5u^4 \cdot (2x - 3) = 5(x^2 - 3x + 3)^4 \cdot (2x - 3).$$

b) Uvodimo smenu

$$u = \frac{x}{\ln x} \quad \Rightarrow \quad y = 2^u.$$

Primenom izvoda složene funkcije (3.6) dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= y'(u) \cdot u'(x) = 2^u \cdot \ln 2 \cdot \left(\frac{x}{\ln x}\right)' \\ &= 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{x' \ln x - x\,(\ln x)'}{\ln^2 x} = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}. \end{aligned}$$

c) Primenom osobine za izvod zbira (3.2) i izvoda složene funkcije (3.6), dobijamo

$$y' = a^{a^x} \cdot \ln a \cdot a^x \cdot \ln a + a^{x^a} \cdot \ln a \cdot a \cdot x^{a-1} + a^a \cdot x^{a^a - 1}.$$

d) Uvodimo smene

$$u = \cos(\cos x) \quad \Rightarrow \quad y = e^u,$$
$$v = \cos x \quad \Rightarrow \quad u = \cos v.$$

Kao i u prethodnim zadacima primenjujemo (3.6) i dobijamo

$$\begin{aligned} y' &= y'(u)\cdot u'(v)\cdot v'(x) = (e^u)'\cdot(\cos v)'\cdot(\cos x)' \\ &= e^u\cdot(-\sin v)\cdot(-\sin x) = e^{\cos(\cos x)}\cdot\sin(\cos x)\cdot\sin x. \end{aligned}$$

e) Primenom tablice izvoda, osobine za izvod zbira (3.2) i izvoda složene funkcije (3.6), dobijamo

$$\begin{aligned} y' = (\sqrt{\sin 3x} + \sin x^2)' &= (\sin^{\frac{1}{2}} 3x)' + (\sin x^2)' \\ &= \frac{1}{2}(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(\sin 3x)' + \cos x^2\cdot(x^2)' \\ &= \frac{1}{2}\,(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}}\cdot\cos 3x\cdot(3x)' + \cos x^2\cdot 2x \\ &= \frac{3\,\cos 3x}{2\,\sqrt{\sin 3x}} + 2x\,\cos x^2. \end{aligned}$$

3.1.3. Izvodi višeg reda

Neka funkcija $y = f(x)$ ima izvod nad intervalom (a,b). Izvod $f'(x)$ funkcije $f(x)$ je funkcija nezavisne promenljive x, definisana nad intervalom (a,b). Ako ona ima izvod u nekoj tački $x \in (a,b)$, onda se njen izvod $(f'(x))'$ naziva drugim izvodom ili izvodom drugog reda funkcije $f(x)$ u tački x, koji ćemo označavati sa $y'' = f''(x)$.

Ako je definisan izvod $(n-1)$ reda, $n \geq 2$, tada je $n-$ti izvod ili izvod $n-$tog reda $f^{(n)}(x)$ definisan kao izvod funkcije $y = f^{(n-1)}(x)$, tj.

$$(f^{(n-1)}(x))' = f^{(n)}(x). \tag{3.7}$$

Zadatak 3.4. Naći drugi izvod funkcije $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Rešenje. Izračunaćemo prvi izvod zadate funkcije

$$\begin{aligned} y' = (\sin^4 x + \cos^4 x)' &= (\sin^4 x)' + (\cos^4 x)' \\ &= 4\,\sin^3 x\,\cdot(\sin x)' + 4\,\cos^3 x\,\cdot(\cos x)' \\ &= 4(\sin^3 x\,\cdot\cos x - \cos^3 x\,\cdot\sin x) \\ &= 4(\sin x\cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x) \end{aligned}$$

Izvod drugog reda računamo po formuli $y'' = (y')'$, prema (3.7). Dakle, dobijamo da je

$$\begin{aligned} y'' = (y')' &= \Big(4(\sin x\cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x)\Big)' \\ &= 4\Big((\sin x\cos x)'(\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin x\cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x)'\Big) \\ &= 4\Big((\cos^2 x - \sin^2 x)(\sin^2 x - \cos^2 x) + (\sin x\cos x)(2\sin x\cos x + 2\cos x\sin x)\Big) \\ &= 4\Big(-(\cos^2 x - \sin^2 x)^2 + 4\sin^2 x\cos^2 x\Big) \\ &= -4(\cos^4 x + \sin^4 x - 6\sin^2 x\cos^2 x). \end{aligned}$$

Primetimo da je

$$y' = 4(\sin x\cos x)(\sin^2 x - \cos^2 x) = -2(2\sin x\cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = -2\sin(2x)\cos(2x) = -\sin(4x),$$

te je

$$y'' = -4\cos(4x).$$

Zadatak 3.5. Pokazati da funkcija $y = e^{2x} \cdot \sin 5x$ zadovoljava jednačinu $y'' - 4y' + 29y = 0$.

Rešenje. Prvo ćemo izračunati prvi i drugi izvod zadate funkcije

$$\begin{aligned} y' &= 2e^{2x} \sin 5x + 5e^{2x} \cos 5x, \\ y'' &= 4e^{2x} \sin 5x + 10e^{2x} \cos 5x + 10e^{2x} \cos 5x - 25e^{2x} \sin 5x \\ &= -21e^{2x} \sin 5x + 20e^{2x} \cos 5x. \end{aligned}$$

Tako dobijene izvode uvrštavamo u zadatu jednačinu

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 29y = &\underbrace{-21e^{2x} \sin 5x + 20e^{2x} \cos 5x}_{y''} \\ &- 4 \cdot \underbrace{(2e^{2x} \sin 5x + 5e^{2x} \cos 5x)}_{y'} + 29 \underbrace{e^{2x} \sin 5x}_{y} = 0, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

3.1.4. Logaritamski izvod

Po ovom pravilu možemo da tražimo izvod funkcije samo u tačkama gde je funkcija $f(x)$ pozitivna. Neka je $y = f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$. Tada se logaritmovanjem funkcije i primenom osobine logaritamske funkcije $\ln x^a = a \ln x$ dobija

$$\begin{aligned} &\ln y = g(x) \cdot \ln f(x) \Big/' \quad \text{(izvod leve i desne strane jednakosti po promenljivoj } x) \\ &\frac{1}{y} \cdot y' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \\ &y' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)} \right). \end{aligned}$$

Logaritamskim izvodom se može naći izvod proizvoda. Ako je $y = f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_k(x)$, $f_i(x) > 0$, onda se logaritmovanjem funkcije i primenom osobine logaritamske funkcije $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$ dobija

$$\ln y = \ln\big(f_1(x)\big) + \ln\big(f_2(x)\big) + \cdots + \ln\big(f_k(x)\big),$$

što nam olakšava diferenciranje.

Zadatak 3.6. Naći drugi izvod funkcije $y = x^x$.

Rešenje. Logaritmovanjem jednakosti $y = x^x$ dobijamo

$$\begin{aligned} \ln y = x \cdot \ln x \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{y} \cdot y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ &\Rightarrow \quad y' = y \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1), \end{aligned}$$

Za izračunavanje drugog izvoda koristimo formulu $y'' = (y')'$.

$$y'' = (x^x)' \cdot (\ln x + 1) + x^x \cdot (\ln x + 1)' = x^x (\ln x + 1)^2 + \frac{x^x}{x}.$$

Zadatak 3.7. Naći izvod funkcije $y = \left(\dfrac{x}{1+x} \right)^x + \ln x$.

Rešenje. Ako uvedemo da je $y_1 = \left(\dfrac{x}{1+x} \right)^x$ sledi $y' = y_1' + (\ln x)'$. Primenom logaritamskog izvoda dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\ln y_1 = x \cdot \ln \frac{x}{1+x} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{y_1} \cdot y_1' = \ln \frac{x}{1+x} + x \cdot \frac{1+x}{x} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} \\
&\Rightarrow \quad y_1' = y_1 \cdot \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \cdot \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) \\
&\Rightarrow \quad y' = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \cdot \left(\ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{1+x} \right) + \frac{1}{x}.
\end{aligned}$$

Zadatak 3.8. Naći izvod funkcije $y = \sqrt[3]{x^2} \cdot \dfrac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x$.

