

Konstantni koeficijenti

- Videli smo strategiju za rešavanje homogene i nehomogene linearne diferencijalne jednačine drugog reda. U oba slučaja, potrebno je naći dva linearno nezavisna rešenja homogene jednačine, što može biti težak problem. Međutim, kada je u pitanju jednačina sa konstantnim koeficijentima, rešenje se može naći relativno lako.

Konstantni koeficijenti

- Data je linearna homogena diferencijalna jednačina drugog reda

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (1)$$

gde su a i b konstante.

Metod rešavanja se na neki način i sam nameće kada se ova jednačina pažljivo prouči.

Konstantni koeficijenti

- Treba pronaći funkciju y takvu da se, kada se saberu njen drugi izvod, konstanta puta njen prvi izvod i konstanta pomnožena sa samom funkcijom, dobije nula za svako x .
- Ovakvo ponašanje ima eksponencijalna funkcija $e^{\lambda x}$, zato što je izvod od $e^{\lambda x}$ upravo konstanta pomnožena sa $e^{\lambda x}$. Zato treba pronaći λ tako da $e^{\lambda x}$ bude rešenje.

Konstantni koeficijenti

- Kada se $e^{\lambda x}$ zameni u jednačinu (1) dobija se

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + be^{\lambda x} = 0.$$

Kako je $e^{\lambda x}$ uvek veće od nule, cela jednačina može da se podeli sa $e^{\lambda x}$, i ostaje nam kvadratna jednačina po λ :

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (2)$$

Konstantni koeficijenti

- Kvadratna jednačina (2) se zove *karakteristična jednačina* za diferencijalnu jednačinu (1). Treba uočiti da se karakteristična jednačina može napisati direktno iz diferencijalne jednačine, gledajući njene koeficijente. Nije potrebno da se svaki put zamenjuje $e^{\lambda x}$. Koreni karakteristične jednačine su

$$\frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}),$$

tako da imamo tri slučaja.

Slučaj 1: Realni i različiti koreni

- $a^2 - 4b > 0$
- Različiti koreni su

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4b}) \text{ i } \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4b})$$

$e^{\lambda_1 x}$ i $e^{\lambda_2 x}$ su linearno nezavisna rešenja i u ovom slučaju opšte rešenje jednačine je

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Primer

- Na osnovu diferencijalne jednačine

$$y'' - y' - 6y = 0,$$

odmah se može napisati odgovarajuća karakteristična jednačina

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

koja ima dva realna, različita korena 3 i -2.

Dakle, opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

Slučaj 2: Jednaki koreni

- Ovo se dešava kada je $a^2 - 4b = 0$ i oba korena karakteristične jednačine su $\lambda = -a/2$. Jedno rešenje ovakve diferencijalne jednačine je $e^{-ax/2}$.
- Potrebno je naći još jedno, linearno nezavisno rešenje. Koristi se metod *snižavanja reda* da se dobije drugo rešenje ako imamo jedno. Drugo rešenje se traži u obliku $y(x) = u(x)e^{-ax/2}$.

Slučaj 2: Jednaki koreni

- Izračuna se prvi i drugi izvod

$$y' = u'e^{-ax/2} - \frac{a}{2}ue^{-ax/2}$$

$$y'' = u''e^{-ax/2} - au'e^{-ax/2} + \frac{a^2}{4}ue^{-ax/2}$$

Slučaj 2: Jednaki koreni

- Uvrštavanjem u (1) dobija se

$$u''e^{-ax/2} - au'e^{-ax/2} + \frac{a^2}{4}ue^{-ax/2} + au'e^{-ax/2} - a\frac{a}{2}ue^{-ax/2} + bue^{-ax/2} = 0$$

$$e^{-ax/2} \left[u'' - \left(b - \frac{a^2}{4} \right) u \right] = 0$$

Slučaj 2: Jednaki koreni

- Kako je u ovom slučaju $b - a^2/4 = 0$, a $e^{-ax/2}$ uvek različito od nule, ova jednačina se svodi na

$$u'' = 0.$$

- Njeno rešenje je funkcija oblika $u(x) = cx + d$ gde su c i d proizvoljne konstante.
- Zato je bilo koja funkcija oblika
$$y = (cx + d)e^{-ax/2}$$
takođe rešenje jednačine (1) u ovom slučaju.