Rešenje. Primenom postupka koji je opisan na početku poglavlja i osobina logaritamske funkcije

$$\ln a^n = n \ln a, \quad \ln (a \cdot b) = \ln a + \ln b \quad \text{i} \quad \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b,\ a, b > 0,$$

dobijamo

$$\begin{aligned}
\ln y &= \ln \left(x^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x \right) \\
&= \frac{2}{3} \ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3 \ln \sin x + 2 \ln \cos x, \\
\frac{1}{y} \cdot y' &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \cdot (-1) - \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x + 3 \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x + 2 \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x), \\
y' &= y \cdot \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right) \\
&= \sqrt[3]{x^2} \cdot \frac{1-x}{1+x^2} \cdot \sin^3 x \cdot \cos^2 x \cdot \left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3 \operatorname{ctg} x - 2 \operatorname{tg} x \right).
\end{aligned}$$

3.1.5. Izvod inverzne funkcije

Neka je $f : (a, b) \to (c, d)$ bijektivna neprekidna strogo monotona funkcija, a $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ njena inverzna funkcija. Funkcija f^{-1} ima izvod u tački $x \in (c, d)$ ako funkcija f ima izvod u tački $y = f^{-1}(x) \in (a, b)$, pri čemu je $f'(y) \neq 0$, i važi

(3.8) $$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}, \quad \text{tj.} \quad y_x' = \frac{1}{x_y'}.$$

Zadatak 3.9. Odrediti izvod funkcije f^{-1} ako je $f(x) = \sqrt{x} + 3$, $x > 0$.

Rešenje.

I način: Odredićemo funkciju f^{-1}. Kako iz $y = \sqrt{x} + 3$ sledi $x = (y-3)^2$, to je $f^{-1}(x) = (x-3)^2$, pa je

$$(f^{-1})'(x) = 2(x-3).$$

II način: Koristićemo pravilo diferenciranja inverzne funkcije. Ako je $x = \sqrt{y} + 3$, onda je $x_y' = \dfrac{1}{2\sqrt{y}}$, odakle je

$$y_x' = \frac{1}{x_y'} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{y}}} = 2\sqrt{y} = 2(x-3).$$

Zadatak 3.10. Koristeći izvod inverzne funkcije odrediti izvod funkcije $y = \operatorname{arctg} x$.

Rešenje. Ako je $y = \operatorname{arctg} x$, onda je $x = \operatorname{tg} y$, odnosno $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$. Sada je po formuli za izvod inverzne funkcije

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y}} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 y + 1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Zadatak 3.11. Naći y'_x za $y = \operatorname{tg}(x+y)$.

Rešenje. Iz izraza $y = \operatorname{tg}(x+y)$ možemo x izraziti na sledeći način

$$\operatorname{arctg} y = x + y \quad \Rightarrow \quad x = \operatorname{arctg} y - y \quad \Rightarrow \quad x'_y = \frac{1}{1+y^2} - 1 = -\frac{y^2}{1+y^2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{1}{x'_y} = -\frac{1+y^2}{y^2} = -\frac{1}{y^2} - 1 = -\frac{1}{\operatorname{tg}^2(x+y)} - 1 \\ &= \frac{-\cos^2(x+y) - \sin^2(x+y)}{\sin^2(x+y)} = \frac{-1}{\sin^2(x+y)}. \end{aligned}$$

3.1.6. Izvodi funkcije zadate u parametarskom obliku

Neka su nad intervalom $I \subset \mathbb{R}$ definisane dve realne funkcije $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$, $t \in I$ i neka za funkciju $\varphi(t)$ postoji inverzna funkcija $t = \varphi^{-1}(x)$. Tada je složena funkcija $y = \psi\big(\varphi^{-1}(x)\big) = f(x)$, definisana nad skupom vrednosti $\{\ \varphi(t) : t \in I\ \}$ funkcije $\varphi(t)$. Kažemo da je sa $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$, funkcija $f(x)$ zadata u parametarskom obliku, pri čemu ćemo pomoćnu promenljivu t nazvati parametrom.

Neka je data funkcija $y = f(x)$ u parametarskom obliku

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ t \in (a,b).$$

Ako neprekidne funkcije $\varphi(t)$ i $\psi(t)$ imaju izvode u tački $t \in (a,b)$, i ukoliko je $\varphi'(t) \neq 0$, tada funkcija $y = f(x)$ ima izvod u tački t i važi

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \ \text{ tj. } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{3.9}$$

Drugi izvod funkcije zadate u parametarskom obliku

$$y''_x = \frac{dy'_x}{dx} = \frac{dy'_x}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \tag{3.10}$$

Zadatak 3.12. Naći y''_x za $x = \ln t$ i $y = t + \dfrac{1}{t}$, $t > 0$.

Rešenje. Funkcija je zadata u parametarskom obliku i važi

$$x'_t = \frac{1}{t} \quad \text{i} \quad y'_t = 1 - \frac{1}{t^2} = \frac{t^2-1}{t^2}.$$

Primenom pravila (3.9) dobijamo da je

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2-1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2-1}{t} = t - \frac{1}{t}.$$

Traženi drugi izvod funkcije dobijamo primenom (3.10)

$$\begin{aligned} (y'_x)'_t &= 1 + \frac{1}{t^2} = \frac{t^2+1}{t^2} \\ y''_x &= \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{t^2+1}{t^2}}{\frac{1}{t}} = \frac{t^2+1}{t} = t + \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

3.1.7. Izvod funkcije zadate implicitno

Ako je funkcija $y = f(x)$ zadata implicitno sa $F(x, y) = 0$, prvo se odredi izvod leve i desne strane jednakosti po x, vodeći računa da je y funkcija koja zavisi od x. Izvod y' kada se izračuna je takođe u implicitnom obliku. Prema tome, i drugi izvod funkcije se izračunava kao izvod implicitno zadate funkcije.

Zadatak 3.13. Naći izvod funkcije $y = \operatorname{tg}(x + y)$.

Rešenje. Koristimo da je $y = y(x)$ i tražimo izvode leve i desne strane gornje jednakosti po x.

$$\begin{aligned} y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)}(1+y') \quad &\Rightarrow \quad \frac{y'}{1+y'} = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{y'} + 1 = \cos^2(x+y) \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{y'} = -\big(1 - \cos^2(x+y)\big) = -\sin^2(x+y) \\ &\Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{\sin^2(x+y)}. \end{aligned}$$

Zadatak 3.14. Naći y'' za $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

Rešenje. Izračunaćemo izvod leve i desne strane jednakosti po x

$$\begin{aligned} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2} \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y'x - y}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2+y^2}} \cdot (2x + 2yy') \\ &\Rightarrow \quad \frac{y'x - y}{\frac{x^2+y^2}{x^2}\cdot x^2} = \frac{x + yy'}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad y'x - y = x + yy' \\ &\Rightarrow \quad y'x - yy' = x + y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{x+y}{x-y}. \end{aligned}$$

Drugi izvod računamo na sledeći način

$$\begin{aligned} y'' = (y')' = \left(\frac{x+y}{x-y}\right)' &= \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} \\ &= \frac{x - y + xy' - yy' - (x - xy' + y - yy')}{(x-y)^2} \\ &= \frac{2xy' - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x\cdot\frac{x+y}{x-y} - 2y}{(x-y)^2} = \frac{2x^2 + 2xy - 2xy + 2y^2}{(x-y)^3} = \frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}. \end{aligned}$$

3.2. Primene diferencijalnog računa

3.2.1. Lopitalovo pravilo

Neodeđeni izrazi “$\dfrac{0}{0}$” i “$\dfrac{\infty}{\infty}$”

Količnik $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ima neodređeni oblik “$\dfrac{0}{0}$” kada $x \to c$, ako važi da je

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0,$$

odnosno neodređeni oblik “$\dfrac{\infty}{\infty}$” ako $f(x) \to \pm\infty$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to c$.

Teorema 3.15. *Neka su funkcije f i g diferencijabilne na intervalu (a, b) i pri tom je $g'(x) \neq 0$, $x \in (a, b)$, i neka je $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ jedan od neodređenih izraza “$\dfrac{0}{0}$” ili “$\dfrac{\infty}{\infty}$” kada $x \to c$, $c \in (a, b)$. Ako postoji*

$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, *tada postoji i* $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *i važi jednakost:*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)} = A.$$

Ako $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x \to c$, *tada i* $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \pm\infty$, *kada* $x \to c$.

Zadatak 3.16. Izračunati sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{\cos x \cdot \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^a x}$, $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Rešenje.

a) Ako pustimo $x \to 0$, dobijamo neodređeni izraz "$\dfrac{0}{0}$", pa primenjujemo Lopitalovo pravilo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \sin x}{x^3} &= \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{3x} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{3} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

b) Ako pustimo da $x \to a^+$, dobijamo neodređen izraz "$\dfrac{\infty}{\infty}$" i primenjujemo Lopitalovo pravilo.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a^+}\frac{\cos x\cdot\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} &= \cos a\cdot\lim_{x\to a^+}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} \cos a\cdot\lim_{x\to a^+}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}}\\ &= \cos a\cdot\lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{e^x(x-a)} = \frac{\cos a}{e^a}\lim_{x\to a^+}\frac{e^x-e^a}{x-a} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\\ &\overset{\text{L.P.}}{=} \frac{\cos a}{e^a}\lim_{x\to a^+}e^x = \frac{\cos a}{e^a}\cdot e^a = \cos a.\end{aligned}$$

c) Ako pustimo da $x \to \infty$, dobijamo neodređen izraz "$\dfrac{\infty}{\infty}$" i primenjujemo Lopitalovo pravilo. Lopitalovo pravilo primenjujemo uzastopno n puta.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^{ax}} &\overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{n\cdot x^{n-1}}{a\cdot e^{ax}} = \frac{n}{a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-1}}{e^{ax}} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \frac{n}{a}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{(n-1)x^{n-2}}{a\cdot e^{ax}}\\ &= \frac{n(n-1)}{a^2}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n-2}}{e^{ax}} \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \cdots \overset{\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}}{=} \frac{n!}{a^n}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{ax}} = 0.\end{aligned}$$

Zadatak 3.17. Naći $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$.

Rešenje. Neka je $f(x) = x + \sin x$, a $g(x) = x$. Ovde ne možemo da primenimo Lopitalovo pravilo jer $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(1+\cos x)$ ne postoji. Međutim,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1 + \lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 1 + 0 = 1.$$

Neodređen izraz "$0\cdot\infty$"

Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$, tada je

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$, a to je neodređeni izraz oblika "$\dfrac{0}{0}$", ili

- $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$, a to je neodređeni izraz oblika "$\dfrac{\infty}{\infty}$".

Zadatak 3.18. Naći $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln(x-1)\cdot \ln x$.

Rešenje. Ako pustimo da $x \to 1^+$ dobijamo izraz ",$(-\infty)\cdot 0$,". Da bismo primenili Lopitalovo pravilo potrebno je da zadatoj funkciji promenimo oblik tako da je sada $f(x) = \dfrac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$. Ako sada pustimo da $x\to 1^+$ dobijamo neodređen izraz oblika "$\dfrac{\infty}{\infty}$" i možemo da primenimo Lopitalovo pravilo.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} \ln(x-1)\cdot \ln x &= \text{“}(-\infty)\cdot 0\text{”} \lim_{x\to 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} \\
&= -\lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot \ln^2 x}{x-1} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} -\lim_{x\to 1^+} \frac{\ln^2 x + x\cdot 2\ln x\cdot \frac{1}{x}}{1} \\
&= -\lim_{x\to 1^+} (\ln^2 x + 2\ln x) = 0.
\end{aligned}$$

Neodređen izraz "$\infty - \infty$"

Neodređen izraz "$\infty - \infty$" imamo ako $f(x) \to \pm\infty$ kada $x\to a$ i $g(x)\to\pm\infty$ kada $x\to a$. Dakle, dobijamo

$$\lim_{x\to a} [\, f(x) - g(x)\,] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \left[\,1 - \frac{g(x)}{f(x)}\,\right].$$

- Ako je $\lim\limits_{x\to a}\left[\,1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\,\right] = 0$, slučaj se svodi na prethodni.
- Ako je $\lim\limits_{x\to a}\left[\,1-\dfrac{g(x)}{f(x)}\,\right] \neq 0$, tada $f(x)-g(x)\to\pm\infty$, kada $x\to a$.

Zadatak 3.19. Naći $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

Rešenje. Transformišemo funkciju

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \text{“}\infty-\infty\text{”} = \lim_{x\to\infty} x\left(1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right).$$

Odredimo graničnu vrednost

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right) = \ln e = 1.$$

Sada je polazna granična vrednost

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\left(1 - x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) &= \text{“}\infty\cdot 0\text{”} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - x\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \\
&\overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{-\left(\ln(1+\frac{1}{x}) + x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2})\right)}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot(-\frac{1}{x^2}) - \frac{-1}{(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-x(x+1)+x^2}{x^2(x+1)^2}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4}{2x^2(x+1)^2} \\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2(x^2+2x+1)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Neodređeni izrazi "0^0", "∞^0" i "1^∞"

Neka je $\phi(x) = f(x)^{g(x)}$, $f(x) > 0$ (u nekoj okolini tačke a). Ako je $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ neodređen izraz oblika

- "0^0" ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$),
- "∞^0" ($f(x) \to \infty$ kada $x \to a$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$) ili
- "1^∞" ($\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ i $g(x) \to \pm\infty$ kada $x \to a$),

tada je

$$\lim_{x\to a} \ln \phi(x) = \lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)$$

neodređen izraz oblika "$0 \cdot \infty$".

Zadatak 3.20. Naći sledeće granične vrednosti:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Rešenje.

a) Logaritmovanjem jednakosti $y = x^{\frac{3}{4+\ln x}}$ dobijamo

$$\ln y = \frac{3}{4+\ln x} \cdot \ln x.$$

U nastavku računamo graničnu vrednost leve i desne strane jednakosti

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = \lim_{x\to 0^+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{3\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 3.$$

Otuda je

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = 3 \quad \Rightarrow \quad \ln \lim_{x\to 0^+} y = 3 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} y = e^3.$$

b) Ako je $y = (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$, onda sledi da je

$$\ln y = \frac{1}{\ln x} \cdot \ln(\operatorname{ctg} x).$$

U nastavku računamo graničnu vrednost leve i desne strane jednakosti

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \ln y &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{ctg} x)}{\ln x} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{ctg} x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\frac{\cos x}{\sin x}\cdot \sin^2 x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{\frac{\sin x}{x}} = -1\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo da je

$$\lim_{x\to 0^+} \ln y = -1 \quad \Rightarrow \quad \ln \lim_{x\to 0^+} y = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} y = e^{-1}.$$

c) Primetimo da je $f(x) > 0$ u nekoj okolini tačke 0. Logaritmujemo levu i desnu stranu jednakosti zadate funkcije $\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}$ i nakon toga računamo graničnu vrednost.

$$y = \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}} \quad \Rightarrow \quad \ln y = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) - 1\right]$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\ln y &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{1}{x}\cdot\ln(1+x)-1\right] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \text{“}\,\frac{0}{0}\,\text{”}\\ &\overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-1-x}{1+x}}{x} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\cdot(1+x)}\\ &= -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x} = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo da je

$$\lim_{x\to 0}\ln y = -\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \ln\lim_{x\to 0} y = -\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{2}}.$$

3.2.2. Jednačina tangente i normale

Ako funkcija $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ima prvi izvod u tački $x_0\in(a,b)$, tada se prava

$$y-y_0 = f'(x_0)(x-x_0),$$

gde je $y_0=f(x_0)$, zove **tangenta grafika funkcije** f u tački $T(x_0,f(x_0))$.
Ako je α ugao između tangente grafika u tački x_0 i pozitivnog smera x-ose, tada važi

$$\operatorname{tg}(\alpha) = f'(x_0).$$

Ako je $f'(x_0)\neq 0$, tada je **normala grafika funkcije** f u tački $T(x_0,f(x_0))$ prava

$$y-y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Zadatak 3.21. Naći jednačine tangente i normale za sledeće funkcije u datim tačkama:

a) $f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}-\ln x$ u tački čija je apscisa $x=1$;

b) $x=2\operatorname{tg}t$, $y=2\sin^2 t+\sin(2t)$ u tački $A(2,2)$.