Slučaj 2: Jednaki koreni

- Kako je nama potrebna samo jedno rešenje koje je linearno nezavisno sa $e^{-ax/2}$, biramo $c = 1$ i $d = 0$ i dobijamo rešenje $xe^{-ax/2}$. Opšte rešenje u slučaju jednakih korena je

$$y = c_1 e^{-ax/2} + c_2 x e^{-ax/2}.$$

Može se zapisati i u obliku: $y = e^{-ax/2}(c_1 + c_2 x)$.

Slučaj 2: Jednaki koreni

- Ovu proceduru nije neophodno svaki put ponavljati. Dovoljno je da se napiše da je u slučaju jednakih korena jedno rešanje $e^{-ax/2}$, a drugo, linearno nezavisno rešenje je $xe^{-ax/2}$.

Primer

■ Naći opšte rešenje $y'' + 8y' + 16y = 0$.

■ Karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

a njena oba korena $\lambda = -4$. Opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}.$$

Slučaj 3: Kompleksni koreni

- Karakteristična jednačina ima kompleksne korene kada važi $a^2 - 4b < 0$. Pošto karakteristična jednačina ima realne koeficijente, koreni su konjugovano kompleksni brojevi $\alpha + i\beta$ i $\alpha - i\beta$ gde α može biti nula, ali je β uvek različito od nule.

Slučaj 3: Kompleksni koreni

- Opšte rešenje u ovom slučaju je

$$y = c_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$$

tj.

$$y = e^{\alpha x} \left(c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x} \right). \quad (3)$$

- Ovo je tačno, međutim, nekad nam je potrebno rešenje u kome ne figurišu kompleksni brojevi.

Slučaj 3: Kompleksni koreni

- Takvo rešenje se može naći koristeći Ojlerovu vezu koja važi za svaki realan broj β

$$e^{i\beta x} = \cos(\beta x) + i \sin(\beta x).$$

- Kada se zameni x sa $-x$, takođe važi

$$e^{-i\beta x} = \cos(\beta x) - i \sin(\beta x).$$

Slučaj 3: Kompleksni koreni

- Tada

$$\begin{aligned}y(x) &= e^{\alpha x} (c_1 e^{i\beta x} + c_2 e^{-i\beta x}) \\&= c_1 e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) + c_2 e^{\alpha x} (\cos(\beta x) - i \sin(\beta x)) \\&= (c_1 + c_2) e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i(c_1 - c_2) e^{\alpha x} \sin(\beta x).\end{aligned}$$

c_1 i c_2 su proizvoljni realni ili kompleksni brojevi.

Slučaj 3: Kompleksni koreni

- Ako se uzme $c_1 = c_2 = 1/2$, dobija se partikularno rešenje $e^{\alpha x} \cos(\beta x)$. A ako se odabere $c_1 = 1/2i = -c_2$, dobija se partikularno rešenje $e^{\alpha x} \sin(\beta x)$.
- Kako su ova dva rešenja linearno nezavisna, opšte rešenje u ovom slučaju se može napisati u obliku

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x) \quad (4)$$

gde su c_1 i c_2 proizvoljne konstante. Opšte rešenje se može zapisati i u obliku

$$(5) \quad y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)).$$

Slučaj 3: Kompleksni koreni

- (4) ili (5) je oblik koji se češće koristi da se zapiše opšte rešenje u ovom trećem slučaju, iako je i (3) takođe korektno.
- Izvođenje ne treba svaki put ponavljati. Opšte rešenje se direktno zapiše u obliku (4) ili (5), gde su $\alpha \pm i\beta$ koreni karakteristične jednačine.

Primer

- Naći opšte rešenje jednačine $y'' + 2y' + 3y = 0$.
- Karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 + 2\lambda + 3 = 0$$

a njeni kompleksni koreni $-1 \pm i\sqrt{2}$.

Kako su $\alpha = -1$ i $\beta = \sqrt{2}$ opšte rešenje je

$$y = c_1 e^{-x} \cos(\sqrt{2}x) + c_2 e^{-x} \sin(\sqrt{2}x).$$

Prmer

- Rešiti $y'' + 36y = 0$.
- Karakteristična jednačina je

$$\lambda^2 + 36 = 0$$

sa kompleksnim korenima $\lambda = \pm 6i$. Sada je $\alpha = 0$ i $\beta = 6$, tako da je opšte rešenje dato sa

$$y(x) = c_1 \cos(6x) + c_2 \sin(6x).$$

Konstantni koeficijenti

- Sada se može naći opšte rešenje diferencijalne jednačine $y'' + ay' + by = 0$ u svim slučajevima.