Rešenje.

a) Izračunaćemo y koordinatu tačke $T(x_0,f(x_0))$ i vrednost prvog izvoda za $x=1$

$$y=f(1)=2 \quad\Rightarrow\quad T(1,2),$$

$$f'(x)=3x^2-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad f'(1)=1.$$

Jednačine tangente i normale su

$$t: y-y_0=f'(x_0)(x-x_0) \quad\Rightarrow\quad y-2=1\cdot(x-1) \quad\Rightarrow\quad y=x+1,$$

$$n: y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad\Rightarrow\quad y-2=-1\cdot(x-1) \quad\Rightarrow\quad y=-x+3.$$

b) Funkcija je zadata parametarski pa koristimo izvod parametarski zadate funkcije

$$x'(t)=\frac{2}{\cos^2 t},\quad y'(t)=4\sin t\cos t+2\cos(2t).$$

Otuda je

$$y'_x=\frac{2\sin(2t)+2\cos(2t)}{\frac{2}{\cos^2 t}}=\cos^2 t\big(\sin(2t)+\cos(2t)\big).$$

Kako je $x = 2\operatorname{tg} t = 2$, sledi $\operatorname{tg} t = 1$, odnosno $t = \frac{\pi}{4}$, pa je $y'_x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

Sada su jednačine tangente i normale

$$t: y - y_0 = y'_x(t)(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = \frac{1}{2}(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} + 1,$$

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{y'_x(t)}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad y - 2 = -2(x-2) \quad \Rightarrow \quad y = -2x + 6.$$

3.2.3. Tejlorova teorema

Teorema 3.22. *Neka su funkcija $f(x)$ i svi njeni izvodi do $(n-1)$-og reda neprekidni nad zatvorenim intervalom $[\alpha, \beta]$ i neka $f(x)$ ima n-ti izvod nad otvorenim intervalom (α, β). Ako su $a, x \in (\alpha, \beta)$, tada postoji bar jedna tačka ξ između a i x takva da je:*

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \cdot f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} \cdot f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\xi).$$

Kada je funkcija $f(x)$ predstavljena kao

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{(x-a)^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\xi) = T_{n-1}(x) + R_n(x),$$

kažemo da je razvijena po Tejlorovoj formuli u tački a. Funkcija $R_n(x)$ se naziva ostatak (ili greška) i predstavlja odstupanje funkcije $f(x)$ od Tejlorovog polinoma $T_{n-1}(x)$.

Ako u Tejlorovu formulu stavimo da je $a = 0$, dobićemo Maklorenovu formulu

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!} \cdot f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{(n-1)}(0) + R_n(x),$$

pri čemu je $R_n(x) = \frac{x^n}{n!} \cdot f^{(n)}(\omega x)$, $0 < \omega < 1$, a odgovarajući polinom

$$M_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k,$$

zove se Maklorenov polinom.

Zadatak 3.23. Aproksimirati funkciju $f(x) = x^2 e^{-x}$ Tejlorovim polinomom trećeg stepena u tački $x = 2$.

Rešenje. Potrebna su nam prva tri izvoda funkcije $f(x)$, kao i njihove vrednosti u tački $x = 2$

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \Rightarrow \quad f(2) = 4e^{-2}$$

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) \quad \Rightarrow \quad f'(2) = e^{-2}(4-4) = 0$$

$$f''(x) = -e^{-x}(2x - x^2) + e^{-x}(2 - 2x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2) \quad \Rightarrow \quad f''(2) = -2e^{-2}$$

$$f'''(x) = e^{-x}(-x^2 + 6x - 6) \quad \Rightarrow \quad f'''(2) = 2e^{-2}.$$

Prema Tejlorovoj formuli za funkciju $f(x) = x^2 e^{-x}$ u okolini $x = 2$ je

$$f(x) = f(2) + f'(2)(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + \frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3 + R_3(x),$$

pa zamenom izračunatih vrednosti dobijamo

$$\begin{aligned} T_3(x) &= 4e^{-2} + 0 \cdot (x-2) + \frac{-2e^{-2}}{2}(x-2)^2 + \frac{2e^{-2}}{6}(x-2)^3 \\ &= \frac{4}{e^2} - \frac{1}{e^2}(x-2)^2 + \frac{1}{3e^2}(x-2)^3. \end{aligned}$$

Zadatak 3.24. Razviti funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} x + (x^3 - 2x^2 + 1)$ u Tejlorov polinom trećeg stepena u tački $x = 1$ i u Maklorenov polinom trećeg stepena.

Rešenje. Tejlorov polinom trećeg stepena u $x = 1$ za polinom $x^3 - 2x^2 + 1$ možemo napisati po stepenima od $x - 1$, tj. razvojem ćemo dobiti isti polinom. Isto važi i za Maklorenov polinom, pa je potrebno raditi samo razvoj funkcije $z(x) = \operatorname{arctg} x$, prvo u Tejlorov polinom

$$\begin{aligned}
z(x) &= \operatorname{arctg} x &&\Rightarrow\quad z(1) = \frac{\pi}{4}\\
z'(x) &= \frac{1}{1+x^2} &&\Rightarrow\quad z'(1) = \frac{1}{2}\\
z''(x) &= \frac{-2x}{(1+x^2)^2} &&\Rightarrow\quad z''(1) = -\frac{1}{2}\\
z'''(x) &= \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3} &&\Rightarrow\quad z'''(1) = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

pa pošto je polinom $x^3 - 2x^2 + 1$ već razvijen možemo razviti i celu funkciju $f(x)$

$$\begin{aligned}
T_3(x) &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{-\frac{1}{2}}{2!}(x-1)^2 + \frac{\frac{1}{2}}{3!}(x-1)^3 + x^3 - 2x^2 + 1\\
&= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{4}(x-1)^2 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + x^3 - 2x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Nakon izračunavanja $z(0) = 0,\ z'(0) = 1,\ z''(0) = 0,\ z'''(0) = -2$ možemo izraziti i Maklorenov polinom funkcije $f(x)$

$$M_3(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + x^3 - 2x^2 + 1 = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + x + 1.$$

3.2.4. Ispitivanje toka funkcije

Ispitujemo osobine realne funkcije $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ jedne realne promenljive.

- *Domen (oblast definisanosti) funkcije*
  - Funkcija $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ je definisana kad su funkcije g i h definisane i $h(x) \neq 0$.
  - Funkcija $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$, gde je n paran broj, je definisana kada je g definisana i $g(x) \geq 0$; ako je n neparan broj, funkcija f je definisana kad je funkcija g definisana.
  - Funkcija $f(x) = \ln(g(x))$ je definisana kada je funkcija g definisana i $g(x) > 0$.
  - Funkcija $f(x) = e^{g(x)}$ je definisana kada je funkcija g definisana.
  - Funkcije $f(x) = \arcsin(g(x))$ i $f(x) = \arccos(g(x))$ su definisane kad je funkcija g definisana i $g(x) \in [-1, 1]$.
  - Funkcije $f(x) = \operatorname{arctg}(g(x))$ i $f(x) = \operatorname{arcctg}(g(x))$ su definisane kada je funkcija g definisana.
- *Parnost funkcije*
  - Ako je $f(-x) = f(x)$, funkcija je parna, tj. njen grafik je simetričan u odnosu na y-osu.
  - Ako je $f(-x) = -f(x)$, funkcija je neparna, tj. njen grafik je simetričan u odnosu na koordinatni početak.
  - Ako je $f(-x) \neq \pm f(x)$, kažemo da funkcije nije ni parna ni neparna.