Rezime:

- Neka su λ_1 i λ_2 koreni karakteristične jednačine $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Konstantni koeficijenti

- Tada:

1. Ako su λ_1 i λ_2 realni i različiti brojevi

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2. Ako je $\lambda_1 = \lambda_2$,

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

3. Ako su koreni kompleksni brojevi $\alpha \pm i\beta$,

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Nehomogena jednačina

- Za rešavanje nehomogene linearne jednačine je potrebno da imamo dva linearno nezavisna rešenja odgovarajuće homogene jednačine i partikularno rešenje Y_p nehomogene jednačine. Videli smo kako se traži opšte rešenje homogene jednačine sa konstantnim koeficijentima.
- Potrebno je još naći Y_p .
- To se može uraditi **metodom varijacije konstanti** ili u nekim specijalnim slučajevima **metodom neodređenih koeficijenata**.

Metod neodređenih koeficijenata

- Ovaj metod se može primeniti samo na linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima

$$y'' + ay' + by = f(x).$$

- Ideja koja prestavlja osnovu ovog metoda je da se u nekim slučajevima može pogoditi oblik partikularnog rešenja $Y_p(x)$ na osnovu oblika funkcije $f(x)$.

Primer 1

- Naći opšte rešenje jednačine

$$y'' - 4y = 8x^2 - 2x.$$

- Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je $c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$.
- Treba nam partikularno rešenje $Y_p(x)$ nehomogene jednačine.

Primer 1

- Kako je $f(x) = 8x^2 - 2x$ polinom, a izvodi polinoma su takođe polinomi, možemo pretpostaviti da će i traženo rešenje biti polinom.
- Takvo rešenje ne može biti polinom stepena većeg od 2.
- Kada bi $Y_p(x)$ sadržalo x^3 , taj sabirak bi ostao zbog člana $-4y$ koji se nalazi u $y'' - 4y$, a $8x^2 - 2x$ nema takav član.

Primer 1

- Ovakvo rezonovanje nam sugerije da treba pokušati sa $Y_p(x) = Ax^2 + Bx + C$.
- Izračunaju se $y'(x) = 2Ax + B$ i $y''(x) = 2A$, zamene u diferencijalnu jednačinu i dobije

$$2A - 4(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2 - 2x.$$

- Što se onda može zapisati i u obliku:

$$(-4A - 8)x^2 + (-4B + 2)x + (2A - 4C) = 0.$$

Primer 1

- Ovaj polinom drugog stepena mora da bude jednak nuli za svako x da bi Y_p bilo rešenje. Tako da svi koeficijenti moraju da budu jednaki nuli, tj.

$$-4A - 8 = 0,$$

$$-4B + 2 = 0,$$

i

$$2A - 4C = 0.$$

Primer 1

- Sistem se reši i dobije $A = -2$, $B = 1/2$, $C = -1$, što nam daje partikularno rešenje

$$Y_p(x) = -2x^2 + \frac{1}{2}x - 1.$$

- Opšte rešenje je

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1.$$

Primer 2

- Naći opšte rešenje jednačine

$$y'' + 2y' - 3y = 4e^{2x} .$$

- Opšte rešenje

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \text{ je}$$

$$c_1 e^{-3x} + c_2 e^x .$$

Primer 2

- Tražimo partikularno rešenje. Kako su izvodi od e^{2x} jednaki konstanta pomnožena sa e^{2x} , očekujemo da će konstanta pomnožena sa e^{2x} biti traženo rešenje. Dakle, $Y_p(x) = Ae^{2x}$.
Zamenom u diferencijalnu jednačinu:

$$4Ae^{2x} + 4Ae^{2x} - 3Ae^{2x} = 4e^{2x}$$

$$5Ae^{2x} = 4e^{2x}$$

Primer 2

- To važi za $5A = 4$, tj. $A = 4/5$. Partikularno rešenje je $Y_p(x) = 4e^{2x}/5$.
- Opšte rešenje:

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^x + \frac{4}{5} e^{2x}$$

Primer 3

- Naći opšte rešenje jednačine

$$y'' - 5y' + 6y = -3\sin(2x).$$

- Opšte rešenje $y'' - 5y' + 6y = 0$ je $c_1e^{3x} + c_2e^{2x}$.

Primer 3

- Izvodi funkcije $\sin(2x)$ su $\cos(2x)$ pomnožen konstantom ili $\sin(2x)$ pomnožen konstantom. Izvodi $\cos(2x)$ se isto tako ponašaju.
- To nam sugeriše da partikularno rešenje treba tražiti u obliku

$$Y_p(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x).$$

Treba uočiti da su i $\sin(2x)$ i $\cos(2x)$ uključeni u rešenje iako $f(x)$ ima samo $\sin(2x)$.