  Potreban uslov da funkcija bude parna ili neparna jeste da je njen domen simetričan u odnosu na koordinatni početak.

- *Asimptote funkcije*

  - **Vertikalna:** Prava $x = a$, $a \in \mathbb{R}$, je vertikalna asimptota funkcije $y = f(x)$ ako je

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty.$$

  - **Horizontalna:** Prava $y = b$, $b \in \mathbb{R}$, je horizontalna asimptota funkcije $y = f(x)$ ako je

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b \quad \text{ili} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = b.$$

  - **Kosa:** Prava $y = kx + n$, $k, n \in \mathbb{R}$ je kosa asimptota funkcije $y = f(x)$ ako postoje granične vrednosti

$$k = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - kx), \quad k \neq 0 \quad \text{ili}$$

$$k = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - kx), \quad k \neq 0.$$

  Primetimo da kada $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ funkcija ne može istovremeno imati i kosu i horizontalnu asimptotu.

- *Nule i znak funkcije*

  - Nule funkcije su rešenja jednačine $f(x) = 0$, i ukoliko postoje predstavljaju tačke u kojima grafik funkcije seče x-osu.
  - Znak funkcije nam pokazuje za koje vrednosti x je funkcija pozitivna (grafik je iznad x-ose), a za koje negativna (grafik je ispod x-ose). Odgovarajuće vrednosti x dobijaju se rešavanjem nejednačina $f(x) > 0$, odnosno $f(x) < 0$.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti funkcije*

  Neka je funkcija f diferencijabilna na intervalu (a, b).

  - Funkcija f je monotono rastuća ($\nearrow$) na intervalu (a, b) akko je $f'(x) > 0$ za sve $x \in (a, b)$.
  - Funkcija f je monotono opadajuća ($\searrow$) na intervalu (a, b) akko je $f'(x) < 0$ za sve $x \in (a, b)$.

  Potreban uslov da diferencijabilna funkcija $f(x)$ u nekoj tački $x_0 \in \mathcal{D}$ ima ekstremnu vrednost (lokalni minimum ili maksimum) je $f'(x_0) = 0$. Takva tačka x_0 se naziva stacionarna tačka i predstavlja potencijalnu tačku ekstrema. Dovoljan uslov za postojanje ekstremne vrednosti u tački x_0 je da prvi izvod funkcije u toj tački menja znak. Ako postoji okolina $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ takva da

  - $f'(x) < 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, a $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, onda funkcija f dostiže minimum u tački x_0;
  - $f'(x) > 0$ za $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, a $f'(x) < 0$ za $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, onda funkcija f dostiže maksimum u tački x_0.

  Funkcija može imati esktremnu vrednost i u tački domena u kojoj ne postoji prvi izvod, ali u njenoj okolini izvodna funkcija menja znak.

- *Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke funkcije*

  Neka postoji f'' nad intervalom (a, b).

  - Funkcija f je konveksna ($\smile$) na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f''(x) > 0$, za svako $x \in (a, b)$.
  - Funkcija f je konkavna ($\frown$) na intervalu (a, b) ako i samo ako je $f''(x) < 0$, za svako $x \in (a, b)$.

  Tačka u kojoj funkcija menja oblik, odnosno prelazi iz konkavne u konveksnu i obrnuto, naziva se prevojna tačka. Potreban uslov da dva puta diferencijabilna funkcija ima prevoj u nekoj tački $x_0 \in \mathcal{D}$ je da važi $f''(x_0) = 0$. Dovoljan uslov za postojanje prevojne tačke je da drugi izvod u posmatranoj tački x_0 menja znak.
  Funkcija može imati prevoj i u tački domena u kojoj ne postoji drugi izvod, ali u njenoj okolini drugi izvod menja znak.

Zadatak 3.25. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{x^3+8}{x^2-4}$.

Rešenje.

- *Oblast definisanosti*: Funkcija je definisana za $x^2 - 4 \neq 0$, tj. $x \neq \pm 2$.

  Prema tome domen funkcije je $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

- *Parnost*: Kako je

$$f(-x) = \frac{(-x)^3+8}{(-x)^2-4} = \frac{-x^3+8}{x^2-4} \neq \pm f(x),$$

  zaključujemo da funkcija nije ni parna, ni neparna.

- *Nule i znak*:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad x^3+8=0 \quad \wedge \quad x^2-4 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x+2)(x^2-2x+4)=0 \quad \wedge \quad (x+2)(x-2) \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x=-2 \quad \wedge \quad x \neq \pm 2, \end{aligned}$$

  tj. funkcija nema nule.

  Na domenu funkcije važi

$$f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{(x-1)^2+3}{x-2}.$$

  Funkcija je negativna za $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$, a pozitivna za $x \in (2, +\infty)$.

- *Asimptote*:

  – V.A. je prava $x = 2$ jer je

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \text{“}\,\frac{4}{0^-}\,\text{”} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \text{“}\,\frac{4}{0^+}\,\text{”} = +\infty.$$

  Prava $x = -2$ nije vertikalna asimptota jer je

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \frac{12}{-4} = 3.$$

  – H.A. ne postoji jer

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x-2} = \pm\infty.$$

  – K.A. je prava $y = x$ jer je

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4}{x^2-2x} = 1,$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\pm\infty} \Big[f(x) - x\Big] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-2x+4}{x-2} - x\right) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2x+4-x^2+2x}{x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-2} = 0. \end{aligned}$$

- *Monotonost i ekstremne vrednosti*: Prvi izvod funkcije je

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-2)-(x^2-2x+4)}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

  Stacionarne tačke su $x = 0$ i $x = 4$. Ispitujemo znak prvog izvoda

	$(-\infty,-2)$,	$(-2,0)$	$(0,2)$	$(2,4)$	$(4,+\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
f'	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija raste za $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 0) \cup (4, \infty)$, a opada za $x \in (0, 2) \cup (2, 4)$.

Funkcija ima maksimum u tački $A(0, -2)$, a minimum u tački $B(4, 6)$.

- *Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke*: Drugi izvod funkcije je dat sa

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2x^2 - 8x + 8 - x^2 + 8x}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}.$$

Kako je $f''(x) \neq 0$ za $x \in \mathcal{D}$, funkcija nema prevojne tačke. Ispitujemo znak drugog izvoda

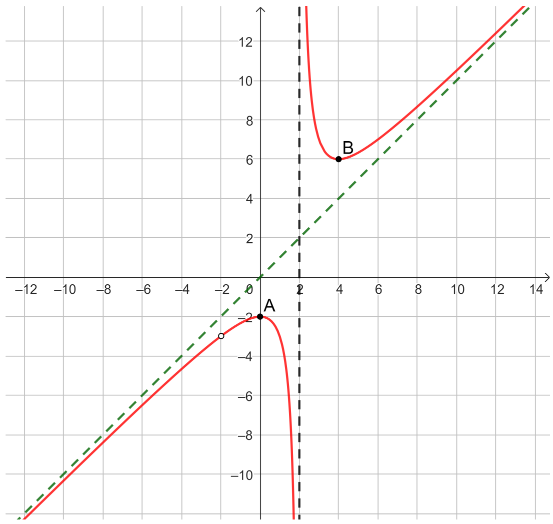
	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, \infty)$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
f''	$-$	$-$	$+$
f	$\frown$	$\frown$	$\smile$

Funkcija je konkavna za $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 2)$, a konveksna za $(2, \infty)$.

- *Tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod*: Ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca desne tangente u tački $x = -2$

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \lim_{x\to-2} f'(x) = \lim_{x\to-2} \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{4}.$$

- *Grafik funkcije*:



Slika 1: $f(x) = \frac{x^3+8}{x^2-4}$

Zadatak 3.26. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \sqrt{\dfrac{(x-2)^3}{x}}$.

Rešenje.

- *Oblast definisanosti*: Za izraz ispod kvadratnog korena mora da važi $\dfrac{(x-2)^3}{x} \geq 0$ i $x \neq 0$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$(x-2)^3$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$+$	$+$
f	$+$	$-$	$+$

Otuda je $\mathcal{D} = (-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$.