Primer 3

- Izračunaju se izvodi

$$Y'_p(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$$

i

$$Y''_p(x) = -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x).$$

- Zamene u diferencijalnu jednačinu

$$\begin{aligned} & -4A \cos(2x) - 4B \sin(2x) - 5[-2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)] \\ & + 6[A \cos(2x) + B \sin(2x)] = -3 \sin(2x). \end{aligned}$$

Primer 3

- Grupišući sabirke, dobija se
 $[2B + 10A + 3]\sin(2x) = [-2A + 10B]\cos(2x)$.

- Kako se $\sin(2x)$ ne može dobiti množenjem konstante sa $\cos(2x)$, sledi da ova jednakost može biti zadovoljena za svako x samo u slučaju kada su ove konstante jednake nuli:

$$2B + 10A + 3 = 0$$

$$-2A + 10B = 0.$$

Primer 3

- Kada se sistem reši, dobijaju se konstante $A = -15/52$ i $B = -3/52$.
- Partikularno rešenje je

$$Y_p(x) = -\frac{15}{52} \cos(2x) - \frac{3}{52} \sin(2x)$$

- Opšte rešenje:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} - \frac{15}{52} \cos(2x) - \frac{3}{52} \sin(2x).$$

Neodređeni koeficijenti

- Kod metoda neodređenih koeficijenata treba biti oprezan!

Primer 4

- Naći partikularno rešenje za

$$y'' + 2y' - 3y = 8e^x .$$

- Kada bismo pokušali kao u Primeru 2, partikularno rešenje bismo tražili u obliku

$$Y_p(x) = Ae^x .$$

- Međutim, zamenom u diferencijalnu jednačinu dobija se

$$Ae^x + 2Ae^x - 3Ae^x = 8e^x$$

iz čega sledi $8e^x = 0$, što je kontradikcija.

Neodređeni koeficijenti

- Ovde je problem što je e^x takođe i rešenje odgovarajuće homogene jednačine, tako da će leva strana biti nula kada se Ae^x zameni u

$$y'' + 2y' - 3y = 8e^x .$$

- U slučaju da je $Y_p(x)$ rešenje odgovarajuće homogene jednačine, predloženo rešenje treba pomnožiti sa x . Ako je to ponovo rešenje odgovarajuće homogene jednačine, treba ga pomnožiti sa još jednim x .

Primer 4

- Kako je $f(x)=8e^x$, prvi pokušaj je bio $Y_p(x)=Ae^x$. Ali smo dobili da je to rešenje odgovarajuće homogene jednačine, dakle treba probati sa $Y_p(x)=Axe^x$. Sada imamo

$$Y'_p(x)=Ae^x +Axe^x$$

$$Y''_p(x)=2Ae^x +Axe^x$$

Primer 4

- Kada se zamene izvodi u diferencijalnu jednačinu, dobija se

$$2Ae^x + Axe^x + 2(Ae^x + Axe^x) - 3Axe^x = 8e^x.$$

- Što se svodi na $4Ae^x = 8e^x$, tj. $A = 2$, pa je partikularno rešenje $Y_p(x) = 2xe^x$.
- Opšte rešenje je

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^x + 2xe^x.$$

Primer 5

- Rešiti jednačinu $y'' - 6y' + 9y = 5e^{3x}$.
- Odgovarajuća homogena jednačina ima karakterističnu jednačinu $(\lambda - 3)^2 = 0$ čija su oba korena $\lambda = 3$. Opšte rešenje homogene jednačine je $c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$.

Primer 5

- U ovom slučaju su i Ae^{3x} i Axe^{3x} rešenja odgovarajuće homogene jednačine, tako da treba pokušati sa

$$Y_p(x) = Ax^2e^{3x} .$$

Kada se ova funkcija i njeni izvodi zamene u diferencijalnu jednačinu, dobija se $A = 5/2$, tako da je partikulrno rešenje $Y_p(x) = 5x^2e^{3x}/2$. Opšte rešenje je

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + \frac{5}{2}x^2e^{3x} .$$

Neodređeni koeficijenti

- Za razliku od metoda varijacije konstatni, metod neodređenih koeficijenata se može koristiti samo samo kada je funkcija $f(x)$ određenog oblika, kao i samo u slučaju linearne diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima.
- Još jednom ćemo ponoviti postupak. Traži se opšte rešenje jednačine
$$y'' + ay' + by = f(x).$$

Neodređeni koeficijenti

- Korak 1.

- Odredi se opšte rešenje

$$y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine

$$y'' + ay' + by = 0$$

gde su y_1 i y_2 linearno nezavisna rešenja. To se može uvek uraditi za slučaj sa konstantnim koeficijentima.

Neodređeni koeficijenti

- Korak 2.
 - Treba naći partikularno rešenje Y_p nehomogene jednačine. Na osnovu oblika funkcije $f(x)$ odrediti oblik partikularnog rešenja, a zatim odrediti nepoznate koeficijente zamenjujući rešenje u jednačinu.

Neodređeni koeficijenti

- Korak 3.
 - Opšte rešenje je

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_1 + Y_p$$

Neodređeni koeficijenti

$f(x)$	$Y_p(x)$
$P(x)$	$Q(x)$
Ae^{cx}	Re^{cx}
$A \cos(\beta x)$	$C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)$
$A \sin(\beta x)$	$C \cos(\beta x) + D \sin(\beta x)$
$P(x)e^{cx}$	$Q(x)e^{cx}$
$P(x) \cos(\beta x)$	$Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x)$
$P(x) \sin(\beta x)$	$Q(x) \cos(\beta x) + R(x) \sin(\beta x)$
$P(x)e^{cx} \cos(\beta x)$	$Q(x)e^{cx} \cos(\beta x) + R(x)e^{cx} \sin(\beta x)$
$P(x)e^{cx} \sin(\beta x)$	$Q(x)e^{cx} \cos(\beta x) + R(x)e^{cx} \sin(\beta x)$

- U ovoj tabeli je dat spisak funkcija koje treba uzeti za $Y_p(x)$ za različite $f(x)$ kada to nisu rešenja odgovarajuće homogene diferencijalne jednačine. $P(x)$ je polinom stepena n , $Q(x)$ i $R(x)$ su polinomi stepena n sa nepoznatim koeficijentima koje treba odrediti, a c i β su konstante.
- Ako se u $f(x)$ nalazi rešenje odgovarajuće homogene jednačine, onda funkcije iz tabele treba pomnožiti sa x^σ , gde je σ najmanji prirodan broj za koji, na primer $x^\sigma Q(x)$ nije homogeno rešenje.

Princip superpozicije

- Traži se partikularno rešenje jednačine
$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_N(x).$$

- Ako je Y_j partikularno rešenje jednačine

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_j(x),$$

onda je $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N$ je partikularno rešenje polazne diferencijalne jednačine.

Primer 6

- Naći partikularno rešenje jednačine

$$y'' + 4y = x + 2e^{-2x} .$$

- Posmatramo dva problema:

- *Problem 1: $y'' + 4y = x$*
- *Problem 2: $y'' + 4y = 2e^{-2x}$*

Primer 6

- Koristeći metod neodređenih koeficijenata, dobijamo da je $Y_{p_1}(x) = x/4$ partikularno rešenje Problema 1, a partikularno rešenje Problema 2. Dakle, partikularno rešenje date diferencijalne jednačine je

$$Y_{p_2}(x) = e^{-2x} / 4$$

- Opšte rešenje je

$$Y_p(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}e^{-2x}.$$

$$y(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x) + \frac{1}{4}(x + e^{-2x}).$$

Ojlerova diferencijalna jednačina

Ako su A i B konstante, diferencijalna jednačina drugog reda

$$x^2 y'' + Axy' + By = 0 \quad (2.15)$$

se zove *Ojlerova jednačina*. Ojlerova jednačina je definisana za $x > 0$ i $x < 0$. Mi ćemo tražiti rešenje na $x > 0$.

Ojlerova diferencijalna jednačina

- Smenom se Ojlerova jednačina svodi na homogenu linearnu diferencijalnu jednačinu drugog reda sa konstantnim koeficijentima čije rešenje znamo kako da pronađemo. Neka je

$$x = e^t$$

ili $t = \ln(x)$, što je ekvivalentno. Zameni se $x = e^t$ u $y(x)$, i dobije funkcija od t $Y(t) = y(e^t)$.