- *Parnost*: Funkcija nije ni parna, ni neparna. Može se zaključiti iz domena jer funkcija nije definisana na intervalu $[0,2)$, pa njen grafik ne može biti simetričan u odnosu na koordinatni početak.

- *Nule i znak*:
$$f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^3}{x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x-2=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=2,$$
tj. funkcija seče x- osu u tački $(2,0)$. Funkcija je pozitivna za $x\in\mathcal{D}\setminus\{2\}$.

- *Asimptote*:
  - V.A. je prava $x=0$ jer
$$\lim_{x\to 0^-}\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}=+\infty.$$
Prava $x=2$ nije vertikalna asimptota jer važi
$$\lim_{x\to 2^+}\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}=0.$$
  - H.A. ne postoji jer
$$\lim_{x\to \pm\infty}\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}=+\infty.$$
  - K.A. je prava $y_1=x-3$ kada $x\to+\infty$
$$\begin{aligned} k_1&=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{(x-2)^2(x-2)}{x}}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-2}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}=1,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned} n_1&=\lim_{x\to+\infty}\Big[f(x)-x\Big]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}-x\right)\\ &=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}-1}{\frac{1}{x}}\\ &=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}-1}{\frac{1}{x}}=\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\overset{\text{L.P.}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{2}\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x-(x-2)}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}\\ &=\lim_{x\to+\infty}-3\cdot\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{2}}=-3.\end{aligned}$$
Prava $y_2=-x+3$ je kosa asimptota funkcije kada $x\to-\infty$
$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x-2|}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-x}{x}\sqrt{\frac{x-2}{x}}=-1$$
$$\begin{aligned} n_2&=\lim_{x\to-\infty}\Big[f(x)-(-x)\Big]=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}+x\right)\\ &=\lim_{x\to-\infty}\left(|x|\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}+x\right)\\ &=\lim_{x\to-\infty}x\left(1-\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x^3}}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{1}{x}}=\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\overset{\text{L.P.}}{=}\ldots=3.\end{aligned}$$

- *Monotonost i ekstremne vrednosti*:
$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}}\cdot\frac{3(x-2)^2x-(x-2)^3}{x^2}=\frac{(x-2)^2(3x-x+2)}{2\sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}\cdot x^4}\\ &=\frac{2(x+1)\sqrt{(x-2)^4}}{2\sqrt{x^3(x-2)^3}}=(x+1)\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\end{aligned}$$
Ispitujemo znak prvog izvoda

	$(-\infty,-1),$	$(-1,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$\times$	$+$
$\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$	$+$	$+$	$\times$	$+$
f'	$-$	$+$	$\times$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$	$\times$	$\nearrow$

Funkcija raste za $x \in (-1,0) \cup [2,\infty)$, a opada za $x \in (-\infty,-1)$.

Funkcija ima minimum u tački $T_{min}(-1,\sqrt{27})$ $\big(x=-1,\, y(-1)=\sqrt{27}\big)$.

- *Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke*: Drugi izvod funkcije je dat sa

$$f''(x) = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}} + (x+1)\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}}\cdot\frac{x^3-(x-2)3x^2}{x^6} = \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\left(1+\frac{(x+1)(x-3x+6)}{\frac{2(x-2)}{x^3}\cdot x^4}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{x-2}{x^3}}\cdot\frac{x^2-2x+(x+1)(3-x)}{x(x-2)} = \frac{3}{x(x-2)}\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}.$$

Ispitujemo znak drugog izvoda

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,\infty)$
x	$-$	$\times$	$+$
$x-2$	$-$	$\times$	$+$
$\sqrt{\frac{x-2}{x^3}}$	$+$	$\times$	$+$
f''	$+$	$\times$	$+$
f	$\smile$	$\times$	$\smile$

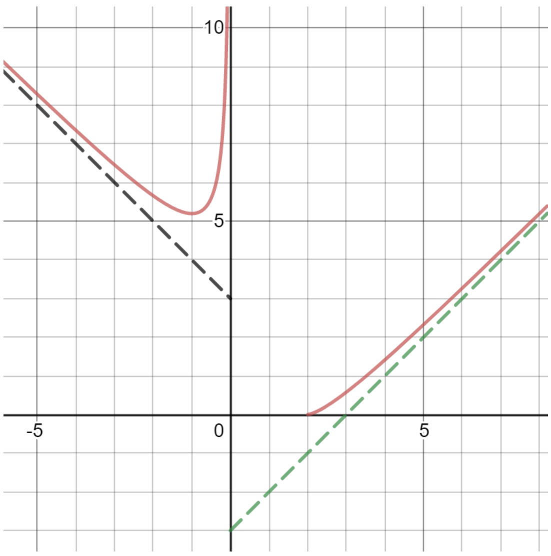
Funkcija je konveksna za $x \in (-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

Kako je funkcija konveksna na celom domenu, sledi da nema prevojnih tačaka.

- *Tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* Ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca desne tangente u tački $(2,0)$

$$\mathrm{tg}(\alpha) = y'(2^+) = 3\cdot\sqrt{\frac{0^+}{8}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 0.$$

- *Grafik funkcije*:



Slika 2: $f(x) = \sqrt{\frac{(x-2)^3}{x}}$

Zadatak 3.27. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{x^2-1}$.

Rešenje.

- *Oblast definisanosti*: Funkcija $y = \operatorname{arctg} x$ je definisana za sve realne brojeve, a $x^2 - 1 \neq 0$ za svako $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Dakle, $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

- *Parnost*: Ovo je neparna funkcija, jer je

$$f(-x) = \operatorname{arctg} \frac{2(-x)}{(-x)^2-1} = \operatorname{arctg} \frac{-2x}{x^2-1} = -\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = -f(x),$$

što znači da je njen grafik simetričan u odnosu na koordinatni početak, pa je u nastavku dovoljno posmatrati funkciju samo na delu domena za $x \geq 0$.

- *Nule i znak*:

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{x^2-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0.$$

Funkcija f ima isti znak kao funkcija $y = \frac{2x}{x^2-1}$

	$(-\infty, -1)$,	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2-1	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{2x}{x^2-1}$	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$-$	$+$	$-$	$+$

Funkcija f je negativna za $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$, a pozitivna je za $x \in (-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

- *Asimptote*:
  - V.A. ne postoji jer

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = \text{“} \operatorname{arctg}(+\infty) \text{”} = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = \text{“} \operatorname{arctg}(-\infty) \text{”} = -\frac{\pi}{2}.$$

  - H.A. je data jednačinom $y = 0$ jer

$$\lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1} = \operatorname{arctg}(0) = 0.$$

  - K.A. ne postoji jer postoji horizontalna asimptota funkcije kada $x \to +\infty$.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti*: Prvi izvod funkcije f je dat sa

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2x}{x^2-1}\right)^2} \cdot \frac{2(x^2-1) - 2x \cdot 2x}{x^2-1} = \frac{1}{\frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2-1)^2}} \cdot \frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2-1)^2} \\ &= \frac{-2x^2-2}{x^4+2x^2+1} = \frac{-2(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{x^2+1}. \end{aligned}$$

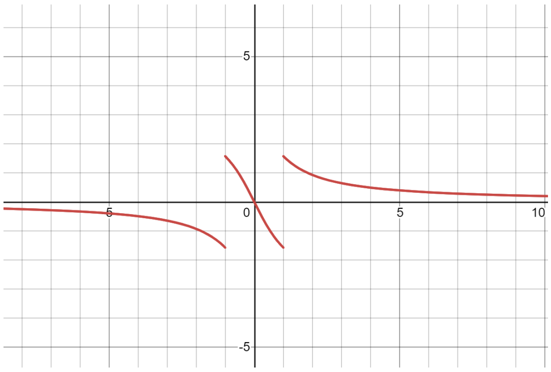
Pošto je $f(x)' < 0$ za svako $x \in \mathcal{D}$, funkcija je opadajuća na čitavom domenu, pa nema ekstremnih vrednosti.