Ojlerova diferencijalna jednačina

- Da bi mogli Ojlerovu jednačinu da izrazimo preko t , moramo izraziti izvode od $y(x)$ preko izvoda od $Y(t)$. Na osnovu izvoda složene funkcije sledi

$$\begin{aligned}y'(x) &= \frac{d}{dx}(y(x)) = \frac{d}{dx}(y(t)) \\ &= \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} Y'(t).\end{aligned}$$

Ojlerova diferencijalna jednačina

■ Dalje,

$$\begin{aligned}y''(x) &= \frac{d}{dx}(y'(x)) \\ &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}Y'(t)\right) \\ &= -\frac{1}{x^2}Y'(t) + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(Y'(t)) \\ &= -\frac{1}{x^2}Y'(t) + \frac{1}{x}\frac{dY'(t)}{dt}\frac{dt}{dx} \\ &= -\frac{1}{x^2}Y'(t) + \frac{1}{x}\frac{1}{x}Y''(t) \\ &= \frac{1}{x^2}(Y''(t) - Y'(t)).\end{aligned}$$

Ojlerova diferencijalna jednačina

- Tako se dobija

$$x^2 y''(x) = Y''(t) - Y'(t).$$

- Zamenom u Ojelrovu jednačinu, dobija se transformisana diferencijalna jednačina

$$Y''(t) - Y'(t) + AY'(t) + BY(t) = 0$$

tj.

$$Y''(t) + (A - 1)Y'(t) + BY(t) = 0. \quad (2.16)$$

Ovo je sada jednačina sa konstantnim koeficijentima koju znamo da rešimo.

Primer 7

- Naći opšte rešenje diferencijalne jednačine

$$x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0.$$

- $A = 2$ i $B = -6$ smenom se svodi na

$$Y''(t) + Y'(t) - 6Y(t) = 0.$$

Primer 7

- Opšte rešenje ove diferencijalne jednačine sa konstantnim koeficijentima je dato sa

$$Y(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}.$$

- Vрати se smena $t = \ln(x)$ i dobije opšte rešenje Ojlerove diferencijalne jednačine za $x > 0$:

$$y(x) = c_1 e^{-3 \ln(x)} + c_2 e^{2 \ln(x)} = c_1 x^{-3} + c_2 x^2$$

Primer 8

- Ojlerova d.j. $x^2 y'' - 5xy' + 9y = 0$ se smenom svodi na

$$Y'' - 6Y' + 9Y = 0,$$

čije opšte rešenje je dato sa $Y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$.

Opšte rešenje Ojlerove d. j. je tada

$$y(x) = c_1 e^{3 \ln(x)} + c_2 \ln(x) e^{3 \ln(x)} = c_1 x^3 + c_2 x^3 \ln(x)$$

za $x > 0$.

Primer 9

- Rešiti $x^2 y'' + 3xy' + 10y = 0$.
- Jednačina koja se dobija posle uvođenja smene je

$$Y'' + 2Y' + 10Y = 0$$

i njeno opšte rešenje je

$$Y(t) = c_1 e^{-t} \cos(3t) + c_2 e^{-t} \sin(3t).$$

Primer 9

- Tada

$$\begin{aligned}y(x) &= c_1 e^{-\ln(x)} \cos(3 \ln(x)) + c_2 e^{-\ln(x)} \sin(3 \ln(x)) \\ &= \frac{1}{x} (c_1 \cos(3 \ln(x)) + c_2 \sin(3 \ln(x))).\end{aligned}$$

Primer 10

- Rešiti početni problem

$$x^2 y'' - 5xy' + 10y = 0; y(1) = 4, y'(1) = -6.$$

- Ojlerova jednačina se transformiše u

$$Y'' - 6Y' + 10Y = 0 \text{ čije opšte rešenje je}$$

za $x > 0$.

$$Y(t) = c_1 e^{3t} \cos(t) + c_2 e^{3t} \sin(t)$$

Primer 10

- Tada

$$y(x) = x^3 (c_1 \cos(\ln(x)) + c_2 \sin(\ln(x))) .$$

iz čega sledi

$$y(1) = 4 = c_1 .$$

- Tako da imamo

$$y(x) = 4x^3 \cos(\ln(x)) + c_2 x^3 \sin(\ln(x)) .$$

Primer 10

- Odredi se prvi izvod

$$y'(x) = 12x^2 \cos(\ln(x)) - 4x^2 \sin(\ln(x)) \\ + 3c_2 x^2 \sin(\ln(x)) + c_2 x^2 \cos(\ln(x)).$$

- Iz koga sledi

$$y'(1) = 12 + c_2 = -6,$$

tj. $c_2 = -18$. Rešenje početnog problema je

$$y(x) = 4x^3 \cos(\ln(x)) - 18x^3 \sin(\ln(x)).$$