- *Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke*: Drugi izvod funkcije je dat sa

$$f''(x) = \left(\frac{-2}{x^2+1}\right)' = \frac{2 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2},$$

te znak drugog izvoda zavisi samo od $4x$. Funkcija je otuda konkavna ($f''(x) < 0$) na intervalima $(-\infty, -1)$ i $(-1, 0)$ i konveksna ($f''(x) > 0$) na intervalima $(0, 1)$ i $(1, \infty)$. Prevojna tačka je $P(0, 0)$.

- *Tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod*: Ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca (funkcija nije definisana u $x = 1$ pa je u pitanju neprava tangenta)
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{x\to 1} y' = \lim_{x\to 1} \frac{-2}{x^2+1} = -1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{4}.$$
- *Grafik funkcije*:



Slika 3: $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2-1}$

Zadatak 3.28. Detaljno ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{1-\ln x}{x}$.

Rešenje.

- *Oblast definisanosti:* Domen funkcije je skup $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0 \,\wedge\, x \neq 0\} = (0, +\infty)$.
- *Parnost*: Funkcija je definisana samo za pozitivne realne brojeve, pa ne može biti ni parna ni neparna.
- *Nule i znak:*
$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = e.$$

	$(0, e)$	(e, ∞)
$1 - \ln x$	$+$	$-$
x	$+$	$+$
f	$+$	$-$

Funkcija je pozitivna za $x \in (0, e)$, a negativna za $x \in (e, \infty)$.

- *Asimptote*:
  - V.A. je prava $x = 0$ jer
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\ln x}{x} = \text{“}\frac{1-(-\infty)}{0^+}\text{”} = \text{“}\frac{+\infty}{0^+}\text{”} = +\infty.$$
  - H.A. je prava $y = 0$ jer
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\ln x}{x} = \text{“}\frac{-\infty}{\infty}\text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{1} = 0.$$
  - K.A. ne postoji, jer funkcija ima horizontalnu asimptotu.
- *Monotonost i ekstremne vrednosti*: Prvi izvod funkcije f je
$$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x - (1-\ln x)\cdot 1}{x^2} = \frac{\ln x - 2}{x^2}.$$
Stacionarnu tačku dobijamo iz
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^2.$$
Ispitujemo znak prvog izvoda

	$(0, e^2)$	(e^2, ∞)
$\ln x - 2$	$-$	$+$
x^2	$+$	$+$
f'	$-$	$+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

Funkcija je opadajuća na intervalu $(0, e^2)$, a rastuća na intervalu $(e^2, +\infty)$.

Funkcija ima minimum u tački $T_{min}\left(e^2, -\dfrac{1}{e^2}\right)$.

- *Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke*: Drugi izvod funkcije je

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - (\ln x - 2) \cdot 2x}{x^4} = \frac{5 - 2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 5 - 2\ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln x = \frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{\frac{5}{2}}$$

Ispitujemo znak drugog izvoda

	$(0, e^{\frac{5}{2}})$	$(e^{\frac{5}{2}}, \infty)$
$5 - 2\ln x$	$+$	$-$
x^3	$+$	$+$
f''	$+$	$-$
f	$\smile$	$\frown$

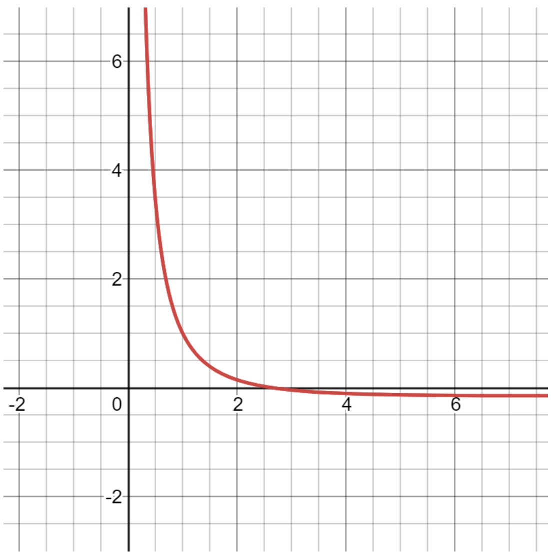
Funkcija je konveksna na intervalu $(0, e^{\frac{5}{2}})$, a konkavna na intervalu $(e^{\frac{5}{2}}, +\infty)$.

Prevojna tačka funkcije je $P\left(e^{\frac{5}{2}}, -\dfrac{3}{2e^{\frac{5}{2}}}\right)$.

- *Tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* ako je α ugao između tangente i pozitivnog smera x-ose, onda je koeficijent pravca (neprava desna tangenta)

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x - 2}{x^2} = \text{“}\frac{-\infty}{0^+}\text{”} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{2}.$$

- *Grafik funkcije*:



Slika 4: $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$

Zadatak 3.29. Detaljno ispitati tok i nacrati grafik funkcije $f(x) = xe^{\frac{1}{x-2}}$.

Rešenje.

- *Oblast definisanosti*: $x - 2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$, tj. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- *Parnost*: funkcija ne može biti ni parna ni neparna jer njen domen nije simetričan u odnosu na koordinatni početak.

- *Nule i znak*: Proizvod dva činioca jednak je nuli akko je bar jedan od njih nula. Kako je $e^{\frac{1}{x-2}} \neq 0$ za svaki realan broj, sledi $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

  Znak funkcije zavisi samo od x, pa je $f(x) < 0$ za $x \in (-\infty, 0)$, dok je $f(x) > 0$ za $x \in (0, 2) \cup (2, +\infty)$.

- *Asimptote*:

  - V.A. je prava $x = 2$ sa desne strane jer

$$\lim_{x \to 2^-} xe^{\frac{1}{x-2}} = \text{“}\, 2 \cdot e^{\frac{1}{0^-}} \,\text{”} = \text{“}\, 2 \cdot e^{-\infty} \,\text{”} = 0,$$

$$\lim_{x \to 2^+} xe^{\frac{1}{x-2}} = \text{“}\, 2 \cdot e^{\frac{1}{0^+}} \,\text{”} = \text{“}\, 2 \cdot e^{+\infty} \,\text{”} = +\infty.$$

  - H.A. ne postoji jer

$$\lim_{x \to -\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = \text{“} -\infty \cdot e^0 \text{”} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \to +\infty} xe^{\frac{1}{x-2}} = \text{“} +\infty \cdot e^0 \text{”} = +\infty.$$

  - K.A. je prava $y = x + 1$ jer

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} = e^0 = 1, \\ n &= \lim_{x \to \pm\infty} \Big[f(x) - x \Big] = \lim_{x \to \pm\infty} \left(xe^{\frac{1}{x-2}} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} x \left(e^{\frac{1}{x-2}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \text{“} \frac{0}{0} \text{”} \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x \to \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} = 1 \end{aligned}$$

- *Monotonost i ekstremne vrednosti*: Prvi izvod funkcije je

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{x-2}} + x \cdot e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2} \right) = e^{\frac{1}{x-2}} \left(1 - \frac{x}{(x-2)^2} \right) \\ &= e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)^2} = e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{(x-1)(x-4)}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

  Stacionarne tačke funkcije su $x = 1$ i $x = 4$. Potrebno je ispitati znak prvog izvoda da bismo odredili ekstremne vrednosti. Primetimo da znak prvog izvoda zavisi isključivo od izraza $(x-1)(x-4)$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 4)$	$(4, +\infty)$
$x - 4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x - 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

  Funkcija je rastuća na intervalima $(-\infty, 1)$ i $(4, +\infty)$, a opadajuća na intervalima $(1, 2)$ i $(2, 4)$.

  Funkcija ima maksimum u tački $A\left(1, \frac{1}{e}\right)$, a minimum u tački $B(4, 4\sqrt{e})$.

- *Konveksnost, konkavnost i prevojne tačke*: Drugi izvod funkcije je

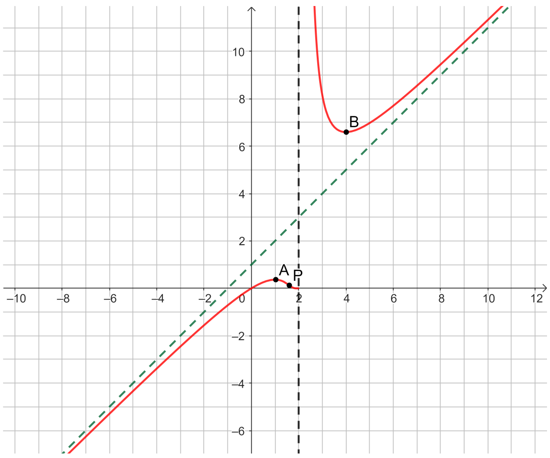
$$\begin{aligned}
f''(x) &= e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \left(-\frac{1}{(x-2)^2}\right) \cdot \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2} + e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{(2x-5)(x-2)^2-(x^2-5x+4)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4} \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^4}(-x^2+5x-4+2x^3-13x^2+28x-20-2x^3+14x^2-28x+16) \\
&= \frac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^4}(5x-8) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{8}{5}.
\end{aligned}$$

Znak drugog izvoda zavisi samo od $5x-8$ jer je $\dfrac{e^{\frac{1}{x-2}}}{(x-2)^4} > 0$ za $x \in \mathcal{D}$. Prema tome, funkcija je konkavna ($f''(x) < 0$) za $x \in (-\infty, \frac{8}{5})$, dok je funkcija konveksna ($f''(x) > 0$) za $x \in (\frac{8}{5}, 2) \cup (2, +\infty)$, pa je $P(\frac{8}{5}, \frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$ prevojna tačka.

- *Tangente funkcije u tačkama gde ne postoji prvi izvod:* Za tačku $x = 2$ koeficijent pravca (neprave leve) tangente je

$$\begin{aligned}
\mathrm{tg}(\alpha) &= \lim_{x\to 2^-} f'(x) = \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{x^2-5x+4}{(x-2)^2}}{e^{-\frac{1}{x-2}}} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \\
&\overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{(2x-5)(x-2)^2-(x^2-5x+4)\cdot 2(x-2)}{(x-2)^4}}{e^{-\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}} = \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{x+2}{x-2}}{e^{-\frac{1}{x-2}}} = \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} \\
&\overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{x\to 2^-} \frac{\frac{x-2-(x+2)}{(x-2)^2}}{e^{-\frac{1}{x-2}} \cdot \frac{1}{(x-2)^2}} = -4 \lim_{x\to 2^-} e^{\frac{1}{x-2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0.
\end{aligned}$$

- *Grafik funkcije*:



Slika 5: $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x-2}}$

Zadatak 3.30. Detaljno ispitati tok i nacrtati grafik funkcije $f(x) = \dfrac{|2-x|}{3\sqrt{x^2+2}}$.

Rešenje.

- *Oblast definisanosti*: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$

- *Parnost*: funkcija nije ni parna, ni neparna jer

$$f(-x) = \frac{|2-(-x)|}{3\sqrt{(-x)^2+2}} = \frac{|2+x|}{3\sqrt{x^2+2}} \neq \pm f(x).$$

Kako je

$$|2-x| = \begin{cases} 2-x, & 2-x \geq 0 \\ x-2, & 2-x < 0 \end{cases} \quad = \quad \begin{cases} 2-x, & x \leq 2 \\ x-2, & x > 2 \end{cases},$$

u nastavku analize posmatramo dve funkcije:

$$f_1(x) = \frac{2-x}{3\sqrt{x^2+2}},\ x \leq 2 \qquad \text{i} \qquad f_2(x) = \frac{x-2}{3\sqrt{x^2+2}},\ x > 2.$$

Primetimo da je funkcija f neprekidna u $x = 2$ jer

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f_2(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-2}{3\sqrt{x^2+2}} = 0 = f_1(2) = f(2).$$

- *Asimptote*:
  - V.A. ne postoji jer je $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
  - H.A. je prava $y = \dfrac{1}{3}$ jer

$$\lim_{x\to -\infty} f_1(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{2-x}{3\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to -\infty} \frac{-x(1-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to -\infty} \frac{-x(1-\frac{2}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to +\infty} f_2(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-2}{3\sqrt{x^2+2}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to +\infty} \frac{x(1-\frac{2}{x})}{|x|\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{3}\lim_{x\to +\infty} \frac{x(1-\frac{2}{x})}{x\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{3}$$

  - K.A. ne postoji, jer funkcija ima horizontalnu asimptotu.

- *Nule i znak*:

  Za f_1 je nula $x = 2$, dok f_2 nema nule.

  Funkcija f je pozitivna za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- *Monotonost i ekstremne vrednosti*: Prvi izvod funkcije f_1 je

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{-\sqrt{x^2+2} - (2-x)\cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2}} \cdot 2x}{x^2+2} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2+2+(2-x)x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1+x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

  Slično se dobija $f_2'(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1+x}{(x^2+2)^{\frac{3}{2}}}$.

  Stacionarna tačka je $x = -1$ (nula za f_1'). Primetimo da znak prvog izvoda zavisi samo od $x+1$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,2)$	$(2,+\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
f'	$+$	$-$	$+$
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

  Funkcija raste za $x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$, a opada za $x \in (-1,2)$.

  Funkcija ima maksimum u tački $A\left(-1, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$, a minimum u tački $B(2,0)$.

- *Konveksnost, konksvnost i prevojne tačke*: Drugi izvod funkcije f_1 je

$$\begin{aligned} f_1''(x) &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{(x^2+2)^{\frac{3}{2}} - (x+1)\cdot \dfrac{3}{2}(x^2+2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2+2)^3} \\ &= -\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2+2-3x(x+1)}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x^2+3x-2}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

Slično se dobija $f_2''(x) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{2x^2+3x-2}{(x^2+2)^{\frac{5}{2}}}$.

Nule drugog izvoda su nule polinoma $2x^2+3x-2$, tj. $x=-2$ i $x=\frac{1}{2}$.

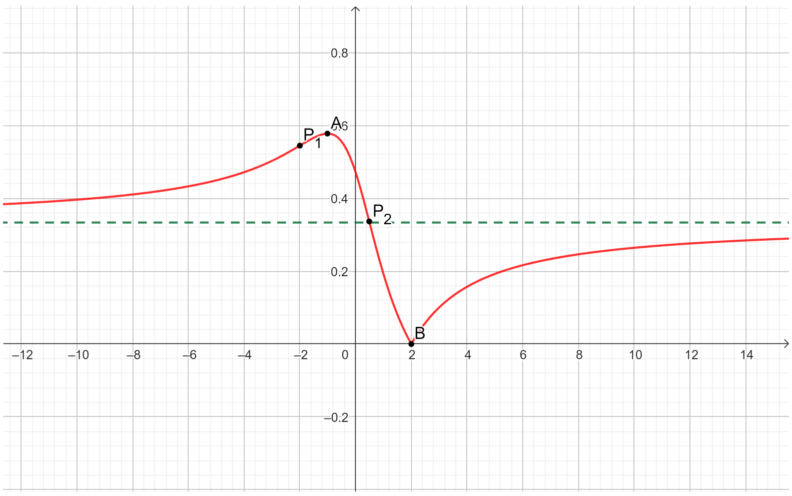
Ispitujemo znak drugog izvoda

	$(-\infty,-2)$,	$(-2,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},2)$	$(2,+\infty)$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
f''	$+$	$-$	$+$	$-$
f	$\smile$	$\frown$	$\smile$	$\frown$

Funkcije je konveksna za $x \in (-\infty,-2) \cup \left(\frac{1}{2},2\right)$, dok je konkavna za $x \in \left(-2,\frac{1}{2}\right) \cup (2,+\infty)$.

Prevojne tačke su $P_1\left(-2,\frac{2\sqrt{6}}{9}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$ i $B(2,0)$.

- *Grafik funkcije*:



Slika 6: $f(x) = \frac{|2-x|}{3\sqrt{x^2+2}}$